# GSP를 이용한 삼각함수 성질에 관한 이해

김 재 환* · 양 성 호**

목 차



# Ⅰ. 서 론

## 1. 연구의 필요성 및 목적

지금의 학생들은 식을 그 자체로만 여기는 경향이 있으며, 그래프를 단지 부분적인 정보를 얻는 것으로 여기며, 전반적인 방법의 이해 발달에는 어려움을 가지고 있는 학생이 많다. 그래프는 함수에 대한 사고의 다른 면을 제공하지만 많은 학생들은 그래프와 그 안에 내재하고 있는 대수식 사이를 거의 관련짓지 못한다. Dreyfus와 Eisenber(1990)는 그 이유를 학생들이 책과 강의에서 정보를 연속적으로 얻는데 의존하는 데에 반해서 그래프적인 정보는 비연속적이기 때문이라고 말하고 있다. 그래프 그리기와 해석하기는 함수에 대한 기본적인 이해가 시작되는 곳이다. 처음에는 질적 접근을 통해서 그림을 그려보는 것으로 시작하여 점차적으로 형식적인 틀에 맞추어 그래프를 그려 나가도록 해야 할 것이다. 학생들에게 그래프가 어떤 상황을 얼마나 효율적으로 기술하는가를 알게 하는 기회를 제공한다. 그래서 평소 삼각함수 단원을 공부하면서 개념파악이 잘 안되어 이해하기 힘들어하는 라디안, 삼각함수의 정의 및 삼각함수의 그래프를 시각화하여 삼각함수의 성질에 접근할 수 있으면 좋겠다고 생각하였고, 본 논문은 삼각함수의 성질에 접근함에 기하소프트웨어인 GSP프로그램을 이용해 삼각함수에 대한 내용을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 연구하였다. 애니메이션을 준 삼각함수의 그래프 자취의 흔적 남기기, 점을 드래그 함에 따라 모양 변

* 제주대학교 교육대학원 수학교육전공
** 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

하기 등 다채로운 기능을 통해 흥미를 갖고 학습에 임할 수 있도록 연구하여 정리하였다.

7차 교육과정의 '7-가' 단원에서 일차함수 $y=ax$를 배우고 '8-가' 과정에서 $y=ax+b$를 배울 때 $y=ax$를 $y$축으로 $b$만큼 평행이동하는 것을 적용하고 있고, '9-가'의 이차함수 $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2-q$ (단, $a\neq 0$)를 배울 때는 $y=ax^2$ (단, $a\neq 0$)를 기본 그래프로 하여 $x$축, $y$축으로 평행이동하여 설명하고 있다. 또 유리함수는 $y=\frac{a}{x-p}+q$는 $y=\frac{a}{x}$를 기본으로 하여 $x$축, $y$축으로 평행이동하여 설명하고 있다. 무리함수도 같은 방법인 평행이동과 대칭이동으로 설명하고 있다.

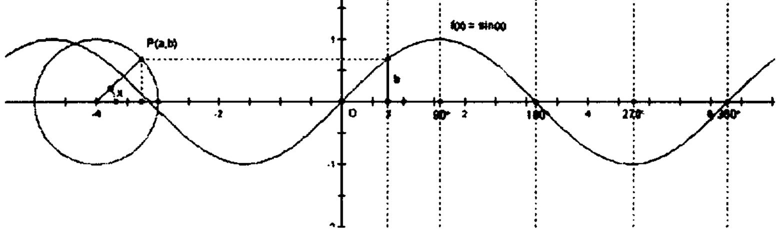
그러나 삼각함수의 성질은 그래프의 평행이동 또는 대칭이동보다는 대수적으로 먼저 접근하고 있다.

현행 교과서는 다수는 '삼각함수의 성질' 뒤에 '삼각함수의 그래프'가 제시되는 순서로 전개되어진다. 삼각함수의 그래프를 학습하지 않고 삼각함수의 성질을 먼저 접하게 되면 학생들은 삼각함수의 성질을 삼각함수의 중요한 공식으로서 암기하기 쉽다. 그러므로 '삼각함수의 그래프'를 학습한 후, 그래프를 통하여 '삼각함수의 성질'을 생각해 보도록 전개되어야 한다는 것이 본 연구의 핵심이다. 현행 교과서들 중 '삼각함수의 성질' 단원이 '삼각함수의 그래프' 단원 뒤에 나오는 경우도 몇 가지 있으나, 이는 단원의 순서만 달리 했을 뿐 전개 내용은 그래프와의 관계는 비연속적이다.

# Ⅱ. 본 론

## 1. $y=\sin x$ 그래프

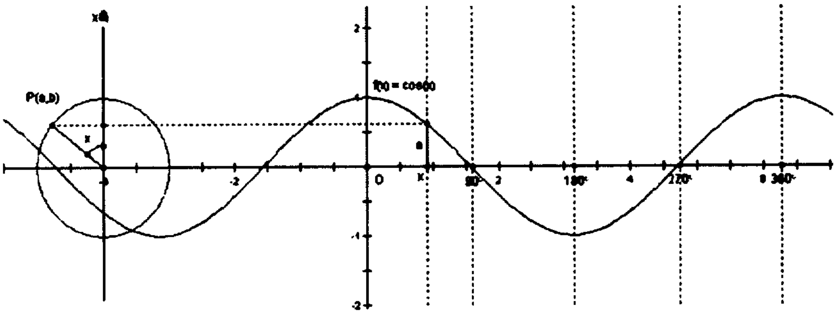
좌표평면 위에서 각 $x$를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(a, b)$라면 $\sin x=\frac{b}{1}=b$가 된다. 따라서 $\sin x$의 값은 점 $P$의 $b$좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x)=\sin x$의 그래프를 그리면 다음의 <그림 1>과 같다.




<그림 1>

## 2. $y=\cos x$ 그래프

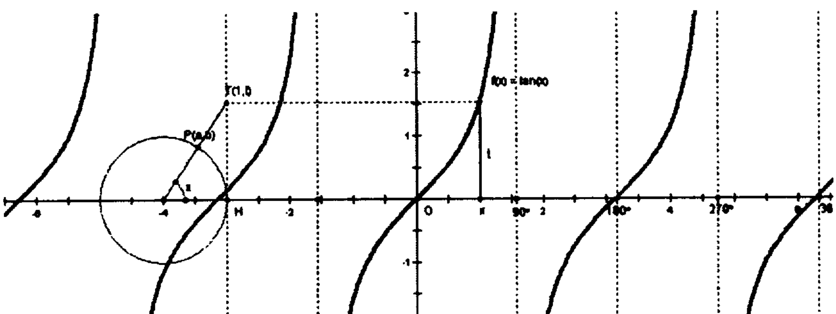
좌표평면 위에서 각 $x$를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(a, b)$라면 $\cos x=\dfrac{a}{1}=a$가 된다. 따라서 $\cos x$의 값은 점 $P$의 $a$좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x)=\cos x$의 그래프를 그리면 다음의 <그림 2>과 같다.




<그림 2>

## 3. $y=\tan x$ 그래프

좌표평면 위에서 각 $x$를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(a, b)$라 하고, 점 $H$에서의 단위원의 접선과 동경 OP와의 교점을 $T(1, t)$라고 하면 $\tan x=\dfrac{b}{a}=\dfrac{t}{1}=t$가 된다. 따라서 $\tan x$의 값은 점 $T$의 $T$좌표의 값의 변화를 조사하여 $f(x)=\tan x$의 그래프를 그리면 다음의 <그림 3>과 같다.




