科學教育
Journal of Science Education 16, 155-174, 1999

피보나치수열과 황금비에 관한 연구

오 시 봉* · 양 영 오**

A Study on Fibonacci Sequence and Golden Ratio

Si Bong Oh, Young oh Yang

Abstract

Fibonacci sequence, one of the simplest and most significant problems in Middle age, is not handled much in the current high school mathematics curriculum. But it appears in only some of the high school text books partially.

In this paper we demonstrate and prove the characteristics and properties of Fibonacci sequence, define the concepts of golden section and golden ratio, and find out examples of golden ratio and Fibonacci sequence in our nature and daily life. Hence this paper has a meaning in providing the guideline and teaching-learning materials for the teachers and researchers who study Fibonacci sequence systematically and constantly.

Ⅰ. 서 론

수학에서는 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 문제가 가장 좋은 문제이며 수학의 아름다움을 추구하는 대상이 된다. 중세의 수학에서 일상생활의 간단한 문제 중의 하나인 토끼번식 문제에서 파생된 피보나치 수열이 그 대표적인 예이다. 그럼에도 불구하고 현재 우리나라에는 피보나치 수열과 관련된 연구자료가 그리 많지 않다. 또한 고등학교 수학 교과서에서 사고력과 문제 해결 능력을 신장시키기 위하여 피보나치 수열이 연구과제 또는 수학산책 난에 단편적으로 소개되고 있는 실정이다.

피보나치수열의 개념은 1202년에 간행된 피보나치(Leonardo Fibonacci)의 유명한 저서〈산반서(算盤書, Liber abaci)〉의 문제에서 파생된 것인데, '피보나치 수열'이란 용어는 19세기 프랑스 수학자 에두아르뤼카가 처음으로 사용했다. 〈산반서〉에 제시된 피보나치수열의 문제는 다음과 같다.

"새로 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 태어나서 1개월만 지나면 성

---

* 제주탐라교육원 교사
** 제주대학교 자연과학대학 수학과 교수

장해서 어미가 되고, 그후 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다. 이 새끼도 2개월이 되면 마찬가지로 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다고 가정한다(단, 질병 등으로 절대 죽는 일은 없다고 가정하자.). 지금부터 일년 후 한 쌍의 토끼로부터 토끼는 몇 쌍이 되는가?"

위의 문제로부터 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, ……, x, y, x+y,……를 얻을 수 있다. 이 수열은 유럽에 알려진 최초의 점화수열로서 각 항은 앞선 두 항들의 합이다.

이 논문에서는 피보나치 수열의 역사적 배경을 조사하고, 피보나치 수열의 성질들을 체계적으로 정리·증명하고, 이 수열이 자연현상(꽃잎·가지·줄기의 배열, 솔방울, 꽃씨, 수벌의 혈통 등)이나 건축, 예술, 음악, 증권시장 등의 분야에서 어떻게 나타나고 응용되고 있는가를 체계적이고 종합적으로 조사하고자 한다. 아울러 이 수열의 일련의 연속적인 항으로 이루어진 비는 황금비의 값을 중심으로 진동하고 이 황금비가 문화예술분야에서 어떻게 나타나고 응용되고 있는가를 조사하고자 한다.

II. 피보나치의 생애와 업적

1. 피보나치의 생애와 업적

피보나치(Leonardo Pisano 본명은 Leonardo Fibonacci, 1170 피사(?)~1240이후)는 피사 상인인 아버지 굴리엘모의 아들로 피사의 상업 중심지에서 태어났다. 그의 아버지는 그곳에서 상업과 관련된 일에 종사하고 있었다. 그 당시의 이탈리아의 큰 상인들은 지중해 연안의 여러 곳에 무역상을 두고 있었다. 소년 시절, 레오나드로는 그의 아버지가 관세 지배인(상인사회의 영사, 즉 주임 행정관으로 임명됨)으로 근무했던, 아프리카의 북부 연안에 위치한 보우기(Bougie, 지금의 알제리아 베자이아)에서 교육을 받았고 함께 생활하게 되었다. 아버지의 직업 영향을 받은 레오나드로는 소년 시절부터 산술에 흥미를 느끼기 시작했다. 그 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등으로 여행을 하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하게 되었다. 인도—아라비아의 계산술의 실용적 우수성을 확신하게 된 피보나치는 1202년에 고향으로 돌아와서 마침내 그의 유명한 저서〈산반서(Liber abaci)〉를 출간하였다. 그는 이 저서외에도 다른 책들을 썼다. 특히 1220년에 출간된 피보나치의〈실용기하학(Practica geometriae)〉은 유클리드적 엄밀함과 약간의 독창성을 가지고 능숙하게 기하학과 삼각법을 다룬 방대한 자료집이다. 1225년경에는〈제곱근서(Liber quadratorum)〉가 나왔다. 부정해석학에 대한 매우 독창적인 이론을 제시하고 있는 저서로서, 피보나치로 하여금 이 분야에서 디오판투스와 페르마 사이의 가장 뛰어난 수학자로 명성을 떨치게 됐다. 그의 저서들은 모두 당대 학자들의 능력을 훨씬 뛰어넘는 작품이었다.

피보나치의 수학적 재능은 학문의 후원자였던 시칠리아 노르망디 왕국의 황제 프레더릭 2세(Frederick II)의 관심을 끌게 되었는데, 피보나치는 궁정에서 열린 어떤 수학 경시에 참여할 것을 초청 받았다. 황제의 수행원 중 한 사람인 팔레르모 존(Palermo John)에 의해서 세 가지 문제가 출제되었다. 피보나치는 그 세 문제를 모두 풀었는데, 그것은 그로 하여금 상당한 존경을 얻도록 만들었다. 첫 번째 문제는 x^2+5, x^2-5가 모두 유리수의 제곱이 되는 유리수 x를 구하는 것이었다. 피보나치는 $x=\frac{41}{12}$

로 썼는데 이는, $(\frac{41}{12})^2+5=(\frac{49}{12})^2$, $(\frac{41}{12})^2-5=(\frac{31}{12})^2$ 이므로 정확한 답이었고 이 해는 〈제곱근서〉에 나온다. 두 번째 문제는 3차 방정식 $x^3+2x^2+10x=20$(현대 대수 표기법으로 바꾼 표현)의 답을 구하는 것이었다. 피보나치는 이 방정식의 해가 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 형태의 무리수에 의하여 표현될 수 없음을 증명하고자 했는데, 이는 곧 그것의 어떤 해도 자와 컴퍼스를 가지고 작도될 수 없음을 보이고자 한 것이었다. 그런 다음 그는 근사해법인 시행착오법을 사용해서 풀었다. 그의 해 $1°22'7''42'''33^{IV}4^{V}40^{VI}$은 60진법 분수(60을 밑으로 하는 바빌로니아 수체계를 사용한 분수)로 1+22/60+7/3,600+42/216,000+⋯인데, 근대 십진수(1.3688081075)로 바꿀 때 소수점 이하 9번째까지 정확한 값이다. 이 문제들에 대한 그의 해는 창의력과 정확성의 결합으로 이루어진 것이었다. 이 답은 피보나치의〈꽃, Flos〉이라는 이름이 붙은 책에 나오는데 거기에는 어떤 부수적인 논의도 없이 그냥 답만 나와서 다소의 의문을 불러 일으켰다.

레오나르도는 몇 년 동안 황제 및 그의 학자들과 문제를 교환하면서 서신왕래를 했으며, 황제에게 〈제곱근서〉(1225년)를 헌정했다. 또한 1228년에 그는 〈산반서〉를 수정하여 황제의 수석학자 미하엘 스코트에게 헌정했다. 그날 이후 1240년까지 그에 대해 알려진 것은 전혀 없다. 피사시는 시에 대한 봉사의 대가로 수당과 함께 연금으로 20피사 파운드를 수여했다. 레오나르도의 사망한 해도 전혀 알려지지 않았다. 힌두 아라비아 숫자의 사용을 확산시킨 역할을 제외하면 그가 수학에 미친 공헌은 대체로 잊혀져왔다. 그의 이름은〈산반서〉의 문제에서 파생된 피보나치 수열 때문에 근대 수학자들에게 알려졌다.

