

신뢰성 해석에 의한 지역특성 활하중계수

김 상 진 · 박 현 수

제주대학교 해양과학부 토목환경전공

Site-specific live load factor by reliability analysis

Sang-Jin Kim and Hyun-Soo Park

School of Ocean Science, Cheju National University, Jeju-Do 690-756, Korea

This study determines the site-specific live load factors using the reliability analysis and reviews the appropriateness of the live load factor of the AASHTO LRFD bridge design specifications. The Rackwitz and Fiessler method is used for the reliability analysis. The analysis is performed for the reinforced concrete T-girder bridges. The spans, spacings, and depths of bridge girders are considered as main design variables of the reinforced concrete T-girder bridges. Statistical characteristics of the resistance of the T-girder bridges and those of the dead load are obtained from the literature survey. The statistical characteristics of the site-specific live loads are estimated from the data of the truck axle weights and axle spacings measured in Michigan. The results of the site-specific live load factors were varied from 1.2 to 3.5. The decisive element for the determination of the live load factors is found to be the bias factors of the live load. If the design provisions are satisfied, the change of the spacing and depth of the girders has little influence on the reliability of the bridges. The results show that the live load factors of the AASHTO LRFD bridge design specifications cannot accommodate the live load variations for various sites.

Key words : site-specific live load, live load factor, bridge design

서론

실제 구조물의 계획, 설계 및 시공과정에서는 많은 불확실량이 존재한다. 즉, 실제하중과 설계하중의 차이, 시공된 재료의 성질이나 치수, 기하학적 형상 등에 대한 부정확성, 구조물의 거동예측에 대한 단순화된 가정 등으로 인하여 구조물에 절대적인 안전성을 부여하는 것은 매우 어렵다. AASHTO LRFD 설계 기준(AASHTO, 1998)은 불확실량을 합리적으로 일관성 있는 안전성을 위하여 저항에 대하여 부재에 대한 확률 통계이론을 바탕으로 부재의 거동과 특성에 대하여 강도감소 계수를 적용하고 있고, 하중효과에

대하여는 한계상태를 여러 가지로 분류하고 확률통계적인 하중조합과 하중계수를 도입하여 안전성 문제를 확보하고 있다.

교량의 자중이나 교량위의 시설물 등과 같은 상시하중인 경우에는 지역이나 시간에 따라 큰 변동성이 없지만 일시적인 하중 중 교통하중은 교량의 주요하중으로 작용하고 있는데 시간과 지역에 따라 변동성이 상시하중에 비해 크기 때문에 교량을 설계하는 문제에 있어서 경제성과 안전성 수준에 있어서 적절한 활하중계수가 필요하다. 또한 현재 AASHTO LRFD(1998)의 교통하중에 관한 활하중 모델은 Ontario Ministry of Transportation(Agarwal and Wolkowicz, 1976)에서 조사한 차량하중을 근거로 Nowak(1993)이

제안한 것인데 제안된 활하중계수는 시방서가 사용되는 모든 지역에 대하여 일정수준의 안전성을 확보 할 수 있도록 하여야 한다.

따라서 여러 지역에 대하여 교통하중의 변동성을 고려하여 지역특성 활하중 계수를 산정해 보고 산정된 활하중계수와 현행 AASHTO LRFD(1998)의 활하중계수를 비교하여 현재 AASHTO LRFD의 활하중계수가 적절한지 검토해 볼 필요가 있다고 사료된다.

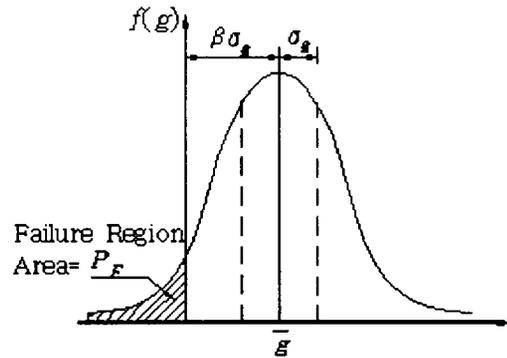


Fig. 1. Definition of reliability index.