<그림 3>

## 4. 그래프를 통한 삼각함수의 성질

### 1) 도형의 평행이동

방정식 $f(x, y)=0$ 으로 표현되는 도형을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

### 2) 도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y)=0$ 으로 나타내어지는 도형을

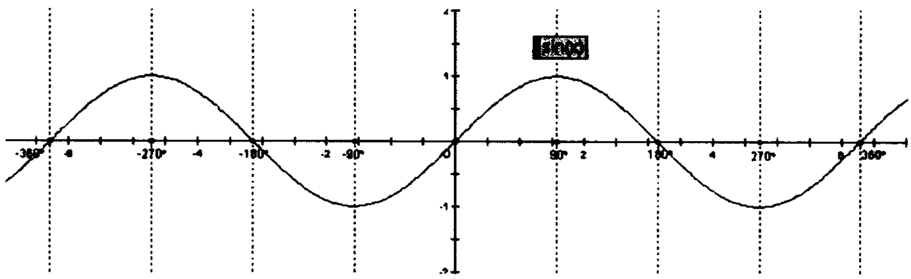
(1) $x$축에 대한 대칭이동한 도형의 방정식은 : $f(x, -y)=0$

(2) $y$축에 대한 대칭이동도형의 방정식은 : $f(-x, y)=0$

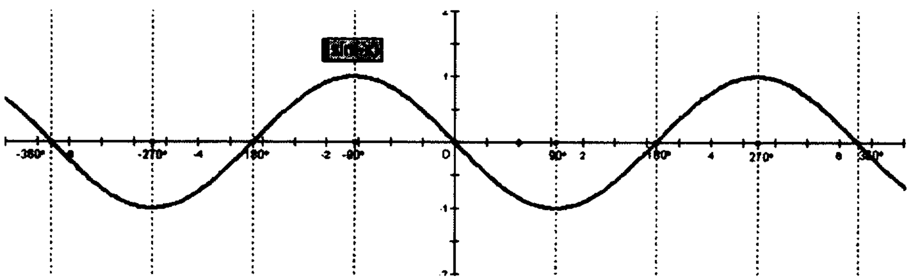
(3) 원점에 대한 대칭이동도형의 방정식은 : $f(-x, -y)=0$

### 3) $-x$의 삼각함수

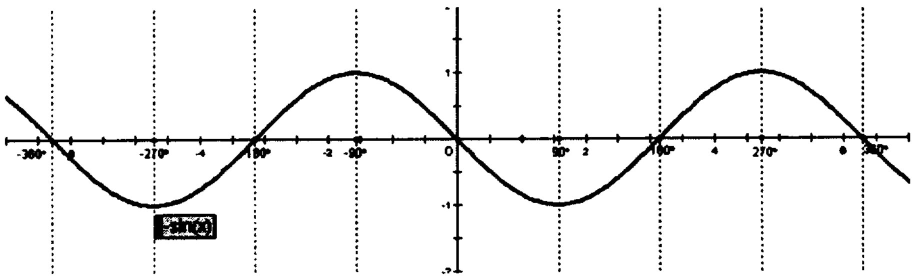
(1) $\sin(-x)$ = $-\sin(x)$



$y=\sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



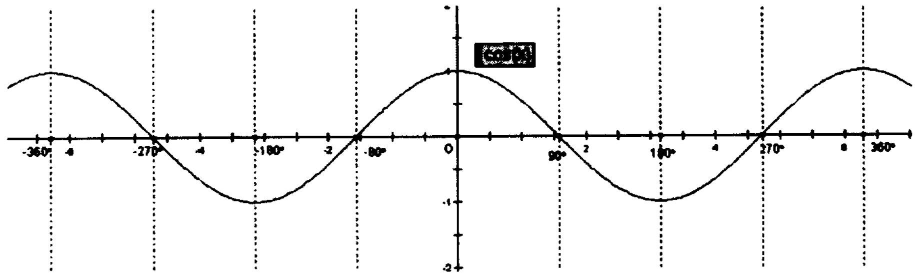
$y=\sin(-x)$의 그래프는 $y=\sin x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



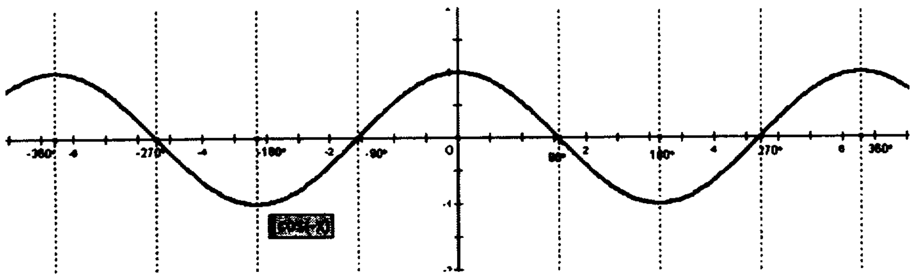
$y = -\sin x$의 그래프는 $y = \sin x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프로서 $y = \sin(-x)$와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(2) $\cos(-x) = \cos(x)$



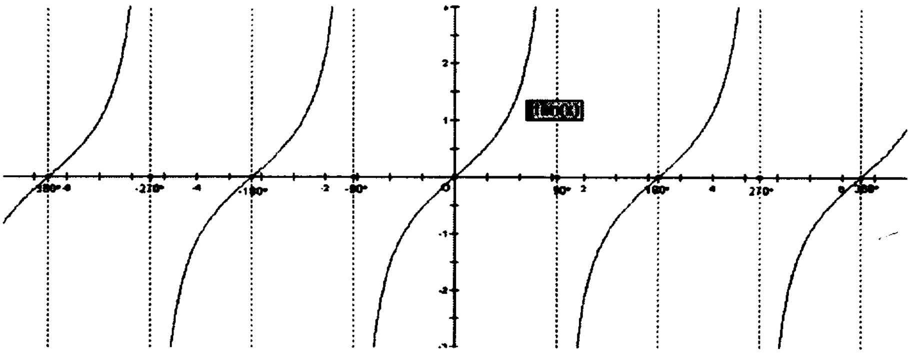
$y = \cos x$의 그래프를 제시한다.



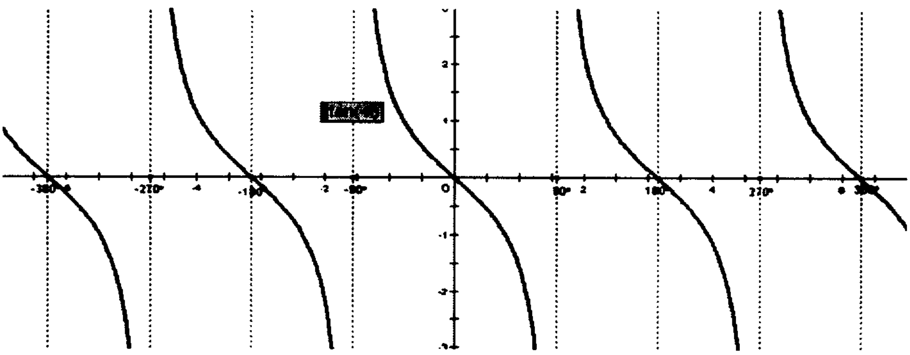
$y = \cos(-x)$의 그래프는 $y = \cos x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프이면서 $y = \cos x$의 그래프와 일치한다.

따라서 $\cos(-x) = \cos(x)$.