2. 저서〈산반서〉와 피보나치 수열

〈산반서〉는 1228년에 재판이 나왔는데, 이 책은 우리에게도 잘 알려진 책으로 산술과 초등대수에 관하여 쓴 것이다. 비록 독립적인 연구이긴 하지만 알·화리즈미와 아부·카밀(Abu Kamil)의 대수로부터 많은 영향을 받았음을 보여주고 있다. 이 책은 인도·아라비아숫자를 유럽으로 소개하는 데 큰 역할을 하였다. 15장으로 된 이 책은 새로운 숫자를 읽고 쓰는 방법, 정수와 분수를 계산하는 방법, 제곱근과 세제곱근을 구하는 방법, 임시위치법과 대수적 과정에 의한 1차 및 2차 방정식의 해법 등을 설명하고 있다. 그러나 방정식의 음근과 허근이 인정되지 않았고 그의 대수는 수사적이었다. 대부분의 응용이 교역, 합자경영, 혼합법, 측량기하 등에 관한 것으로 이 책에는 많은 문제가 실려 있는데 이것은 수세기 동안 그 이후의 저술가들에게 수학 문제의 보고(寶庫)가 되었다. 이 책에 실려 있는 문제 중에는 그보다 훨씬 이전, 린드 파피루스에 나온 문제를 변형시킨 듯한 것도 있다. 다음은 〈산반서〉에 나오는 토끼번식의 문제이다.

"새로 태어난 한 쌍의 토끼(하나는 수컷이고, 하나는 암컷)가 들판에 있다고 하자. 토끼들은 한 달이면 짝을 지을 수 있어서 두 번째 달 말에는 암컷이 다른 한 쌍의 토끼(하나는 수컷이고, 하나는 암컷)를 낳을 수 있다. 그리고 두 번째 달부터는 암컷은 항상 새로운 한 쌍의 토끼(하나는 수컷이고, 하나는 암컷)를 계속해서 매달 낳는다고 가정할 때, 일 년이 되면 한 쌍의 토끼로부터 몇 쌍의 토끼가 생기겠는가?(단, 질병

등으로 절대 죽는 일은 없다고 가정하자.)" 이 문제로부터 피보나치 수열

1, 1, 2, 3, 5, 8, ···, x, y, x+y, ···

을 얻을 수 있고 이 수열은 유럽에 알려진 최초의 점화수열로서 각 항은 앞선 두 항들의 합이다.

1년 후에는 얼마나 많은 쌍의 토끼가 있을 것인가?

① 첫 번째 달 말에는 토끼는 짝을 짓는다. 하지만 여전히 한 쌍의 토끼만이 있다.

② 두 번째 달 말에는 암컷이 새로운 한 쌍을 낳는다. 그래서 들판에는 두 쌍의 토끼가 있다.

③ 세 번째 달 말에는 처음의 암컷이 두 번째 쌍의 토끼를 낳아서 들판에는 모두 세 쌍의 토끼가 있게 된다.

④ 네 번째 달 말에는 처음의 암컷이 또 다른 쌍의 토끼를 낳고, 두 달 전에 태어난 암컷이 처음으로 한 쌍의 토끼를 낳게 된다. 그래서 모두 다섯 쌍의 토끼가 들판에 있다.

들판에 있는 토끼 쌍의 수는 매달 초에 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ···이 된다. 이 수열이 어떻게 형성되었는지, 그리고 어떻게 계속될지 알 수 있는가? 이 토끼의 문제는 현실적인가? 이 문제에서는 오누이가 짝을 짓고 있다. 유전학적으로 문제를 일으킬지도 모른다. 각 쌍의 암컷은 어떤 수컷과도 짝을 지울 수 있고 자식을 낳을 수 있다고 가정함으로써 이 문제를 피해갈 수 있다. 실제와는 다른 또 하나의 문제는 정확히 두 마리씩, 하나는 수컷, 하나는 암컷을 낳는다는 점이다. 다음의 표는 월별 토끼집단의 성장 표이다.

[표 1] 토끼 집단의 성장표

달	성인토끼(쌍)	어린 토끼(쌍)	전체 쌍의 수
1월		1	1
2월	1		1
3월	1	1	2
4월	2	1	3
5월	3	2	5
6월	5	3	8
7월	8	5	13
8월	13	8	21
9월	21	13	34
10월	34	21	55
11월	55	34	89
12월	89	55	144

III. 피보나치 수열의 특성

1. 피보나치 수열의 주요 성질

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …를 살펴보자. 항의 형성 규칙을 보면 임의의 항은 앞의 두 개의 항의 합과 같다. 이 수열의 항들을 u_1, u_2, u_3, u_4, …으로 나타내면 세 연속되는 피보나치 수들은 다음과 같은 관계가 있다.

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\ (n \ge 3)$$

우리는 피보나치 수열의 일반항을 유도하고, 중요하고 재미있는 결과들을 아래에서 제시하고자 한다.

$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ 꼴의 점화식에서 일반항을 다음과 같이 유도한다.

[경우 1] $p+q=1$, $pq \neq 0$일 때, 점화식은 $a_{n+2} - a_{n+1} = -q(a_{n+1} + a_n)$로 변형되므로 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째항 $a_2 - a_1$, 공비 $-q$인 등비수열이다. 따라서 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 - a_1)(-q)^{k-1}$$

[경우 2] $p+q \neq 1$, $pq \neq 0$일 때 이 점화식이

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

로 변형되었다고 하면 수열 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$과 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$은 각각 첫째 항 $a_2 - \alpha a_1$, 공비 β 및 첫째 항 $a_2 - \beta a_1$, 공비 α인 등비수열이므로

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$
$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

변변 빼면 $(\alpha - \beta)a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$이다. 따라서 $\beta \neq \alpha$일 때 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\{(a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} - (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}\} \cdots (*)$$

여기서 α, β (단, $\alpha > \beta$)는 방정식 $x^2 = px + q$의 근이다. 이 방정식을 주어진 점화식의 특성방정식이라 한다.

$p=1$, $q=1$일 때, 위의 점화식 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$은 피보나치 점화식이 된다.

또한, α, β (단, $\alpha > \beta$)는 방정식 $x^2 = x + 1$의 근이므로

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

이다. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$이므로 $(*)$에 의하여 피보나치 수열의 일반항은 다음과 같이 주어진다.

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

성질 1. (피보나치의 수열의 일반항, Binet의 공식)

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\ \text{단},\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

성질 2. $u_{n+1} = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \cdots$

증명. 주어진 등식은 명백히 $n = 1, 2$에 대하여 성립한다. $n = k-1$과 $n = k$에 대하여 주어진 등식이 성립한다고 가정한다면

$$u_{k+1} = {}_kC_0 + {}_{k-1}C_1 + {}_{k-2}C_2 + \cdots,$$
$$u_k = {}_{k-1}C_0 + {}_{k-2}C_1 + {}_{k-3}C_2 + \cdots$$

두 개의 방정식을 더하면 다음을 얻을 수 있다.

$$u_{k+1} + u_k = {}_kC_0 + ({}_{k-1}C_0 + {}_{k-1}C_1) + ({}_{k-2}C_1 + {}_{k-2}C_2) + \cdots\cdots$$

$${}_kC_0 = {}_{k+1}C_0,\quad {}_{k-1}C_0 + {}_{k-1}C_1 = {}_kC_1$$

이므로 위의 식은

$$u_{k+2} = {}_{k+1}C_0 + {}_kC_1 + {}_{k-1}C_2 + \cdots.$$

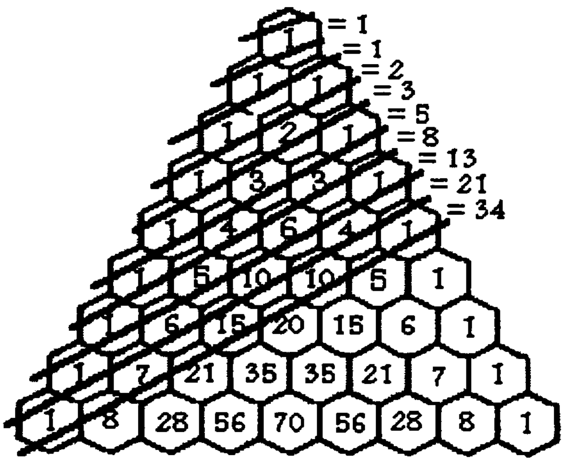
즉, 주어진 등식은 $n = k+1$에 대하여 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진

등식은 자연수 n에 대하여 성립한다.

파스칼의 삼각형에서 피보나치 수를 찾을 수 있겠는가? 해답은 성질 2에 의하여 다음의 공식을 얻는다.

$$u_n = Fib(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}$$

여기서 기호 ( )는 파스칼의 삼각형에 나타나는 n−k−1 번째 행, k번째 열의 수이다. 다음의 그림을 참조하라.