신뢰성 이론

신뢰성 지수

구조물 기능에 대한 안전 여유치는 $Z = g(X)$ 의 함수로 나타낼 수 있는데 여기서 X 는 구조물의 저항에 관련된 재료의 특성치와 단면의 크기 그리고 하중효과에 관련된 확률변수로서 한계상태 ($Z=0$)을 기준으로 안전영역 ($Z>0$)과 파괴영역 ($Z<0$)으로 구분될 수 있다. 따라서 구조물의 파괴될 확률은 $Z<0$ 이 될 확률인데 다음과 같이 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$P_F = P[Z < 0] = \int_{-\infty}^0 f_z(Z) dz \quad (1)$$

여기서 $f_z(Z)$ 는 Z 의 확률밀도 함수인데 실질적으로 다중매개변수로 이루어진 한계상태의 함수식이므로 식(1)은 다중적분이 되어 수치적인 복잡성과 각 확률변수의 자료에 대한 부족으로 직접풀이가 어렵기 때문에 신뢰성 지수 β 를 사용한다. 신뢰성지수 β 에 대한 도해적 설명은 Fig. 1에 나타낸 것처럼 확률분포에서 원점으로부터 평균점거리 \bar{g} 까지 거리가 표준편차 σ_g 의 몇 배인가로 정의되며 신뢰성 지수와 파괴확률과의 관계를 나타내면 Table 1과 같다.

Rackwitz -Fiessler 신뢰성 지수방법

확률변수가 비정규분포 즉 대수정규분포, Gamma 분포, 또는 Extreme Value Type I 등의 분포 등의 조합으로 한계상태 함수가 구성되어 있을 때에는 신뢰성 지수의 정확도가 떨어지기 때문에 확률변수 분포의

Table 1. Reliability index(β), reliability, probability of failure

Reliability index β	Reliability ($P_S = 1 - P_F$)	Probability of failure P_F
2.0	0.9772	0.0228
2.5	0.99379	0.00621
3.0	0.99865	0.00135
3.5	0.999767	0.000233
4.0	0.9999683	0.0000317
4.5	0.99999660	0.0000034
5.0	0.999999713	0.000000287
5.5	0.9999999810	0.0000000190
6.0	0.99999999013	0.000000001987

제한 문제를 해결할 수 있는 Rackwitz -Fiessler 신뢰성 지수방법을 사용하면 상당히 정확하게 계산할 수 있다.(Rackwitz and Fiessler, 1978) 이 방법은 한계상태함수를 이루는 모든 변수의 분포를 알아야 가능하다. Rackwitz-Fiessler 신뢰성 지수방법의 기본적인 원리는 비정규분포를 등가의 정규분포로 변환시키는 것이다. 이러한 과정을 거칠때 서로 다른 분포의 변수들끼리의 계산이 쉬워진다는 장점이 있다. 한계상태함수 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 가 비선형일 경우, 평균을 초기설계점으로 가정한 후 ($X_i^* = \bar{X}_i$) Taylor 급수를 사용하여 비선형 한계상태함수를 설계점에 대하여 선형화 시키면 식 (2)과 같이 정식화되며 신뢰성 지수 β 는 식(3)으로 정립이 된다.

$$g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \cong g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X_i^*} (\bar{X}_i - X_i^*) \quad (2)$$

$$\beta = \frac{g(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots, \overline{X}_n)}{\sigma_g} \quad (3)$$

식 (3)의 σ_g 는 식 (4)과 같이 정식화 된다.

$$\sigma_g = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i} \sigma_i \right)^2} \quad (4)$$

새로운 설계점은 식 (5)으로 정립된다.

$$X_i^* = \overline{X}_i - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i} \right) \beta \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X_i} \sigma_i \right)^2}} \quad (5)$$

이와 같은 과정을 $X_{old}^* = X_{new}^*$ 일 때까지 반복한다.