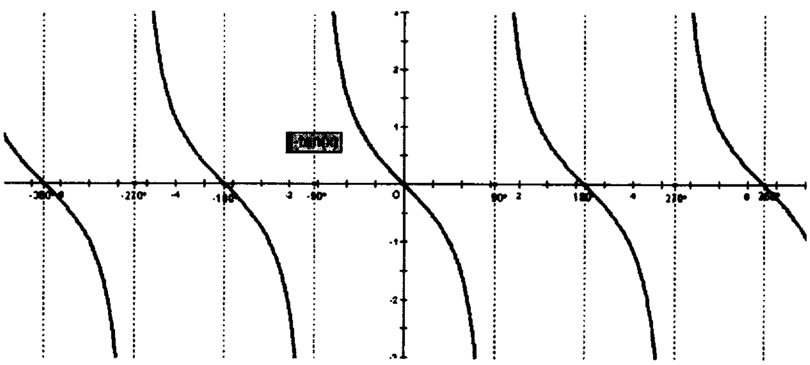
(3) $\tan(-x) = -\tan(x)$



$y=\tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\tan(-x)$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.

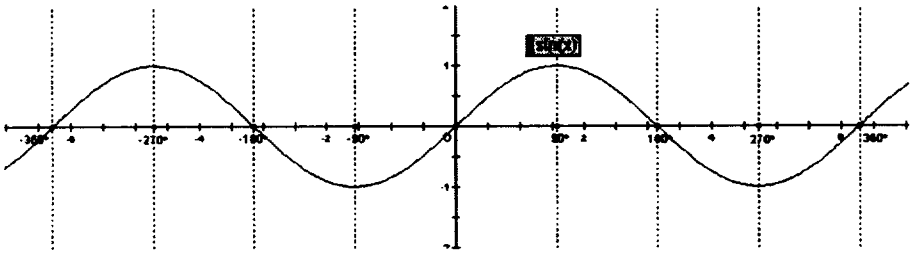


$y=-\tan x$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프로서 $y=\tan(-x)$와 일치함을 알 수 있다.

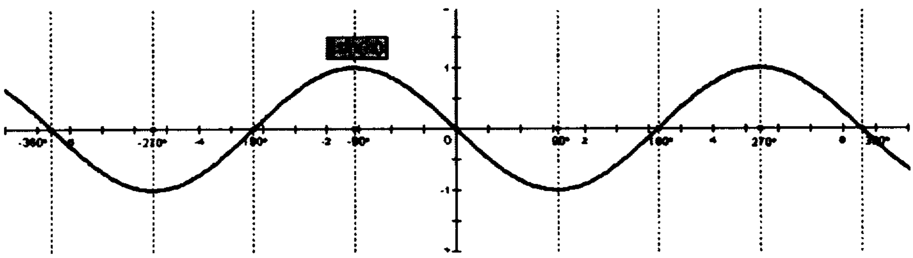
따라서 $\tan(-x) = -\tan(x)$.

### 4) $\frac{\pi}{2} \pm x$의 삼각함수

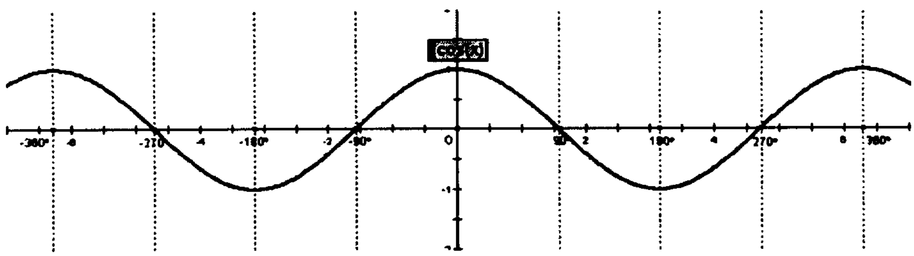
(1) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$



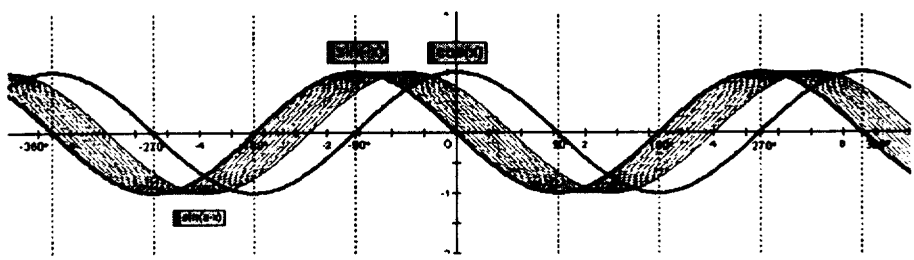
$y=\sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\sin(-x)$의 그래프는 $y=\sin x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



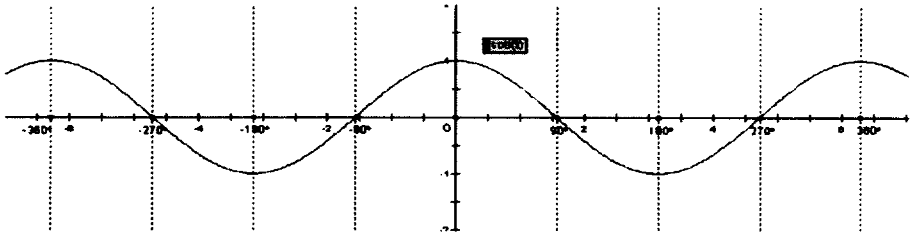
$y=\cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



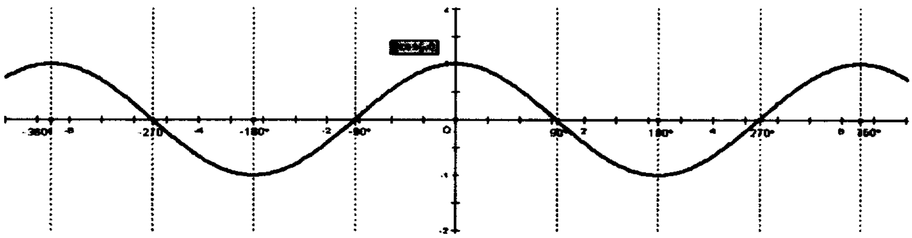
$y=\sin(90° - x) = \sin\{-(x-90°)\}$의 그래프는 $y=\sin(-x)$ 그래프를 $x$축의 양의 방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y=\cos x$와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(90° - x) = \cos x$.

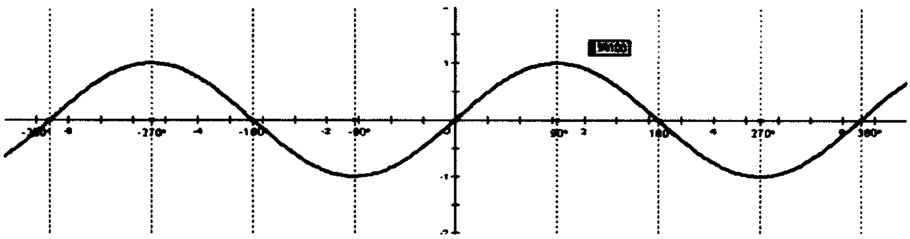
(2) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$



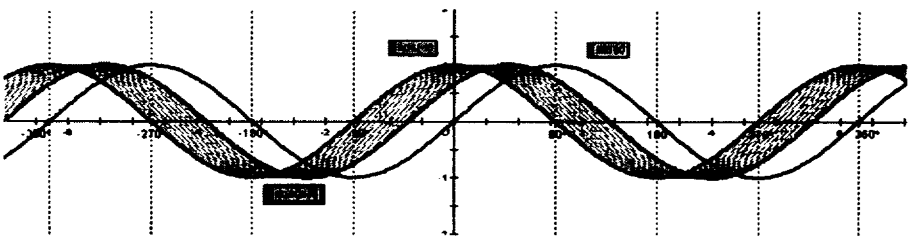
$y = \cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.