[그림 1] 파스칼의 삼각형

성질 3. $(u_n, u_{n+1})=1$ 즉, 연속하는 피보나치 수 u_n과 u_{n+1}은 서로 소이다.

증명. d가 u_n과 u_{n+1}를 나누는 1보다 큰 자연수라 하자. 이때 $u_{n-1}(=u_{n+1}-u_n)$도 d로 나누어 진다. 이 사실과 $u_n - u_{n-1} = u_{n-2}$로부터 u_{n-2}도 d로 나누어진다. 이런 과정을 계속하여 반복하면 $d \mid u_{n-3}, d \mid u_{n-4} \cdots$이고 결국 d는 u_1도 나눈다. 그러나 $u_1=1$이므로 이것은 어떠한 자연수 $d>1$로 나눌 수 없다. 이는 모순이 되므로 $d=1$이다. 따라서 (u_n, u_{n+1})이다. □

gcd(u_{n+2}, u_{n+1})를 구하기 위하여 유클리드 알고리즘을 적용한다.

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 1 \cdot u_{n+1} + u_n, \\ u_{n+1} &= 1 \cdot u_n + u_{n-1}, \\ &\vdots \\ u_4 &= 1 \cdot u_3 + u_2, \\ u_3 &= 2 \cdot u_2 + 0 \end{aligned}$$

분명히 나누는 횟수는 정확히 n이다. 따라서 유클리드 알고리즘에 의하여 gcd$(u_{n+2}, u_{n+1}) = u_2 = 1$이다. 이는 연속하는 피보나치 수들은 서로 소임을 의미한다.

성질 4. $u_{m+n} = u_{m-1}u_n + u_m u_{n+1}$

증명. m을 고정하여 우리는 n에 대하여 수학적 귀납법을 적용하고자 한다. n=1일 때 $u_1 = u_2 = 1$이므로

좌변 $= u_{m+1} = u_{m-1} + u_m = u_{m-1} + u_m u_2 =$ 우변

따라서 n=1일 때 주어진 등식은 성립한다.

$n=1,2,\cdots,k$에 대하여 주어진 등식이 성립한다고 가정하자. 그러면

$u_{m+k} = u_{m-1}u_k + u_m u_{k+1}$, $u_{m+(k-1)} = u_{m-1}u_{k-1} + u_m u_k$

위의 식에서 각 변끼리 서로 더하면

$(u_{m+(k+1)}=)\ u_{m+k} + u_{m+(k-1)} = u_{m-1}(u_k + u_{k-1}) + u_m(u_{k+1} + u_k) = u_{m-1}u_{k+1} + u_m u_{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식은 성립하므로 n에 관한 귀납법에 의하여 주어진 등식은 성립한다. □

성질 5. $m, n \geq 1$에 대하여 u_{mn}은 u_m에 의하여 나누어진다.

증명. 우리는 n에 대하여 귀납법을 적용시킬 것이다. $n=1$일 때 $u_m \mid u_{m\cdot 1}$이므로 주어진 등식

은 성립한다. $n=1,2,\cdots,k$에 대하여 $u_m \mid u_{mk}$가 성립한다고 가정하자. 그때 성질 4에 의하여

$$u_{m(k+1)}=u_{mk+m}=u_{mk-1}u_m+u_{mk}u_{m+1}$$

한편 $u_m \mid u_{mk-1}u_m$ 이고 $u_m \mid u_{mk}u_{m+1}$이므로 $u_m \mid u_{m(k+1)}$이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 n에 대하여 성립한다. □

$2=u_3$이므로 위의 성질로부터 피보나치수들은 $u_3, u_6, u_9,\cdots, u_{3k}$이다. 다시 말하면, 피보나치 수는 세 번에 한 번씩 2의 배수가 된다. 마찬가지로 피보나치 수는 네 번에 한번씩 3의 배수, 다섯 번에 한 번씩 $u_5=5$의 배수, 여섯 번에 한 번씩 $u_6=8$의 배수가 된다. 따라서 위의 성질로부터 피보나치 수는 k번에 한 번씩 u_k의 배수가 된다.

성질 6. 만약 $m=qn+r$이면 $\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_r, u_n)$

증명. 성질 4에 의하여 $u_m=u_{qn+r}=u_{qn-1}u_r+u_{qn}u_{r+1}$ 이다.

$$\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_{qn-1}u_r+u_{qn}u_{r+1}, u_n)=\gcd(u_{qn-1}u_r, u_n)$$

이제 $\gcd(u_{qn-1}, u_n)=1$임을 보이기 위하여 $d=\gcd(u_{qn-1}, u_n)$이라 하자. 그러면 $d \mid u_n$이고, $d \mid u_{qn-1}$이다. 또한 성질 5에 의하여 $d \mid u_{qn}$이다. 따라서 d는 연속하는 항 u_{qn-1}과 u_{qn}의 공약수이다. 연속하는 피보나치 수는 서로 소이므로 $d=1$이다. $\gcd(a,c)=1$일 때마다 $\gcd(a, bc)=\gcd(a,b)$ 이다. 따라서 이를 이용하여 $\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_r, u_n)$이 성립한다. □

피보나치 수열의 놀랄만한 특징 중 하나는 두 피보나치 수들의 최대공약수는 또한 피보나치 수가 된다는 것이다.

성질 7. 두 피보나치 수들의 최대공약수는 또한 피보나치 수이다.

$$\gcd(u_m, u_n)=u_d \quad 단,\ d=\gcd(m, n)$$

증명. $m\geq n$이라고 가정하자. m과 n에 유클리드의 알고리즘을 적용하면

$$\begin{aligned}
m &= q_1 n + r_1 & 0 < r_1 < n \\
n &= q_2 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

u_m과 u_n의 최대공약수(GCD)를 구해 보면

$$\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_{r_1}, u_n)=\gcd(u_{r_1}, u_{r_2})=\cdots=\gcd(u_{r_{n-1}}, u_{r_n})$$

한편 $r_n \mid r_{n-1}$이므로 성질 5에 의하여 $u_{r_n} \mid u_{r_{n-1}}$이다. 따라서 $\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_{r_{n-1}}, u_{r_n})=u_{r_n}=u_{\gcd(m,n)}$. □

성질 8. $m\geq 2$에 대하여 $u_m \mid u_n$이 되기 위한 필요충분조건은 $m \mid n$이다.

증명. $m \mid n$이라 하자. 그러면 성질 5에 의하여 $u_m \mid u_n$이다.

역으로, $u_m \mid u_n$ 즉, u_n이 u_m으로 나누어진다면, $\gcd(u_m, u_n)=u_m$이 된다.

이제 $n=qm+r$이라 놓자(단, $0\leq r<m$). 그때 $\gcd(u_m, u_n)=\gcd(u_m, u_{qm+r})=\gcd(u_m, u_r)=u_m$ 따라서 $r=0$이고 $m \mid n$이다. □

각 직사각형은 이전의 정사각형들로 만들어져 직사각형을 만드는 조각그림 맞추기 놀이이다. 모든 정사각형과 직사각형들은 길이가 피보나치 수인 변을 갖는다. 이런 정사각형과 직사각형들의 형태에서 보여지는 수학적인 관계는 무엇인

가? 직사각형의 넓이는 이를 구성하는 모든 정사각형의 넓이들의 총합으로 표현할 수 있다. 그림에서 보듯이

$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2=13\times21$

또한 작은 직사각형들의 면적도

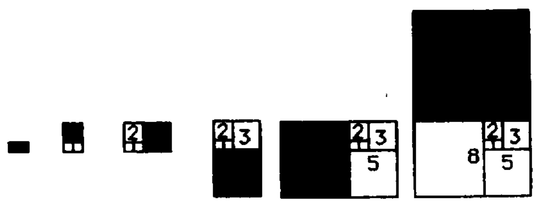
$1^2+1^2=1\times2$

$1^2+1^2+2^2=2\times3$

$1^2+1^2+2^2+3^2=3\times5$

$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\times8$

$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times13$



[그림 2] 직사각형의 면적

이 그림은 실제로, 피보나치 수의 제곱을 얼마만큼이든지 더할 때에도 성립한다는 사실이 납득할만한 증명이다. 그것은 항상 제곱의 합에 쓰여진 가장 큰 피보나치 수에 다음 피보나치 수를 곱한 값이다. 이 관계를 수학적인 언어로 표현하면 다음의 성질을 얻을 수 있다.