교량부재의 설계변수

활하중계수를 결정하기 위하여 부재의 저항능력을 산정해야 한다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 2와 같은 철근콘크리트 T형 거더교를 씌에 대하여 고려하였다. 구조 계산방법은 AASHTO LRFD(1998)의 일반적인 차량통행을 고려한 기본하중조합인 강도한계상태 I를 고려하여 단순지간 내측 거더에만 적용하였다. 교량지간은 T형 거더교 형식에서 경제적으로 가장 많이 쓰이는 9m부터 24m까지 3m씩 증가시켜 6가지의 경우를, 거더 간격은 2m부터 2.75m까지 0.25m 간격으로 4가지, 거더 높이는 AASHTO LRFD 규정의 최소높이에서 여유를 두어 5cm를 더한 후 5cm 간격으로 15cm까지 적용하여 한지역의 활하중 계수를 구하기 위한 단면은 총 $6 \times 4 \times 3 = 72$ 가지를 고려하였다. 각 재료의 강도는 콘크리트 압축강도 $f_c = 28 \text{ MPa}$, 철근의 인장강도 $f_s = 400 \text{ MPa}$ 을 사용하였다.

확률변수의 통계자료

본 연구에 사용된 각 변수들의 통계치는 기존 연구 문헌의 통계 자료를 정리하여 Table 2에 나타내었다. 저항에 대한 통계치는 Morris(1987), Mirza와 MacGregor

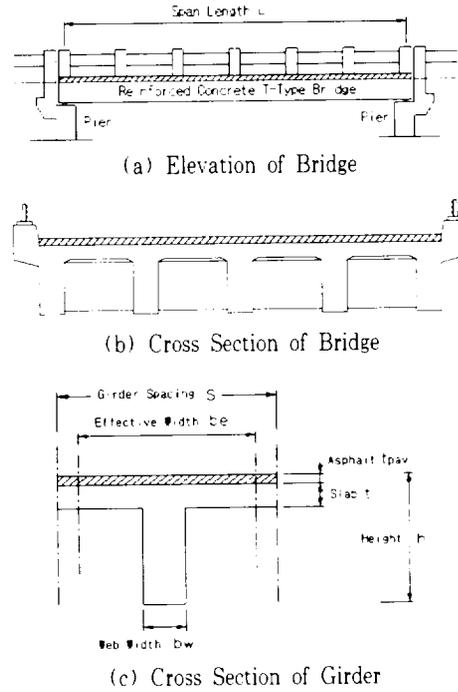


Fig. 2. Bridge model for Structural Analysis.

(1979)의 값을 사용하였고, 사하중에 대한 통계치는 Nowak과 Zhou(1985)가 OHBDC(Ontario Highway Bridge Design Code, 1983)의 개발 과정에서 제한한 모델을 사용하였다. 그리고 동적 활하중(충격하중) 교량 진동시험 자료에 근거하여 Hwang과 Nowak(1991)이 제시한 동적 활하중 모델을 사용하였다. 활하중의 편중계수는 각 지역의 교량에서 측정한 트럭의 축하중에 의한 최대 모멘트를 HL-93 하중에 의해 계산된 최대 모멘트로 나눈 값이다. 모델링 불확실성을 나타내는 모델링 계수는, MacGregor와 Ellingwood 등(1983)이 제안한 값을 사용하였다.

활하중 모델

교량이 받는 활하중의 주요성분은 트럭의 교통하중이다. 교량을 구성하고 있는 콘크리트의 자중이나 교량위의 시설물과 같은 상시하중과는 달리 교통하중과 같은 일시하중은 시간과 장소에 따라서 변동성이 크다.

현재 AASHTO LRFD(1998) 시방서의 활하중 모델은 Ontario Ministry of Transportation(Agarwal

Table 2. Statistics of design variables

Variable		Bias (λ)	C.O.V	Distribution
Resistance	Concrete strength f_c	0.85	0.18	Normal
	Steel strength f_y	1.13	0.098	Log normal
	Steel area A_s	Nominal	0.03	Normal
	Effect depth d	Nominal	0.0152/dn	Normal
	Modeling B	1.01	0.046	Normal
Dead load	Pavement M_{DC1}	1.00	0.25	Normal
	Concrete M_{DC2}	1.05	0.10	Normal
Live load	Static live load M_{LL}	-	0.11	Log normal
	Dynamic live load M_{IM}	-	0.80	Normal