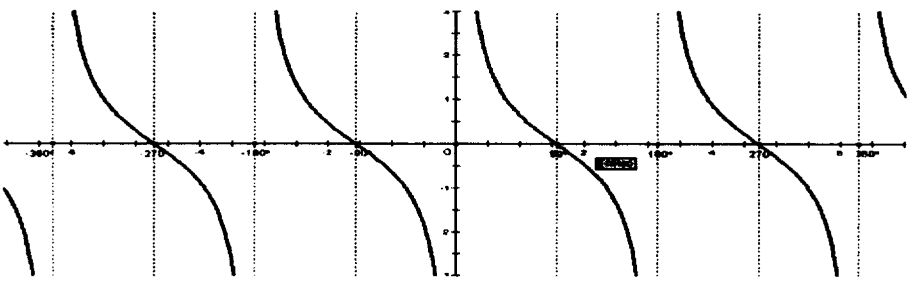


$y = \cos(-x)$의 그래프는 $y = \cos x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



$y = \sin x$의 그래프를 제시한다.

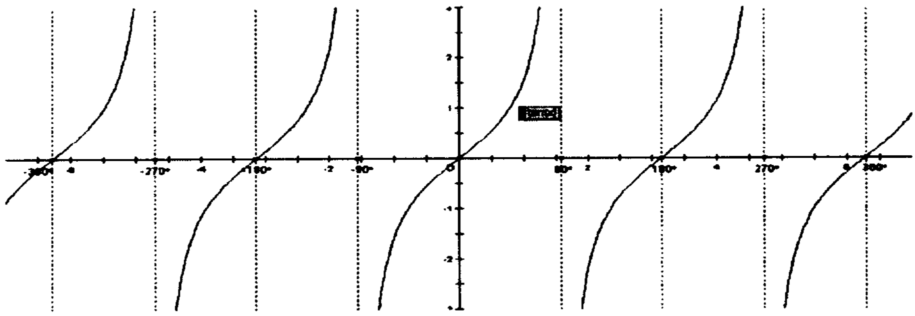




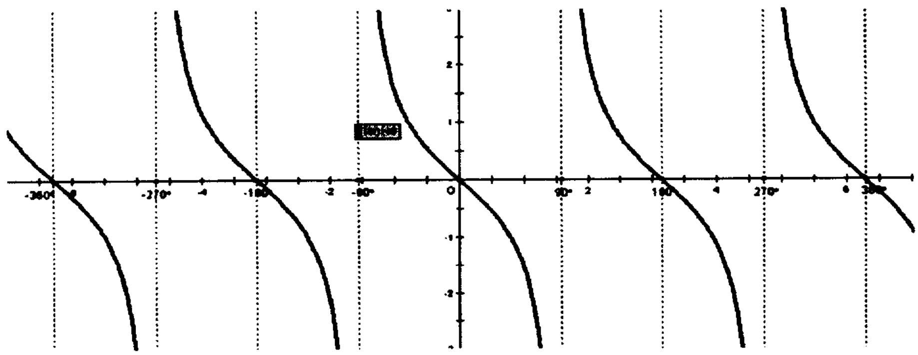
$y=\cos(90°-x)$의 그래프는 $y=\cos(-x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y=\sin(-x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(90°-x) = \sin(x)$.

(3) $\tan(\frac{\pi}{2}-x)= \cot x$

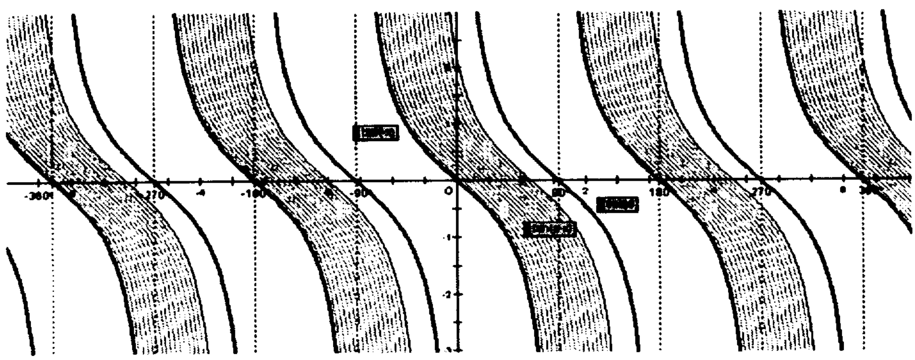


$y=\tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\tan(-x)$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

$y=\cot x$의 그래프를 제시한다.



$y=\tan(90° - x)$의 그래프는 $y=\tan(-x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y=\cot(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(90° - x) = \cot(x)$.

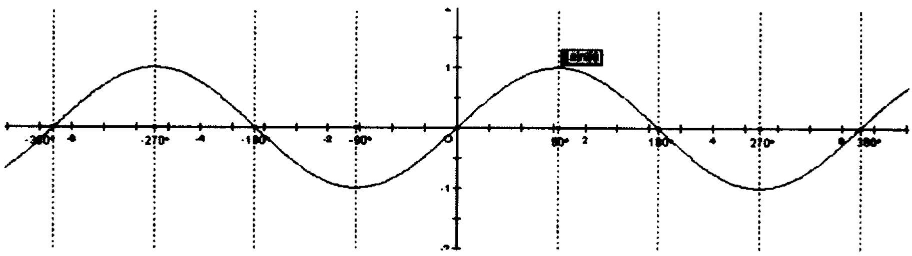
7차 교육과정 '10-가'에서는 코탄젠트 그래프가 제시되어 있지 않고 있다.

따라서,

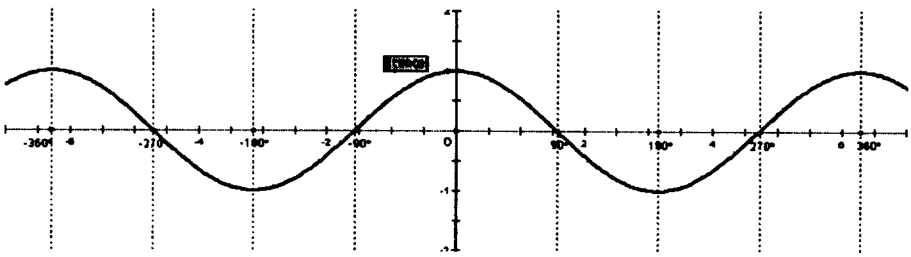
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

로 설명이 가능하다.