성질 9. $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=u_nu_{n+1}$

증명. $n=1$일 때 좌변$=u_1^2=1=1\times1=u_1u_2=$우변 따라서 $n=1$일 때 주어진 등식은 성립한다. 이제 n≥2라고 가정하자.

한편, $u_n^2=u_n(u_{n+1}-u_{n-1})=u_nu_{n+1}-u_nu_{n-1}$이므로

$$u_2^2=u_2u_3-u_2u_1,$$
$$u_3^2=u_3u_4-u_3u_2,$$
$$\vdots$$
$$u_n^2=u_nu_{n+1}-u_nu_{n-1}$$

변끼리 더하면

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2$$
$$=1+(u_2u_3-u_2u_1)+(u_3u_4-u_3u_2)+\cdots+(u_nu_{n+1}-u_nu_{n-1})$$
$$=u_nu_{n+1}$$

성질 10. $\begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$, (단, $n\geq2$)

증명. 주어진 등식은 $n=2$일 때 성립한다. 사실,

$$\begin{bmatrix} u_3 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

다음에 $\begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ 이라고 가정하면,

$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ 이므로

$$\begin{bmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{n+1}+u_n & u_n+u_{n-1} \\ u_{n+1} & u_n \end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1}$$

따라서 주어진 등식은 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n\geq2$에 대하여 성립한다. □

성질 11. $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\sqrt5-1}{2}$

증명. Binet의 공식(성질 1)에 의해서

$$u_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt5}\ \text{단},\ \alpha=\frac{1+\sqrt5}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt5}{2}$$

그때 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{1+\sqrt5}=\frac{\sqrt5-1}{2}$$

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

55, 89, 144, 233, …에서 이웃하는 항의 비로 구성되는 다음 수열 $\{\frac{u_{n+1}}{u_n}\}$의 극한은 어떻게 되는가?

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{5}{3}=1.6,\ \frac{8}{5}=1.6,\ \cdots$$

사실 항이 증가하면 그 결과는 1.61과 1.62 사이의 해당하는 수가 된다. 위의 성질에 의하여 위 수열의 극한값이 실제로 존재한다. 이 극한값을 α라 하자. 또한 $n \geq 1$이면

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n+u_{n-1}}{u_n}=1+\frac{u_{n-1}}{u_n}$$

이 된다. $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$로 두면 위 식은 $v_n=1+\frac{1}{v_{n-1}}$로 변형될 수 있다. n이 증가하면, 이 등식의 좌·우항은 점점 더 α와 $1+\frac{1}{\alpha}$에 각각 가까워지므로 등식 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$ 즉, $\alpha^2-\alpha-1=0$을 얻는다. $\alpha>0$ 이므로 α는 이차방정식의 양의 근이다. 따라서

$$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1.618\ \cdots$$

이것이 이른바 황금비라 한다.

2. 고등학교 교과내용과 피보나치 수열의 성질

고등학교 수학 I 교과서와 참고서를 중심으로 살펴본 바에 의하면, 수열과 순서도, 수학적 귀납법과 순서도, 수학적 귀납법과 점화식 단원 또는 수열과 순서도 단원의 수학 산책에서 간단하게 소개되고 있다. 특히, 다음과 같이 증명없이 서술적으로 제시되는 내용은 피보나치 수열의 정의와 간단한 특성, 피보나치 수열과 연분수, 피보나치 수열의 연속하는 항들의 극한값과 황금비, 컴퓨터 베이직 언어를 이용하여 피보나치 수열의 제31항 구하기 등이다.

① (피보나치 수열과 황금비) 피보나치 수열은 식물의 잎·가지·줄기의 배열, 동물의 생식 등에서 나타나는 재미있는 수열이다. 피보나치 수열의 일련의 연속적인 항으로 이루어진 비는 황금비의 값을 중심으로 진동하고 있고, 이 수열의 극한값은 바로 황금비(1.61803398…)이다.

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \cdots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \cdots$$

0, 1, 2, 1. 5, 1.6, 1.625, 1.6153, 1.619,…

황금비, 황금사각형, 등각나선이 나타나는 곳이면 어느 곳이나 피보나치 수열을 볼 수가 있다.

② (자연수를 1과 2의 합으로 표현) 모든 자연수는 다음과 같이 1과 2의 합으로 나타낼 수 있다. 이때, 나타내는 방법의 수는 피보나치 수열을 이룬다.

1: 1……………………………………………………(1가지)
2: 2,1+1 ……………………………………………(2가지)
3: 2+1, 1+2, 1+1+1 ………………… (3가지)
4: 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1
……………………………………………………(5가지)
5: 2+2+1, 2+1+2, 1+2+2, 2+1+1+1, 1+2+1+1, 1+1+2+1, 1+1+1+2, 1+1+1+1+1……(8가지)

③ (컴퓨터를 이용한 피보나치 수열의 항을 구하기)

[문제] 갓 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 있다. 이 토끼는 태어나서 1개월만 지나면 성장해서 어미가 되고, 그 후 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다. 이 새끼 토끼도 2개월이 되면 마찬가지로 매월 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다고 한다. 이와 같이 하면 30개월 후 토끼는 몇 쌍이 되는가? 이 토끼의 쌍의 수를 매월 계산하여 보면 다음과 같은 수열을 얻는다.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

이 수열을 피보나치 수열이라고 한다. 일반항을 a_n이라 할 때,

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$(n=1, 2,…), $a_1=1$, $a_2=1$인 관계를 만족하도록 되어 있다.

컴퓨터를 이용하여 피보나치 수열의 제31항을 구해 보자. 다음은 베이직 언어를 사용하여 만든 프로그램이다.

```
10 n=2          ←두 개의 항으로 시작한다.
20 a=1          ←첫째 항이 1
30 b=1          ←둘째 항이 1
40 n=n+2        ←2개의 항씩 계산하므로
50 a=a+b        ←앞의 두 항을 더한다(홀수
                  번째 항).
60 b=a+b        ←앞의 두 항을 더한다(짝수
                  번째 항).
70 IF n<32 GOTO 40  ← n<32이면 40으로
                  간다.
80 PRINT a      ← n=32이면 a를 인쇄(a는
                  31번째 항, b는 32번째 항)
RUN 1346269
```

④ 앵무조개(Nautilus)에서도 피보나치 수열을 찾아볼 수 있다. 또한, 우리의 주변에서 자주 접하게 되는 소용돌이 무늬에서 피보나치 수열의 이웃하는 두 항이 흔히 발견되기도 한다. 예를 들어, 솔방울에서는 소용돌이가 5, 8개 순 또는 8, 13개 순으로 배열된 경우가 많고, 해바라기 꽃의 소용돌이에도 34, 55개 순의 배열이 들어 있는 것으로 알려져 있다.

Ⅳ. 피보나치 수열과 황금비

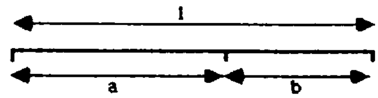
1. 황금직사각형과 황금비

황금직사각형은 가로와 세로의 비가 황금률인 직사각형이다. 다시 말하면, 황금직사각형의 세로가 2피트(ft)이면, 가로의 길이는 대략 2×(1.62)=3.24(ft)이다.

[그림 3]에서 전체의 길이가 1인 선분을 한 점에 의하여 두 부분으로 나눌 때, 긴 길이를 a, 짧은 길이를 b(=1−a)라 하고

(전체길이) : (긴 길이) = (긴 길이) : (짧은 길이)의 관계를 만족하는 분할을 황금분할이라 한다. 이때, (긴 길이) : (짧은 길이)를 황금비(golden ratio)라 한다. 여기서

$a^2=1-a$ 즉, $a^2+a-1=0$으로부터



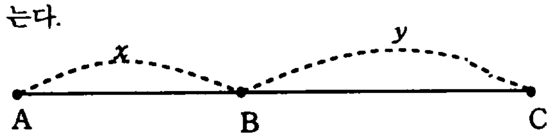
[그림 3] 황금분할

$a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$이고, a는 양의 값을 가지므로 음의 값을 버리면 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$(=0.618…)를 얻는다. 따라서 황금비는 $a:b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}:\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1:\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=1:0.618\cdots$

또는 짧은 길이: 긴 길이=b: a=1: 1.618…이다.