· Dynamic live load mean = 75years maximum moment of a truck × 0.15
 · dn = Nominal value of effect depth

Table 3. Location of bridges, ADTT and number of surveyed trucks

Brevity	Bridge location	ADTT (One direction)	Number of surveyed trucks
US23/HR	US-32 northbound over the Huron River	2,000	910
US12/I94	US-12 Eastbound to M-10 Northbound	500	165
DA/M10	Davison Avenue over M-10	750	258
M39/M10	M-39 Southbound to M-10	1,500	657
I94/I75	I-94 Westbound to I-75 Southbound	1,500	295
M153/M39	I-153 over M-39	500	160
M50/GR	M-50 over the Grand River	500	584

and Wolkowicz, 1976)에서 실시한 트럭조사 자료를 근거로 제안되었다. 이 조사에 의하면 중 차량을 중심으로 10,000대의 트럭에 대한 축하중과 축간 거리 등을 조사하여 활하중에 대한 통계치 값을 얻었다. 조사된 10,000대의 트럭은 2주일간의 교통량을 대표한다고 가정하였으며 장래의 75년 교통량은 트럭조사 자료를 토대로 보간하여 추정하였다. 이 보간 추정은 통행허가 차량에 대한 법적인 기준은 미래에 변하지 않는다고 가정하였고, 장래의 트럭 교통량도 현 상태를 유지한다고 가정하였다(Nowak, 1993).

본 연구에서는 지역특성 활하중계수를 산정하기 위해 Nowak(1993) 이 제안한 방법으로 통계치를 얻었다. 방법은 축간 거리와 축하중을 사용하여 모멘트를 구하고 2일 동안 측정된 트럭 교통량은 현재를 대표한다고 가정하고 장래 75년 교통량을 보간 추정을 하였다. 트럭 교통량 조사 자료는 미시간주의 여러 교량에서 측정된 트럭의 축하중과 축간거리 자료를 사용하였다.

트럭교통하중은 주행 중 교통하중을 측정(BWIM: Bridge Weigh-in-Motion) 할 수 있는 계량기에 의해 측정된 값이고, 정확도는 총중량의 경우 95%이고, 축하중의 경우 80%로 평가된 값이다(김과 박, 1996).

측정된 트럭하중

본 연구에서는 측정된 트럭하중 중 총중량이 70kN 이상, 2축인 경우에는 45 kN이상인 것을 포함하였고 트럭 한 개의 축하중은 8.9kN 이상인 트럭만 포함시켰다. Table 3은 일평균 트럭교통량(Average Daily Truck Traffic: ADTT)과 측정된 트럭의 수를 나타낸 것이다.

실제트럭에 의한 최대모멘트

각 교량에서 측정되어 선정된 트럭의 축하중과 축

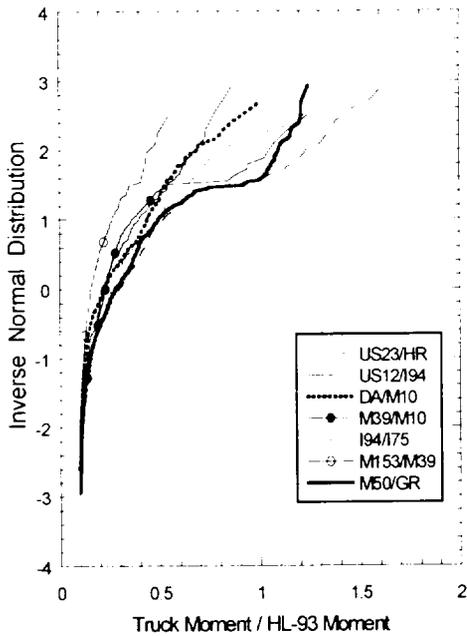


Fig. 3. Maximum moment ratios from truck survey and HL-93 for simple spans(24 m).