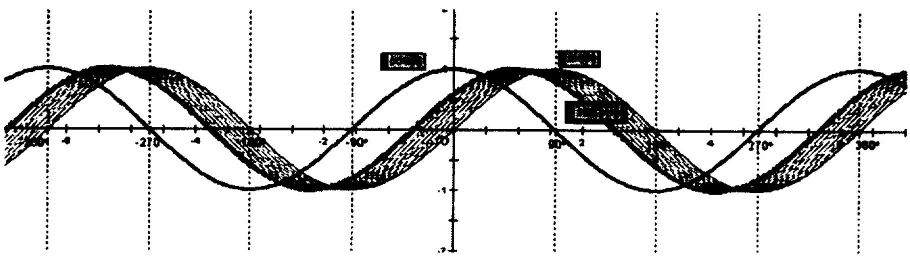
(4) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$



$y=\sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



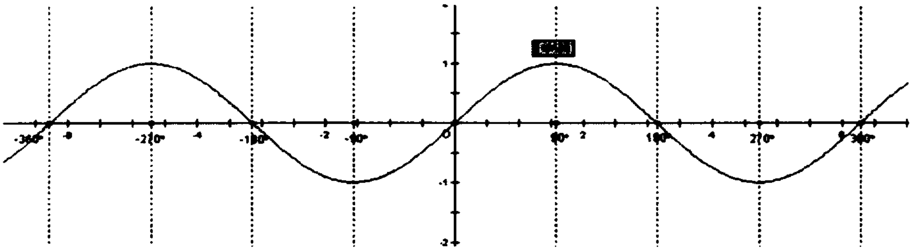
$y=\cos x$의 그래프를 제시한다.



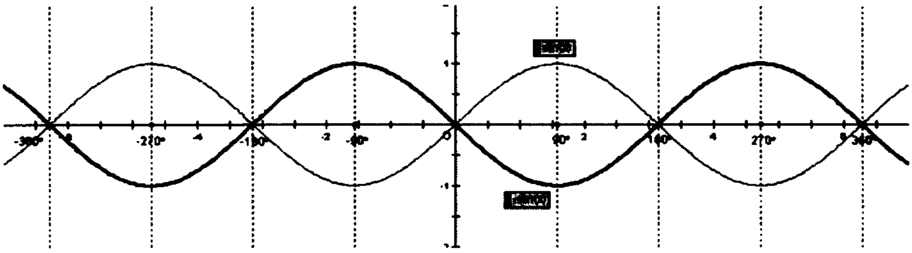
$y=\sin(90° + x)$의 그래프는 $y=\sin(x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 90°만큼 평행

이동하면 $y=\cos(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.
따라서 $\sin(90° + x) = \cos(x)$.

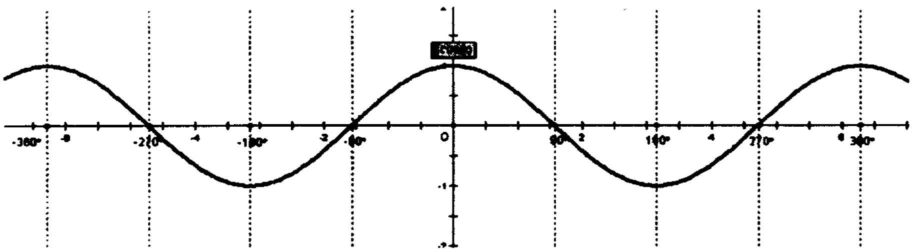
(5) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$



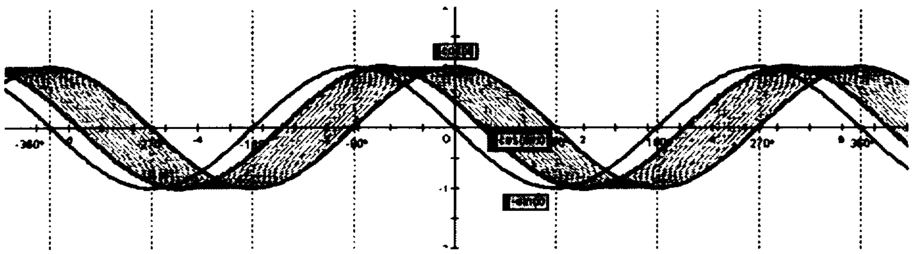
$y=\sin x$의 그래프를 먼저 재시한다.



$y=\sin(-x)$의 그래프는 $y=\sin x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



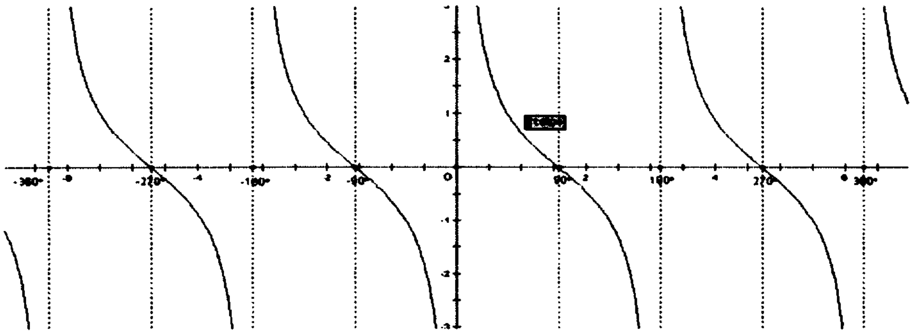
$y=\cos x$의 그래프를 제시한다.



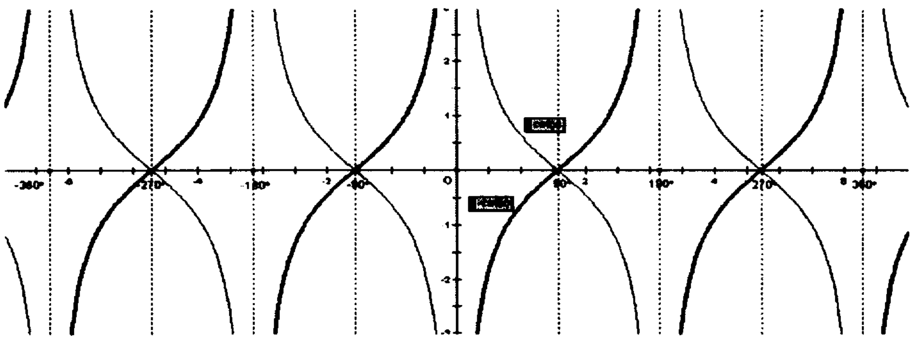
$y = \cos(90° + x)$의 그래프는 $y = \cos(x)$ 그래프를 $x$축에 음의 방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y = -\sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(90° + x) = -\sin(x)$.

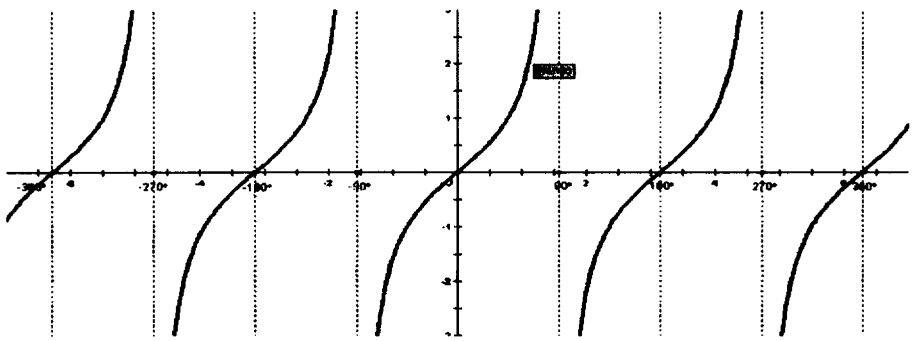
(6) $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$



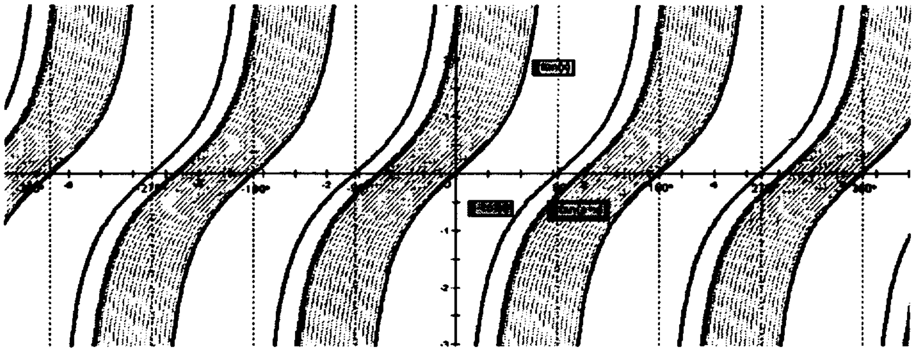
$y = \cot x$의 그래프를 제시한다.