또한 황금비를 어떤 값 x의 역수 $\frac{1}{x}$과 x에서 1을 뺀 값 $x-1$이 같은 값이라 말하기도 한다. 즉, $\frac{1}{x}=x-1$로부터 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$를 구할 수 있다.

선분을 긋고 양 끝점을 A와 C로 표시하자. 짧은 선분 AB와 긴 선분 BC의 비가 긴 선분 BC와 전체 선분 AC의 비와 같도록 점 B를 찍는다.



이 선분의 두 부분의 길이의 비는 황금률이 된다. 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{AC}$$

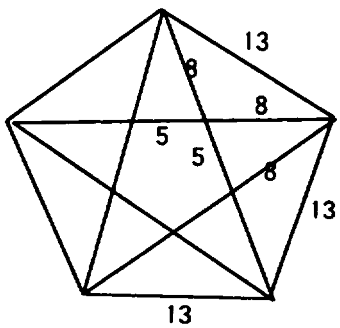
황금비는 $\frac{x}{y}=\frac{y}{x+y}$일 때, y와 x 사이의 비이다. 이 식은 위의 식과 같다는 것을 알 수 있다. 사실, AB 대신 x를, BC 대신 y를 대입한 것이다.

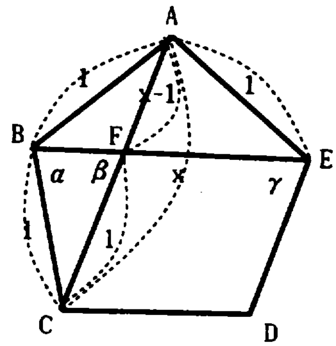
위의 식에서 x를 1이라 하자. 그러면, $\frac{1}{y}=\frac{y}{y+1}$이다. y에 관한 이 방정식을 풀면, 해는 위에서 주어진 값이다. 즉, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\fallingdotseq 1.62$이다.

2. 정오각형과 황금비

우주의 상징(symbol)으로 정12면체를 중요시한 피타고라스는 이 동형의 각 면이 모두 같은 크기의 정오각형으로 되어 있다는 사실에 주목했다. 그런데 정오각형의 각 변을 연장하면 소위 펜타그램(pentagram)이라는 별 모양의 5각형이 생기는데, 피타고라스는 그 아름다움에 어찌나 감동했던지 그것으로 자기 학교 아카데미의 표상으로 삼았을 정도였다.

오각형의 변의 길이의 비는 대개 이웃하는 두 피보나치 수의 비를 나타내며 변의 길이가 크면 클수록 이 법칙은 더 정확해 진다. 예를 들면, 정오각형의 한 변의 길이가 피보나치 수이면 대각선의 길이는 피보나치 수열에서 그 다음의 수이다. 또한 이러한 정오각형의 변과 대각선의 길이는 피보나치 수열의 이웃하는 두 수로 짝을 이룬다. 이러한 원리는 피보나치의 수 55, 89, 144로 보여준다.





[그림 4] 정오각형의 황금비

한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE에서 두 대각선이 만나는 점을 F라고 하자.

그러면 $\angle a=\angle\gamma$, $\angle BAC=\angle BCA=\angle ABE=\angle AEB=36^\circ$,

$\angle a=\angle\gamma=72^\circ$, $\angle ABF+\angle BAC=\angle BFC=72^\circ$,

$\angle\beta=\angle\gamma$ 이므로 $AC \parallel ED$ 이고 $\angle a=\angle\beta$ 즉, ΔBCF는 이등변삼각형이다. 따라서 $CB=CF=1$이다. 그런데 ΔABC와 ΔBFA는 각이 모두 같기 때문에 서로 닮은 이등변삼각형이다. 닮은 삼각형끼리 같은 각에 대한 변의 비는 같기 때문에

$$\frac{FA}{BC}=\frac{AB}{CA} \text{ 즉, } \frac{FA}{CF}=\frac{AB}{CA}$$

$FA=x-1$, $CF=AB=1$, $CA=x$를 위 식에 대입하면

$$\frac{x-1}{1}=\frac{1}{x} \text{ 즉, } x^2-x-1=0$$

여기서 x의 두 값 중에서 양수를 택하면 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이 된다. 이것은 한 변의 길이를 1이라고 할 때 정오각형의 대각선의 길이이다.

V. 피보나치 수열의 여러 현상

1. 꿀벌 가계도와 피보나치 수열

꿀벌 가계도는 피보나치 수들을 보여준다. 첫째로 꿀벌의 예에서는 다음과 같은 독특한 면이 있다.

① 꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다.

② 벌떼 중에는 여왕이라 불리는 특별한 암컷이 있다.

③ 암컷이기는 하지만 여왕벌과는 다른 많은 일벌들이 있다. 그들은 알은 낳지 못한다.

④ 일을 하지 않는 수펄들이 있다.
수펄들은 여왕의 수정되지 않은 알에서 태어난다. 그래서 수펄은 어미만 있고 아비는 없다.

⑤ 모든 암펄은 여왕이 수펄과 짝을 지었을 때 태어난다. 그래서 두 명의 부모를 갖는다. 암펄은 보통 일벌이 되나, 몇몇은 '로얄제리'라 불리는 특별한 물질로 키워져서 여왕벌로 자라게 된다. 그들은 집을 떠나 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다. 그러므로 암펄은 2명의 부모, 즉 수펄과 암펄 부모를 갖는 데 반하여, 수펄은 단지 한 명의 암펄 부모만을 갖는다.

여기서 우리는 부모가 그들의 자식들 위에 나타나는 가계도의 관습을 따르고, 그래서 가장 마지막의 세대는 제일 밑에 있게 된다. 위로 갈수록 더 나이 든 세대가 있다. 그런 가계도는 바닥에 있는 사람의 모든 조상을 보여준다. 한 사람의 모든 후손들을 나열하면 매우 다른 가계도를 얻을 수 있을 것이다. 우리가 토끼 문제에서 그렸던 것처럼 처음 쌍의 모든 후손들을 얻을 수 있다.

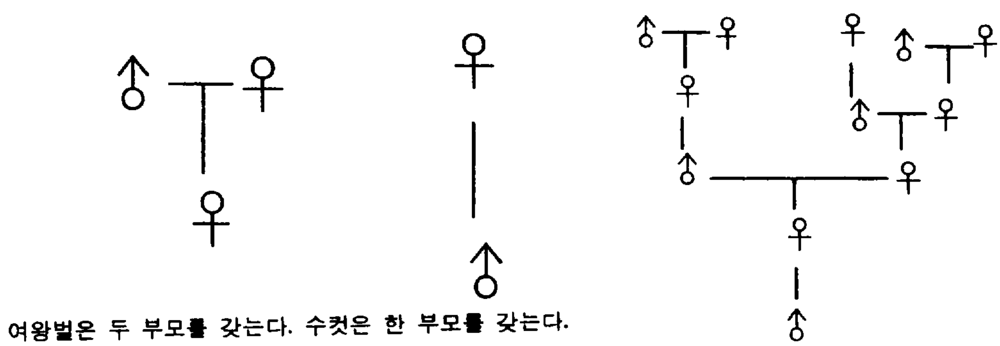
일하지 않는 수펄의 가계도를 살펴보자.

① 그는 1명의 암컷 부모를 갖는다.

② 그는 2명의 조부모를 갖는다. 왜냐하면 그의 어미는 2명의 부모, 암컷과 수컷 부모를 갖기 때문이다.

③ 그는 3명의 증조부모를 갖는다. 그의 할머니가 2명의 부모를 가져야 하고, 그의 할아버지는 1명의 부모만을 가져야 한다.

④ 그는 얼마나 많은 고조부모를 갖겠는가?



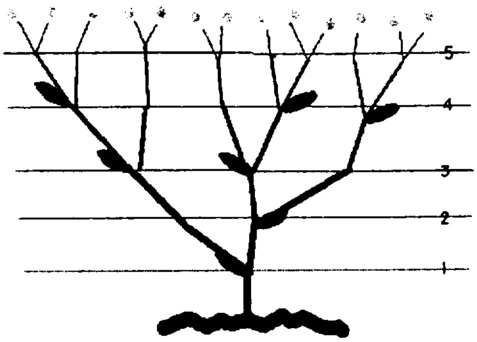
[그림 5] 꿀벌 가계도

2. 피보나치 수와 식물

(1) 식물의 가지

특별히 한 식물에서 생장점의 수는 피보나치 수가 된다. 식물이 새로운 가지를 뻗을 때 그 가지는 두 달을 자라야 분지를 지탱할 만큼 충분히 강해진다고 가정하자. 그 후로는 매달 생장점에서 가지를 뻗는다고 가정하면, 여기에서 보여지는 것과 같은 그림을 얻게 된다.