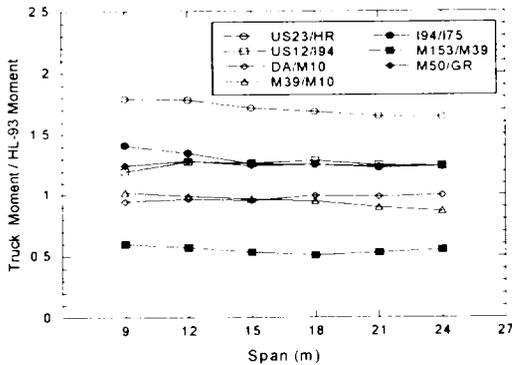


Fig. 4. Maximum values of maximum moment ratios from truck survey and HL-93 for simple spans.

간거리로 지간 9 m, 12 m, 15 m, 18 m, 21 m, 24 m에서의 최대 휨 모멘트를 산정하였다. 그리고 AASHTO LRFD의 HL-93하중에 의해 산정된 모멘트로 나누고 이를 확률용지에 도시하였다. Fig. 3은 각 지역의 트럭하중 의한 최대모멘트와 HL-93 하중에 의한 최대모멘트비 중에서 지간 24 m에 대하여 정규확률지에 도시한 것이고 Fig. 4는 교량의 지간에 따른 모멘트비의 결과를 각 교량의 지간별로 나타낸 것이다. HL-93 설계

하중에 의한 단순지간에서는 지간이 길어지더라도 모멘트비는 일정하지만 실제 트럭의 축하중과 축간거리에 있어서 많은 변화가 있기 때문에 지간에 따라서 변동폭이 있음을 알 수 있다. 최대값은 US23/HR에서 1.79이고 최저값은 M153/M39에서 0.51이다. 특히 US23/HR인 경우 현재 AASHTO LRFD의 활하중계수 1.75를 감안 하더라도 실제 트럭 하중에 의한 모멘트는 높은 값이다.

75년 최대모멘트비 추정

현재의 교통량에 의해 활하중계수를 산정한다는 것은 미래에 대한 불확실성을 예측할 수 없으므로 미래 교통량을 예측하고 각 지간 별로 최대 모멘트를 보간 추정 하는 방법으로써 Nowak(1993)이 제시하였고 AASHTO LRFD의 보정에 사용되었다. 예를 들어 트럭의 조사기간을 $T=2$ 주라고 하고 이 기간 동안 조사한 총 트럭의 수 $N=10,000$ 대라고 하면 75년의 교통량은 2주간의 트럭 교통량의 2000배이므로 총 트럭 교통량은 $N=20,000,000$ 대 이다. N 에 대한 확률 수준은 $1/N$ 이므로 75년 총 트럭 교통량에 대한 확률 수준은 $1/20,000,000 = 5 \cdot 10^{-8}$ 이다. 이 확률수준에 대한 역함수 값은 $Z = \Phi^{-1}(5 \cdot 10^{-8}) = 5.33$ 이 된다. 본 연구에서는 2일 동안 측정된 교통량이 현재의 교통량을 대표한다고 가정하고 75년 교통량을 추정하여 보간 하였다. Table 4는 각 교량별로 기간과 확률수준을 나타낸 것이고 Fig. 5는 I94/175의 각 교량 지간에 대하여 확률수준까지 보간하여 나타낸 것이다.

한계상태 함수 및 신뢰성 해석

본 연구는 시방서 규정에 의하여 계산된 철근 콘크리트 저항 부재를 사용하여 현재 AASHTO LRFD(1998)의 안전수준인 목표 신뢰성 지수 β_T 가 3.5에 만족될 때까지 활하중계수를 0.05 간격으로 증가시키며 반복계산을 하였다. 그리고 각 교량의 지간에 대하여 편중계수의 편차가 Nowak(1993)의 값보다 크기 때문에 본 연구에서 사용한 목표신뢰성 지수는 설계조건에 대하여 근접하는 신뢰성 지수가 아닌 최소 신뢰성 지수를 사용하였다. 본 연구에서 사용한 철근콘크리트 T형 거더교의 휨에 대한 한계상태 함수는 식 (6)과 같다.