$y = -\cot(x)$의 그래프는 $y = \cot x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



$y = \tan x$의 그래프를 제시한다.



$y=\tan(90°+x)$의 그래프는 $y=\tan(x)$ 그래프를 $x$축에 음의 방향으로 90°만큼 평행이동하면 $y=-\cot(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(90°+x)=-\cot(x)$.

7차 교육과정 '10-가'에서는 코탄젠트 그래프가 제시되어 있지 않고 있다.

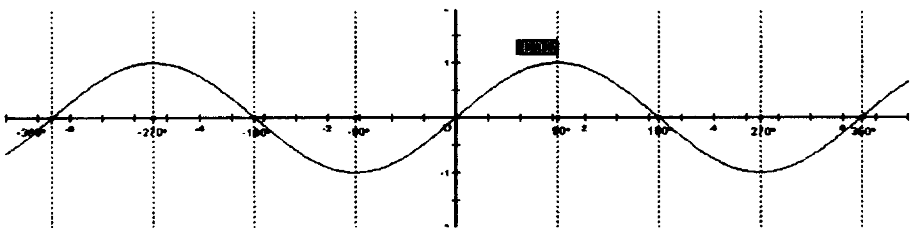
따라서,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\cot x$$

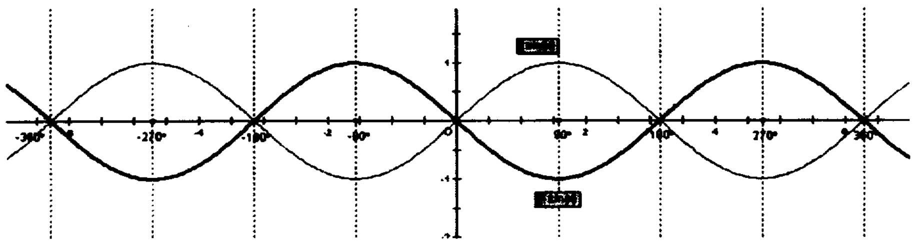
로 설명이 가능하다.

## 5) $\pi\pm\theta$의 삼각함수

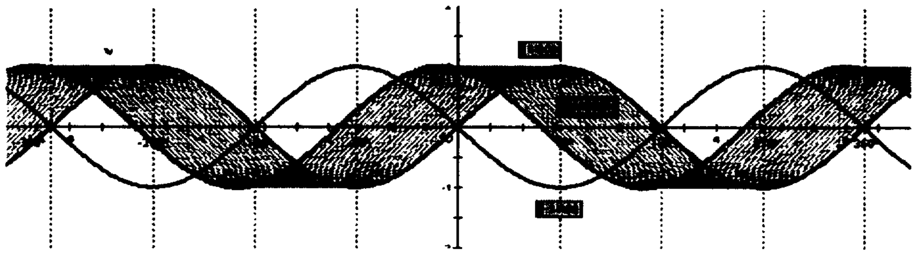
(1) $\sin(\pi+x)=-\sin x$



$y=\sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



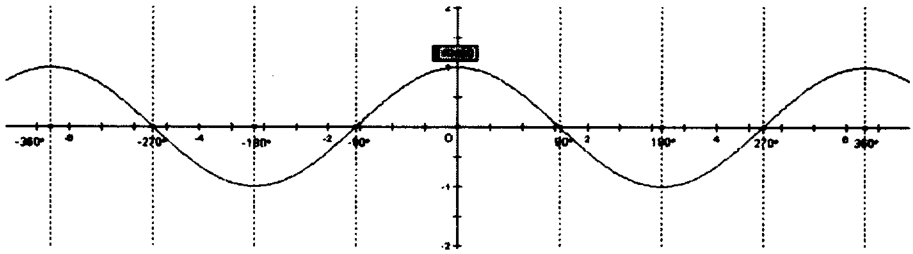
$y=-\sin(x)$의 그래프는 $y=\sin x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



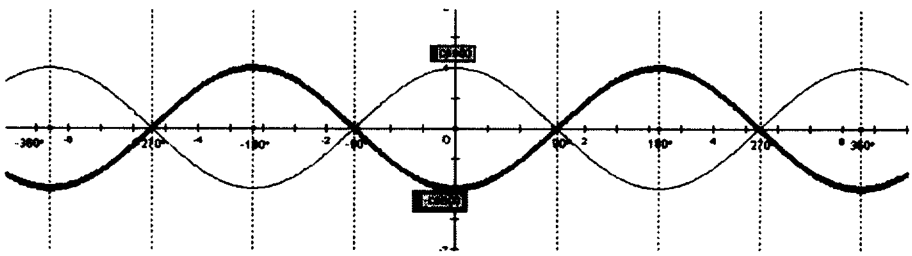
$y=\sin(180°+x)$의 그래프는 $y=\sin(x)$ 그래프를 $x$축에 음의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=-\sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(180°+x)= -\sin(x)$.

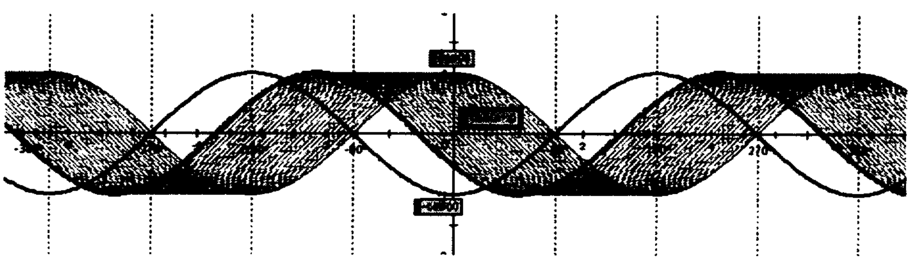
(2) $\cos(\pi+x) = -\cos x$



$y=\cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



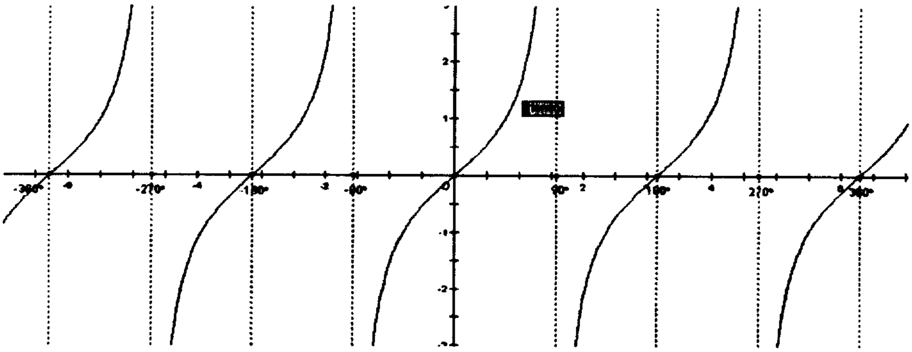
$y=-\cos(x)$의 그래프는 $y=\cos x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