처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 난 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 것은 나뉘어지지 않고 있다. 하나가 가지를 나누면 다른 가지는 쉬는, 이러한 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치의 수를 이루고 있다. 이와 매우 비슷하게 자라는 식물이 'sneezewort'이다: Achillea ptarmica



[그림 6] 식물의 가지

(2) 꽃잎

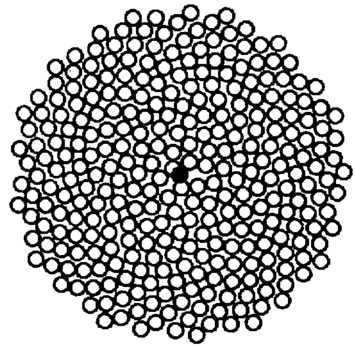
많은 꽃들은 그들의 싹이나 씨뿐만 아니라 꽃잎의 수에 있어서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개, 또는 5개의 솔잎으로 된 송이로 자라는 경향이 있다. 미나리아재비는 5개의 꽃잎이 있고, 백합과 붓꽃은 3개의 꽃잎을 갖는다. 참제비고깔은 꽃잎이 8개이다. 금잔화는 13개의 꽃잎을 가지며, 애스터는 꽃잎이 21개이다. 데이지는 13개, 21개 또는 34개, 55개 또는 89개의 꽃잎을 가지고 있는 것을 볼 수 있다.

몇 가지 종의 식물들, 예를 들어 미나리-아재비는 매우 정확한 꽃잎의 수를 갖는다. 그리고 다른 종들도 정확하지는 않지만 위에서 나열한 것과 매우 비슷한 수의 꽃잎을 갖고 있다.

(3) 꽃씨의 배열

꽃술에서 씨의 배열을 통하여서도 피보나치 수를 볼 수 있다. 여기에 큰 해바라기나 데이지를 확대할 때의 그림이 있다. 중심은 검은 점으로 표시되어 있다.

자연에 존재하는 실제의 씨앗에서도 같은 형태가 나타난다. 씨앗들은 모두 같은 크기이며, 중심에서 더 밀집해 있거나 가장자리에서 드물게 모이지 않는다. 그 이유는 씨앗들이 크기에 상관없이 균일하게 쌓이는 데 최적의 형태인 때문인 것으로 보인다.



[그림 7] 해바라기 꽃씨

해바라기는 독특한 방법으로 피보나치 수를 보여준다. 성숙한 해바라기 꽃의 중앙을 보면, 씨들의 다른 두 나선형을 분명히 볼 수 있다. [그림 7]은 일상적으로 볼 수 있는 해바라기 씨다. 하나는 시계 방향으로 89개의 나선형, 다른 하나는 시계 반대 방향으로 55개의 나선형을 형성하고 있다. 커다란 해바라기 꽃들은 55개와 89개를 가지고 있다고 보고되어 있다. 물론 이런 모든 수들은 인접한 피보나치의 수들이다. 가끔씩 예외가 나타나기도 하지만 조사 결과들은 해바라기의 나선형의 수가 압도적으로 피보나치의 수들로 나타나고 있음을 보여주고 있다. 때로는 피보나치 수의 두 배로 나타나기도 한다. 예를 들면, 34, 55보다는 68, 110이 되는 경우이다.

(4) 솔방울

하나의 솔방울에서, 완급에 따른 나선형의 숫자는 항상 피보나치의 수열에 나타난 수들과 거의 근접해 있다. 어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것들은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한

나선형을 가지고 있거나, 또는 완만한 것 8개와 급한 것 13개를 가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치의 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 어떤 종류의 솔방울에서는 어느 한 가지가 지배적일지라도 두 가지 이상의 나선형의 잎들의 숫자들(예를 들면, 한 솔방울에 3−5와 5−8)을 가질 수 있다. 많은 연구 결과, 솔방울들의 나선형 수에서 99% 정도는 피보나치 수열에 나타난 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다.

(5) 잎의 배열과 회전마다 잎의 수

많은 식물들의 줄기 주위에 있는 잎들의 배치에서도 피보나치 수를 발견할 수 있다. 식물을 위에서 내려다보면 잎들은 종종 아래의 잎을 가리지 않도록 배열되어 있다. 이것은 각각의 잎들이 다 햇빛을 잘 받고, 가장 많은 수분을 받아내어, 잎과 줄기를 따라 뿌리로 보내도록 하기 위한 배치임을 의미한다.

잎에서 잎으로 가면서 줄기 주위를 돌아가는 수를 셀 때, 그리고 시작점의 잎의 바로 위에 위치하는 잎을 만날 때까지의 잎의 수를 셀 때에도 피보나치 수가 나타나게 된다.

만약 다른 방향으로 수를 세게 되면 같은 수의 잎에 대해서 다른 수의 회전 수를 얻게 될 것이다.

Ⅵ. 피보나치 수열의 응용

1. 건축과 황금비

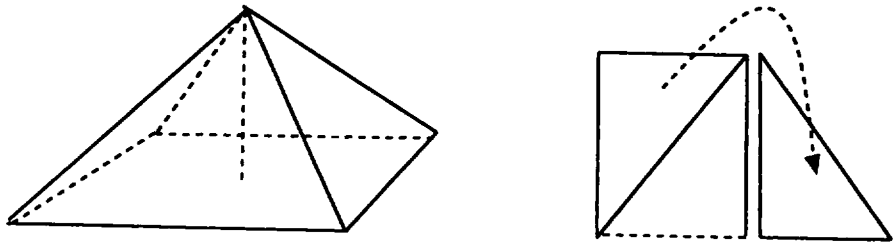
황금분할은 이름 그대로 가장 아름다운 선분의 분할방법으로서 건축, 회화, 조각 등에서 이용되어 왔다. 비근한 예로는 액자를 비롯해서 책, 심지어는 담배나 성냥갑마저도 대부분 가로, 세로의 길이가 황금분할의 비와 같게 만들어지고 있다.

우리 나라에는 '배흘림 기둥'으로 된 전통 건축 양식이 있는데, 그리스 신전에 쓰인 엔터시스 양식의 기둥과 같다. '배흘림 기둥'으로 유명한 대표적인 건물은 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전인데, 평면에는 1 : 1.618의 황금비가 적용되어 아름다움을 자아낸다. 또, 무위사의 극락전, 화엄사의 대웅전 등에서도 이런 기둥을 볼 수 있다. 무량수전은 겉에서 보면 정면 5칸, 측면 3칸으로 지어져 있는데, 균형이 잘 잡힌 3 : 5의 비율임을 알 수 있다. 건물의 실제 비율은 1 : 1.618의 황금비이다.

B.C. 2,600년경에 세워진 이집트의 기자(Gizeh) 마을에 있는 거대한 피라미드는 건축에 있어서 황금비를 사용한 최초의 예로 알려져 있다. 이 피라미드에서 높이와 정사각형 밑면의 한 변에 대한 비는 5 : 8 또는 0.625이다. 더욱이 피라미드의 옆면 삼각형은 황금사각형을 대각선을 따라 자른 후 다시 이 사각형의 긴 변을 겹쳐 결합시킨 삼각형이다([그림 8] 참조).

피라미드에 관한 흥미를 가중시킬 만한 사실이 어느 학술 보고서에 나타나 있는데, 인치(inch) 단위를 사용했던 이집트인들은 처음에 이 피라미드를 5, 813인치(여기서 5, 8, 13은 피보나치 수이다.)의 높이로 건조했다는 것이다. 그런데 이 사실은 피라미드의 상단 부분이 부스러져서 실제로 확인하는 것은 어렵다고 한다. 흥미롭게도 오늘날 이 피라미드의 밑면의 넓이는 13헥타르 또는 8에이커로 알려져 있는데, '헥타르'와 '에이커'는 오늘날 가장 널리 사용되는 땅 넓이 측량 단위 중 하나다.