Table 4. Number of trucks(N) vs. time period and probability(Z)

Period		Bridge						
		US23/HR	US12/I94	DA/M10	M39/M10	I94/I75	M153/M39	M50/GR
1day	N	455	83	129	284	148	80	292
	Z	2.849	2.2579	2.4232	2.696	2.4711	2.2462	2.7052
2days	N	910	165	258	567	295	160	584
	Z	3.0624	2.5107	2.664	2.9182	2.7086	2.4999	2.9273
75years	N	1245526	2258438	3531375	7760813	4037813	2190000	7796400
	Z	5.24	4.9155	5.0024	5.152	5.0218	4.9095	5.1529

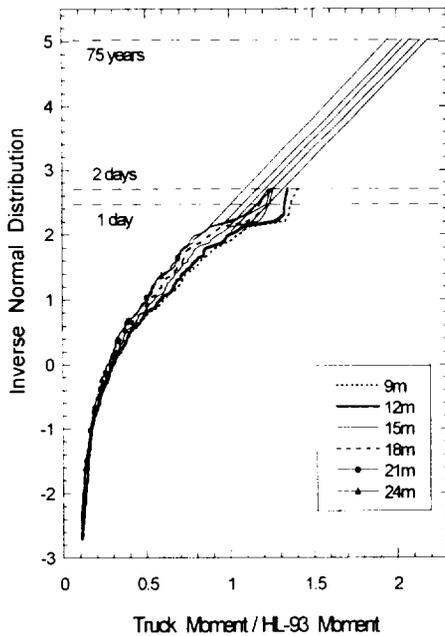


Fig. 5. Extrapolation of maximum 75 years moment ratio(I94/I75).

$$g(X) = BA_s f_s d \left(1 - \frac{0.59 A_s f_s}{f_c b_e d} \right) - (M_{DC1} + M_{DC2} + M_{LL} + M_{IM}) \quad (6)$$

여기서 B는 휨에 대한 모델링의 불확실성을 나타내는 모델링 계수, A_s 는 철근의 단면적, b_e 는 유효 플랜지폭, d는 유효깊이, f_s 는 철근의 인장강도, M_{DC1} 는 포장에 의한 휨 모멘트, M_{DC2} 는 콘크리트자중에 의한 휨 모멘트, M_{LL} 는 활하중에 의한 모멘트, M_{IM} 충격하중에 의한 휨 모멘트이다.

식 (6)은 비선형 함수이므로 비선형 한계상태 함수

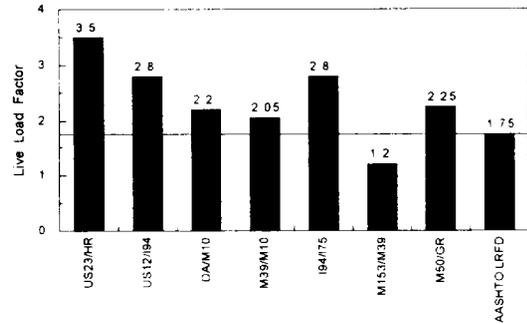


Fig. 6. Site-specific live load factors.

에 대한 Rackwitz-Fiessler의 신뢰성 해석방법(Rackwitz and Fiessler, 1978)을 적용하였다.

신뢰성 해석결과

앞 절에서 기술한 하중과 저항변수들의 통계자료와 Rackwitz-Fiessler 신뢰성 지수 방법(Rackwitz and Fiessler, 1978)을 이용하여 철근콘크리트 T형 거더교에 대하여 신뢰성 해석결과를 나타내면 다음과 같다.

Fig. 7은 지역특성 활하중계수 산정 결과를 나타낸 것이다. 활하중계수는 3.5에서 1.2까지 다양하게 산출되었고 M153/M39를 제외하고 AASHTO LRFD(1998)의 활하중계수 보다 값이 크게 산정되었다. 이러한 결과로 현재 AASHTO LRFD(1998)의 활하중계수 1.75만으로 여러 지역의 극한 한계상태에 대하여 일정한 안전성을 확보 할 수 없다는 것을 나타낸다.

Fig. 7에서 Fig. 9까지는 교량의 설계변수에 대하여 신뢰성 지수를 나타낸 것이다.