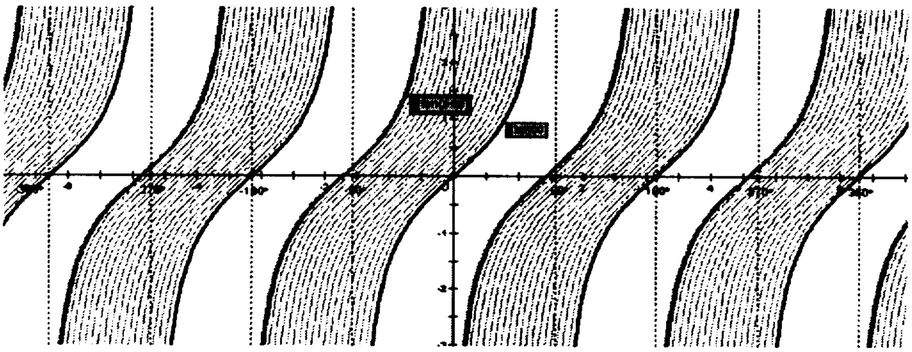
$y=\cos(180°+x)$의 그래프는 $y=\cos(x)$ 그래프를 $x$축에 음의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=-\cos(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(180°+x)=-\cos(x)$.

(3) $\tan(\pi+x)=\tan x$



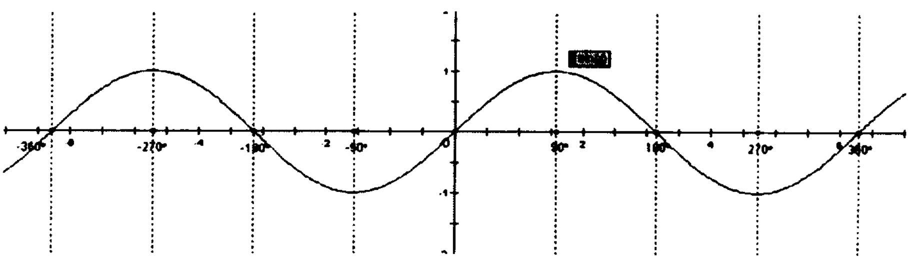
$y=\tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



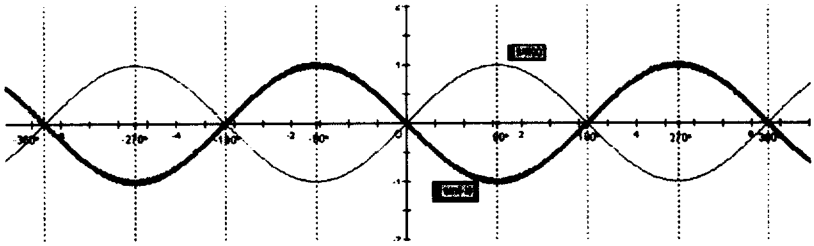
$y=\tan(180°+x)$의 그래프는 $y=\tan(x)$ 그래프를 $x$축에 음의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=\tan(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(180°+x)=\tan(x)$.

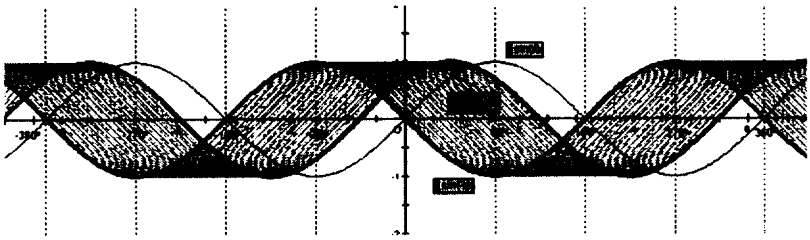
(4) $\sin(\pi-x)=\sin x$



$y=\sin x$의 그래프를 먼저 제시한다.



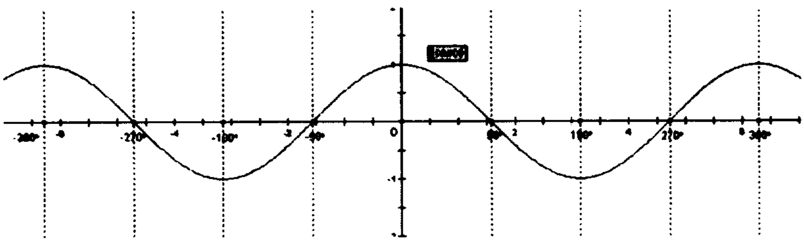
$y=\sin(-x)$의 그래프는 $y=\sin x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



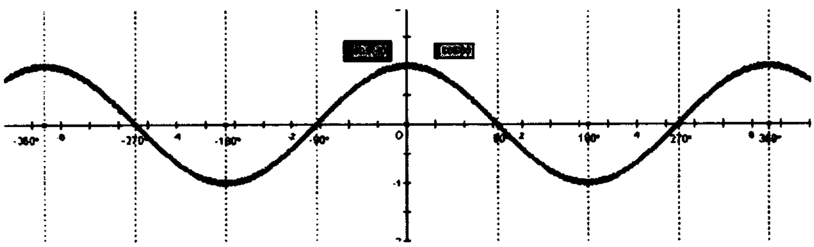
$y=\sin(180°-x)$의 그래프는 $y=\sin(-x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=\sin(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\sin(180°-x)= \sin(x)$.

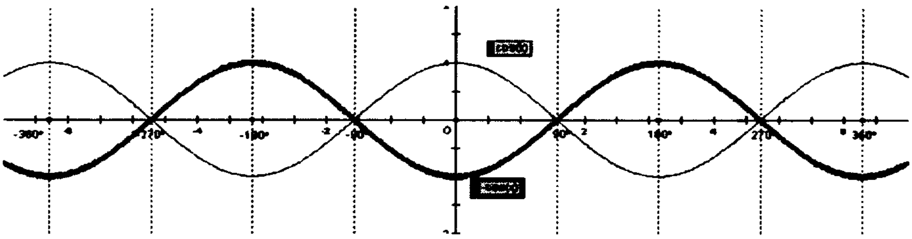
(5) $\cos(\pi-x) = -\cos x$



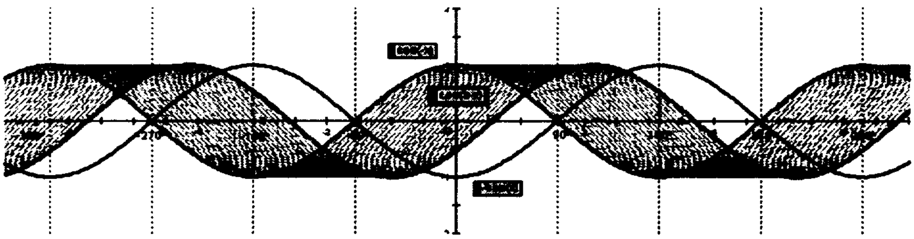
$y=\cos x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\cos(-x)$의 그래프는 $y=\cos x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