B.C 400년경에 건조된 아테네의 파르테논 신



[그림 8] 가자마을의 피라미드와 옆면의 삼각형

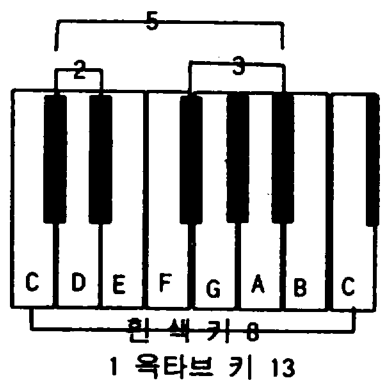
전에서 외부 규격(치수)은 정확히 황금사각형을 나타내고 있는데, 다른 여러 구조 속에서 황금비가 잘 나타나고 있다. 그리스 사람들은 B.C 5 세기경 시작되었던 그리스 고전주의 시대 이후 의식적으로든 무의식적으로든 이 황금비의 영향을 많이 받아왔다. 그리스의 동상이나 꽃병, 주전자 등 고형물을 기하학적으로 분석한 결과 이들이 황금비를 사용하고 있었다는 것이 분명히 드러났다.

르네상스 시대의 예술과 건축은 그리스의 미와 비율에 대한 감각에서 영감을 받아 이루어졌다. 대량 생산의 시대에 쏟아져 나왔던 그 많은 건물, 동상, 무덤과 같은 것들이 황금비를 특징적으로 나타내고 있다는 점은 놀라운 일이 아니다. 물론 복도, 바닥 기초 공사, 창문, 문 등 거의 모든 곳에서 이 비를 발견할 수 있다.

오늘날 여러 건축물에서 황금비가 나타나는 것 또한 우연이 아니다. 20세기의 유명한 건축가인 Le Corbusier는 그의 작품에서 황금비를 애용했다. 그의 영향은 프랑스의 개인 빌라에서부터 뉴욕의 유엔빌딩에 이르기까지 광범위하게 나타난다. 물론 황금비를 사용한 것은 그 혼자가 아니며, 정도의 차이는 있지만 다른 건축가들도 이 비를 사용했다.

2. 음악과 피보나치 수열

피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 연관 관계는 피아노의 건반에서 가장 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져 있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있는데, 이것들을 종합해 보면 [그림 9]처럼 피보나치 수열의 수가 나타남을 알 수 있다.

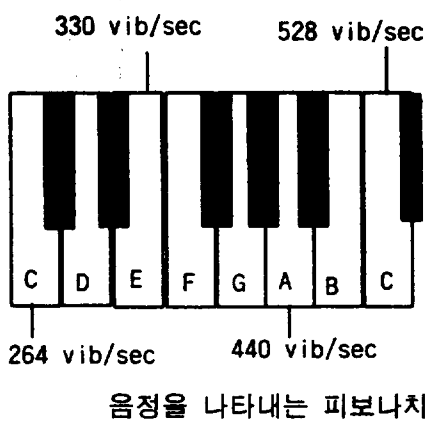


[그림 9] 피아노의 건반

[표 2] 음계와 노래 제목

음 계	5 음 계	8 음 계	13 음 계
노래 제목	아리랑 정선아리랑 한오백년 도라지	나뭇잎 배 파란마음 하얀마음 님이 오시는지 산들바람	그리운 금강산 로망스 사랑으로 산들바람

13개의 키는 반음계(chromatic scale)를 이루는데, 반음계는 서양 음악에서 가장 완전한 음계로 알려져 있다. 최초의 음계는 5개의 키로 이루어진 5음계(pentatonic scale)였고, 그 이후에는 흔히 옥타브로 더 잘 알려진 8개의 키의 온음계(diatonic scale)가 발달하였다. 5음계는 초기 유럽 음악에 쓰였고, 현재는 미국에서 아동을 위한 코다이식(Kodaly method) 음악 교육의 기초가 되고 있다. 피아노 건반에서 계속 이어지는 어떠한 5개의 검은 키들도 5음계를 이룰 수 있다. 유명한 미국 동요 중 여러 곡은 그 건반들만을 이용해서 연주할 수 있다. 한편, 우리 나라에서는 우리의 고유 음계인 '중(솔), 임(라), 무(도), 황(레), 태(미)'를 사용하는 대다수의 민요가 여기에 해당된다. 여러 다른 음계들이 존재했지만 5음계 (5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 서양 음악의 발전 과정에서 대부분을 차지하고 있다. 많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도로 알려져 있다. 장6도 음정의 예를 들면, [그림 10]에서 1초에 약 264번 진동하는 C음과 1초에 약 440번 진동하는 A음으로 이루어진다.



단 6도

$$\frac{330}{528} = \frac{5}{8}$$

장 6도

$$\frac{264}{440} = \frac{3}{5}$$

[그림 10] 피아노의 건반

$\frac{264}{440}$의 비를 약분하면, 피보나치의 비인 $\frac{3}{5}$이 된다. 단6도 음정의 한 예는 1초에 약 330번 진동하는 E음과 1초에 약 528번 진동하는 C음이 있는데, $\frac{330}{528}$의 비를 약분하면 그 다음 피보나치의 비인 $\frac{5}{8}$가 된다. 어떤 6도 음정의 진동수의 비도 비슷한 비로 약분이 된다.

이런 것들로 인해 피보나치의 수들이 눈에 아름답게 보이는 것뿐만 아니라, 귀에도 아름답게 들리는 자연적인 조화의 일부로 알려져 있다. 아마도 이러한 이유 때문에 작곡가들은 의식적으로든 무의식적으로든, 그들의 작품에 피보나치의 수들과 비를 이용해 왔을 것이다. 그레고리안 성가와 바하의 푸가, 바로토크의 소나타를 포함하는 음악의 각 장르를 연구해 보면 그것이 사실임을 알 수 있다.

피보나치 수들은 음악 작곡에 있어서 매우 다양한 기능을 한다. 그 기능 중 가장 중요한 것은 아마도 곡의 연주 시간을 피보나치 수의 비율을 이루는 단계로 나누는 것이다. 어떤 화가가 빈 이젤을 앞에 두고 수평선과 나무들의 위치 등을 결정하기 위해 그 공간을 황금비로 나누듯이, 작곡가는 곡 중 소주제의 시작과 끝, 분위기와 느낌을 결정하기 위하여 곡의 각 단계의 길이를 피보나치의 비로 나누어준다. 이것을 하는 한 가지 방법은 박자들을 묶는 데 피보나치 수들을 이용하는 것이다.

1930년에 콜롬비아 대학의 수학 교수이자 음악 교수였던 조셉 실링거(Joseph Shillinger)는, 피보나치 수열로 음정이 이루어진 멜로디는 마치 해바라기 씨앗이나 줄기에 붙은 나뭇잎의 성장 모형처럼 자연스럽다고 믿었다. 그리고 작곡 체계는, 한 멜로디의 연속적인 음이 그 이전의 음보다 피보나치 수만큼 높거나 낮은 음 또는 피보나치 수의 색다른 변형 음정으로 이루어진다고 주장하였다.

3. 토큰 교환과 피보나치 수열

피보나치 수를 찾기 어려울 것 같은 오락실에서, 오락을 위한 토큰을 파는 기계를 가정해 보자. 그 기계는 50원짜리나 100원짜리 동전만 넣을 수 있고, 거스름돈 없이 정확한 가격으로 50원짜리 토큰을 판매한다고 가정하면, 다음과 같이 지불할 수 있는 경우의 수를 생각할 수 있다.

토큰 1개를 살 때,
그것을 지불할 수 있는 방법은 1가지가 있다.
50원짜리 동전 1개 (a)
토큰 2개를 살 때,
그것을 지불할 수 있는 방법은 2가지가 있다.
50원짜리 동전 2개 (aa)
100원짜리 동전 1개 (b)
토큰 3개를 살 때,
그것을 지불할 수 있는 방법은 3가지가 있다.
50원짜리 동전 3개 (aaa)
100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개 (ba)
50원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 1개 (ab)

여기까지 따지면, 토큰을 사기 위해 지불할 수 있는 방법의 수는 사고자 하는 토큰의 수와 같아 보일 수 있다. 하지만, 4개의 토큰을 사게 되면 살 수 있는 방법이 5가지 (aaaa) (bb) (aba) (baa) (aab)가 있다.

토큰을 5개 사면 8가지 방법 (baaa) (bba) (abaa) (aaab) (aaba) (bab) (abb) (aaaaa)가 있다. 토큰을 6개 사면 13가지 방법(aaaaaa) (bbaa) (baba) (abab) (aaaab) (aaaba) (aabaa) (abaaa) (baaaa) (baab) (abba) (aabb) (bbb)가 있다.

토큰을 7개 살 때 그것들을 사기 위해 지불할 수 있는 방법은 21가지가 된다.