Fig. 7은 각 지역의 기간에 대한 신뢰성 지수를 나타낸 것이다. DA/M10에서 신뢰성 지수의 편차가 가장 크게 나타났고 US12/I94에서 신뢰성 지수의 편차가 가

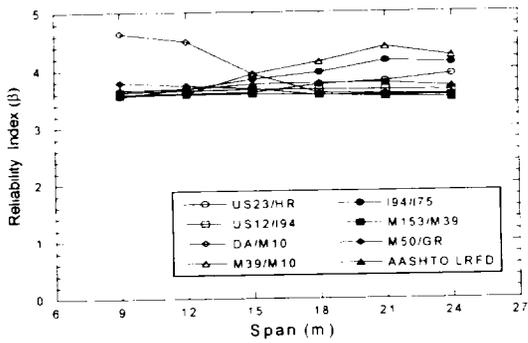


Fig. 7. Reliability indices per spans.

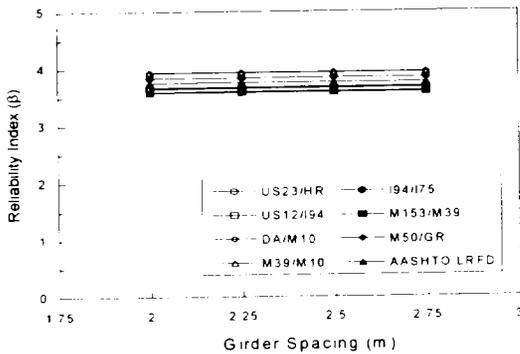


Fig. 8. Reliability indices for girder spacings.

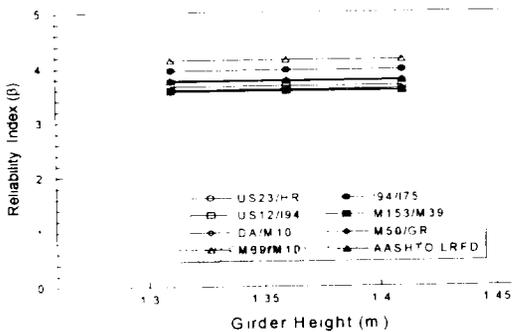


Fig. 9. Reliability indices for girder heights.

장 작게 나타났다. 이러한 결과의 주 원인은 DA/M10에서 모멘트에 대한 편중계수 값의 편차가 가장 크고 US12/I94에서 값의 편차가 가장 작았기 때문이다.

Fig. 8은 거더 높이에 따른 신뢰성 지수를 나타낸 것이다. 각 지역별로 신뢰성 지수의 변화를 보이지만 거더 간격과 거더 높이에 따른 신뢰성 지수의 변화는 미세하였다. 즉 AASHTO LRFD(1998)의 바닥판의 두

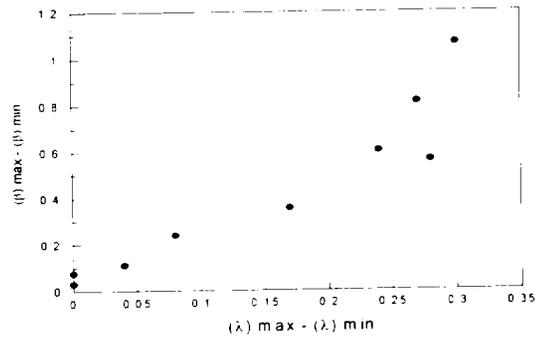


Fig. 10. Relationship between deviation of reliability index(β) and deviation of bias factor(λ).

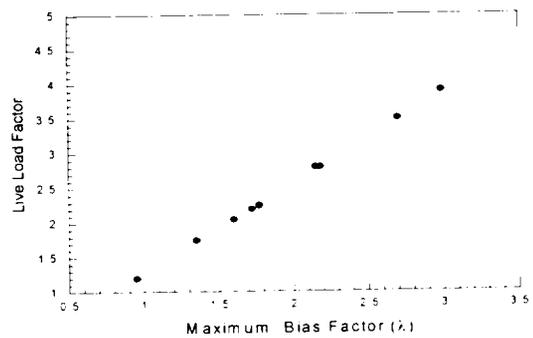


Fig. 11. Relationship between bias factor and live load factor.