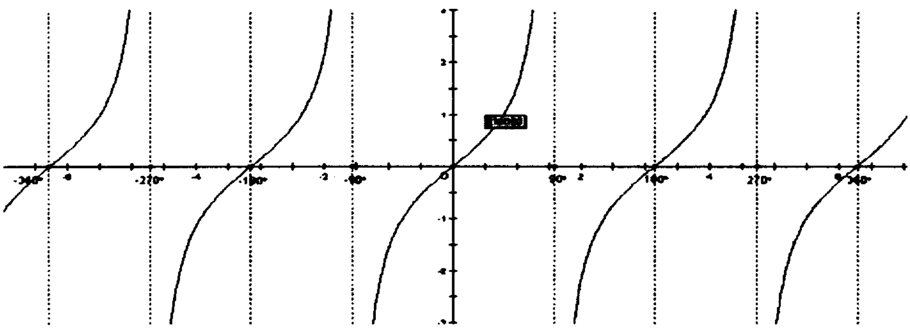
$y=-\cos(x)$의 그래프는 $y=\cos x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



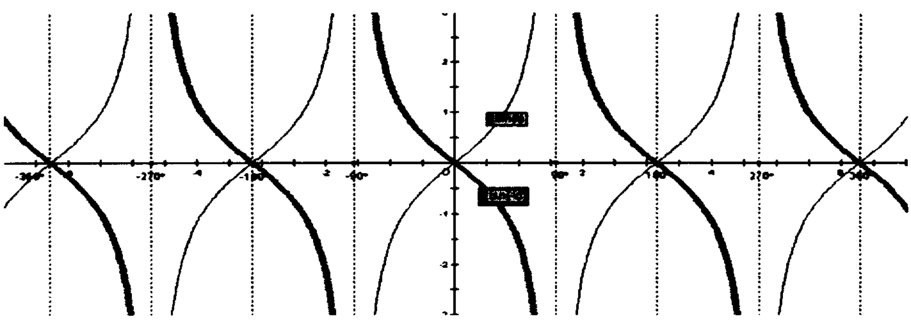
$y=-\cos(x)$의 그래프는 $y=\cos(-x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=-\cos(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\cos(180°-x)= -\cos(x)$.

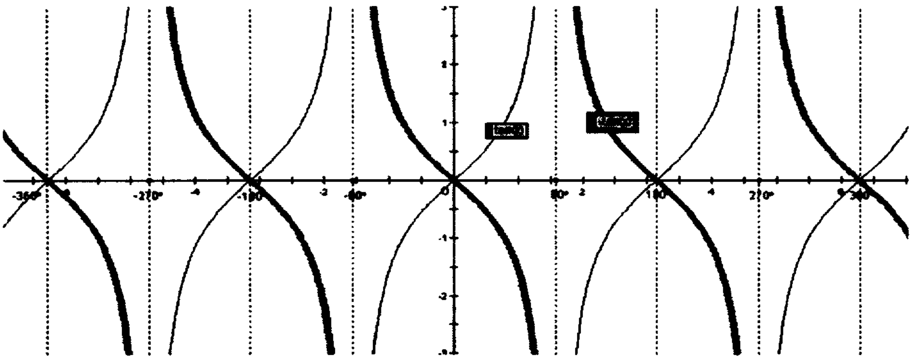
(6) $\tan(\pi-x) = -\tan x$



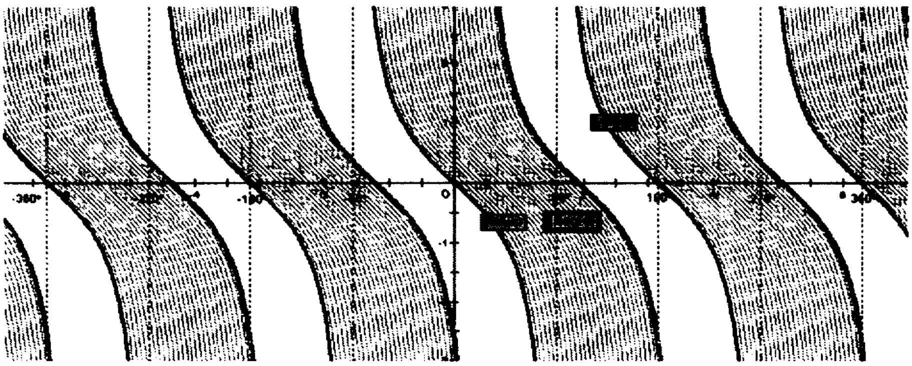
$y=\tan x$의 그래프를 먼저 제시한다.



$y=\tan(-x)$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



$y=-\tan(x)$의 그래프는 $y=\tan x$ 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 그래프다.



$y=-\tan(x)$의 그래프는 $y=\tan(-x)$ 그래프를 $x$축에 양의 방향으로 180°만큼 평행이동하면 $y=-\tan(x)$그래프와 일치함을 알 수 있다.

따라서 $\tan(180° - x) = -\tan(x)$.

# Ⅲ. 결론 및 제언

7차 교육과정 수학10-나 도형의 이동에서 배운 평행이동과 대칭이동을 통해 삼각함수의 성질을 그래프를 이용하여 시각화 하는데 중점을 두었다. 현재 컴퓨터를 활용한 수업이 많이 적용되고 있고 본 연구를 하면서 앞으로도 이러한 컴퓨터 활용이 현재까지의 이론 수업진행 방법에 보조하는 역할을 더욱더 많이 제공할 것이라고 본다.

그래프 그리기와 해석하기는 함수에 대한 기본적인 이해가 시작되는 곳으로 처음에는 질적 접근을 통해서 그림을 그려보는 것으로 시작하여 학생들에게 그래프가 어떤 상황을

얼마나 효율적으로 기술하는가를 알게 하는 기회를 제공한다. 그래서 기하소프트웨어인 GSP프로그램을 이용해 삼각함수에 대한 내용을 좀 더 잘 이해할 수 있도록 본 연구의 자료를 정리하였다.

7차 교육과정의 교과서의 다수는 '삼각함수의 성질' 뒤에 '삼각함수의 그래프'가 제시되는 순서로 전개되고 있다. 삼각함수의 그래프를 학습하지 않고 삼각함수의 성질을 먼저 접하게 되면 학생들은 삼각함수의 성질을 삼각함수의 중요한 공식으로 암기한다. 그러므로 '삼각함수의 그래프'를 학습한 후, 그래프를 통하여 '삼각함수의 성질'을 생각해 보도록 전개하는데 초점을 두고 본 연구를 정리하였다.

# 참 고 문 헌

[1] 임종호, "GSP를 활용한 함수지도에 관한 연구 : 삼각함수를 중심으로", 국민대 교육대학원 석사학위 논문, 2006.
[2] 남철원, "삼각함수에서 G.S.P 활용을 통한 자기주도적 학습능력 증진에 관한 연구", 울산대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2005.
[3] 이혜원, "그래프를 중심으로 한 함수개념 지도에 관한 연구 : 고등학교 삼각함수 단원을 중심으로", 경희대 교육대학원 석사학위 논문, 2004.
[4] 최상기 외3, "고등학교 수학 10-나", (주)고려출판사, 2002.
[5] 박두일 외8, "고등학교 수학 10-나", (주)교학사, 2002.
[6] 우정호 외3, "고등학교 수학 10-나", 대한교과서(주), 2002.
[7] 박세희 외3, "고등학교 수학 10-나", 동아서적(주), 2003.
[8] 이방수 외1, "고등학교 수학 10-나", (주)천재교육, 2002.
[9] 김수환 외6, "고등학교 수학 10-나", (주) 지학사, 2002.
[10] 박윤범 외5, "고등학교 수학 10-나", 대학교과서(주), 2002.
[11] 김향숙 외8, "GSP를 이용한 기하의 이해", 경문사, 2006.