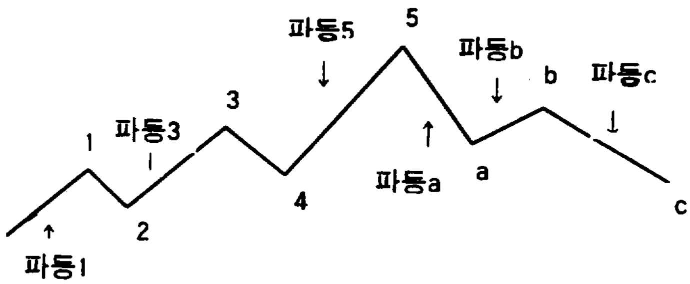
결론적으로 피보나치 수들은 예에서와 같은 기계를 만들기 위해 나와야 할 토큰의 수에 알맞은 돈을 받기 위해 몇 개의 방법으로 프로그램이 되어야 하는지 예상하는 데 도움을 줄 수 있다.

4. 피보나치 수열과 증권파동

피보나치 수열로 나타나는 흥미로운 예 중의 하나는 주식 시장의 변화이다. 1930년대 중반 미국이 대공황에서 빠져나가기 시작할 무렵, 랄프 넬슨 엘리엇(Ralph Nelson Elliot)은 다우존스 주가지수의 역사와 변화를 연구하였는데, 주식 시장은 어떤 규칙을 가지고 움직이는 경향이 있다는 것에 대해 동의했다. 일반적으로 주식 시장의 변화는 인간의 낙천주의와 비관주의의 일정한 변화에 의해 생긴다고 생각된다. 어떻게 보면 산업 주기는 인간의 행동 기능이다. 그것은 원형을 따르는 경향이 있고 이 원형들은 결국에는 증권 시장에서 반영된다.

엘리엇의 관찰들은 '엘리엇 파동(Elliot Wove) 원리'로 요약된다. 그것은 오늘날 투자 산업에서 증권 시장의 변화를 예측하는데 이용되는 원리 중의 하나이다. 엘리엇은 시장이 [그림 11]과 같이 8개의 파동으로 완전한 주기를 형성하면서 전개된다는 것을 알아챘다.

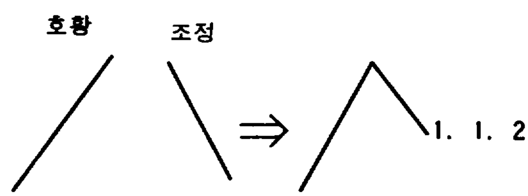
그 주기는 대체로 5개의 파동이 올라가고, 3개의 파동이 내려가는 기초 원형을 따른다. 번호를 매긴, 올라가는 5개의 파동들은 실제로 내려가는 파동을 2개 포함하는데, 올라가는 파동들은 경기 호황(낙천주의)이며 내려가는 파동들은 조정 국면(비관주의)이다.



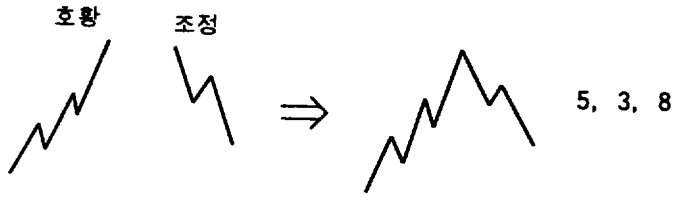
[그림 11] 엘리엇 파동

[그림 12], [그림 13], [그림 14]와 같이, 파동은 더 세분될 수 있거나 더 큰 파동의 부분이 될 수 있다. 파동은 늘어나거나 줄어들 수 있다. 그리고 그것은 다양한 변칙들로 앞에 있는 것을 뒤집어엎기도 한다. 그러나 기초가 되는 원형은 일정하다.

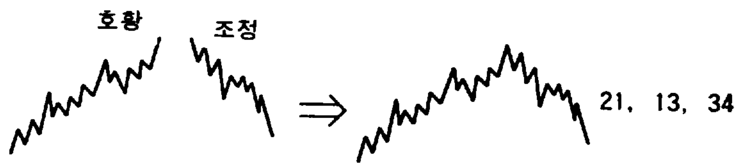
다양한 파동의 밀도를 분석하면 모든 단계에서 피보나치 수로 나타난다. 이러한 원형과 그것이 나타내는 피보나치 수들은 무한정으로 계속된다.



[그림 12]



[그림 13]



[그림 14]

엘리엇은 피보나치 수열이 군중 심리학의 문제를 해결하는 실마리라고 믿었다. 오늘날 증권 시장 전문가들 중에는 '엘리엇 파동 원리'를 시장의 동향을 예측하는 데 이용하기도 한다.

Ⅶ. 결 론

본 논문에서는 고등학교 수학 교과내용을 분석하고, 피보나치 수열의 특성과 황금비를 중심으로 살펴보았다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 고등학교 수학 I 교과서 및 참고서를 중심으로 분석한 결과, 피보나치 수열은 수학산책이나 연구과제 코너에서 단편적인 개념만 다뤄지고 있는 실정이다. 따라서 재미있고 많은 분야에 응용되고 있는 이 수열에 대하여 많은 내용의 소개를 통해 수학에 대한 흥미의 유발과 수학의 중요성을 인식하게 할 필요가 있다. 특히 수학의 사고력과 문제해결능력을 신장하기 위하여 기하학적 또는 직관적으로 의미가 있는 성질을 소개할 필요가 있다.

둘째, 피보나치 수열의 여러 가지 성질을 체계적이고 종합적으로 정리하고 이들의 논리적이고 기하학적인 증명을 통하여 이 수열은 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 수열임을 알 수 있다.

셋째, 피보나치 수열과 황금비의 관계, 황금비의 개념과 특성 그리고 건축과 예술분야에서 황금비 등을 살펴본 바에 의하면, 황금비는 아름다움(美)의 표현 대상이며, 문화예술 분야의 역사적 발전에 커다란 영향을 주고 밀접하게 관련이 있었다고 본다.

넷째, 꿀벌의 가계도, 조개의 나선형, 식물 등 자연 현상과 건축, 예술, 동전교환, 증권 등의 분야와 피보나치 수열의 관계 등에 관하여 체계적인 조사·분석은 수학이 재미있고 실생활에 밀접하게 관련이 있음을 보여준다.

본 논문은 피보나치 수열에 대한 여러 가지 성질들을 체계적으로 정리·증명하고 일반화시킴으로서 고등학교 수학교과 수열 단원의 참고자료로서의 가치를 지닐 수 있고, 수학적 귀납법과 점화식의 내용뿐만 아니라 수열 분야, 확률 분야 등의 내용을 풍부하게 할 수 있도록 하였다. 이를 통하여 고등학교 학생들의 수학적 사고력, 문제해결 능력을 신장시키는 데 도움이 되고 중등 수학교육의 연구 또는 교사들의 지침서가 될 것이다.

참 고 문 헌

김용운 · 김용국, 유클레이데스에서 토폴로지까지, 〈공간의 역사〉, 전파 과학사, 1990.

동아일보사, 〈과학동아〉 1999년 5월호, pp 62

박한식, 수학 I, 지학사, 74p, 1996.

박배훈외 5인, 수학 I, 교학사, 83p, 1996

브리태니커 세계대백과사전 6권, 동아일보 공동출판, 136p, 1993

브리태니커 세계대백과사전 24권, 동아일보 공동출판, 181p, 1993

수학대사전, 박을용외 6인, 한국사전연구사, 737p, 777~778p, 1998

수학사, 이우영 · 신항균 옮김, 경문사, 210p, 229~232p, 1996,

수학사랑 통권 제10호 (22p~29p), 1998

수학사랑 통권 제11호 (20p~25p), 1998

수학사랑 통권 제12호 (20p~24p), 1998

수학사랑 통권 제13호 (16p~19p), 1998

양승갑외 2인, 수학 I, 금성교과서(주), 76~77p, 1995.

조승제, 수학 I, 재능교육, 72p, 1995.

David M. Burton, Elementary number theory, Allyn & Bacon Inc. 1980.

L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, vol 1. New York, 1952, pp. 393−407.

K. Subba Rao, Some properties of Fibonacci numbers, Amer. Math. Soc. Monthly, 60 (1953), pp. 680−684.

Sam E. Ganis, Notes on the Fibonacci sequence, Amer. Math. Soc. Monthly, vol. 66, 1959, pp. 129−130.