께와 거더의 높이는 하중의 영향에 대하여 두께와 높이는 활하중의 영향에 대하여 충분한 것을 의미한다.

Fig. 10은 각 지역에서 트럭에 의한 모멘트 편중계수(λ) 값의 편차와 신뢰성 지수(β)의 편차와의 관계를 나타낸 것이고 Fig. 12는 각 지역 교량의 지간에 대하여 트럭하중에 의한 모멘트의 편중계수 중에서 최대값과 활하중계수와와의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 10에 의하면 편중계수의 편차 범위가 증가할수록 신뢰성 지수의 편차 범위는 증가곡선 형태의 모양의 성향을 보였으며 Fig. 11에서 최대 편중계수가 증가할수록 활하중계수는 선형으로 증가하는 성향을 나타내었다. 두 그래프에서 나타난 관계는 본 연구의 신뢰성 해석을 통하여 산정된 지역특성 활하중계수의 주요 원인으로 사료된다.

결론

본 연구에서는 신뢰성 이론을 이용하여 지역특성 활하중계수를 산정하고 AASHTO LRFD(1998)의 하중계수와 비교하여 AASHTO LRFD(1998)의 활하중계수의 적절성에 대하여 검토하여 보았다. 본 연구에서 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 측정된 트럭의 축하중과 축간거리를 이용하여 모멘트를 산정한 결과 현재 AASHTO LRFD의 HL-93 하중에 의한 것보다 2배 이상의 수치 결과가 산정되었다. 현재 AASHTO LRFD의 활하중계수가 1.75임을 감안 하더라도 실제 트럭하중에 의한 모멘트는 높은 값으로 판단된다.

(2) 신뢰성 해석을 통한 각 지역별 활하중계수 산정결과 1.2에서 3.9까지 산정 되었다. 현재 1.75만으로 규정되어있는 AASHTO LRFD의 하중계수는 일정한 안전 여유치를 확보하지 못한다. 따라서 AASHTO LRFD의 활하중계수 1.75는 지역에 따라서는 다소 증가 되어야 한다.

(3) 신뢰성 해석에 의한 활하중계수 산정 시 활하중계수를 결정하는 주요 인자는 편중계수의 크기이다. 활하중계수는 편중계수에 선형적으로 비례하는 경향을 나타내었다.

(4) 설계규정을 만족하도록 설계되는 것이 전제된다면 거더 간격과 거더 높이는 신뢰성에 큰 영향을 미치지 않았다.

참고 문헌

- 김상진·박문호. 1996. 트럭하중 측정을 위한 교량시험. 대한토목학회 논문집, 16: 621-631.
- AASHTO. 1998. LRFD Bridge Design Specifications. 2nd Edition. American Association of State Highway and Transportation Officials. U.S.A.
- Agarwal. A.C. and Wolkowicz. M. 1976. Interim Report on 1975 Commercial Vehicle Survey. Research and Development Division. Ministry of Transportation. Downsview. Ontario. Canada.
- Hwang. E.S. and Nowak. A.S. 1991. "Simulation of Dynamic Load for Bridges". Journal of Structural Engineering. ASCE. 117(5): 1413-1434.
- MacGregor. J.G. 1976. "Safety and Limit States Design for Reinforced Concrete". Canadian Journal of Civil Engineering. 3(4): 484-513.
- MacGregor. J.G., Mirza. S.A., and Ellingwood B.R. 1983. "Statistical Analysis of Resistance of Reinforced and Prestressed Concrete Members". Journal of ACI. 80(3): 167-176.
- Mirza. S.A., Hatzinikolas. M., and MacGregor. J.G. 1979. "Statistical Descriptions of Strength of Concrete". Journal of Structural Division. ASCE. 105(6): 1021-1037.
- Mirza. S.A. and MacGregor. J.G. 1979. "Variability of Mechanical Properties of Reinforcing Bars". Journal of Structural Division. ASCE. 105(5): 921-937.
- Morris Israel. Bruce Ellingwood. and Ross Corotis. 1987. "Reliability-Based code Formulation for Reinforced Concrete Building". Journal of Structural Engineering. ASCE. 113(10): 2235-2252.
- Moses. F. and Ghosen. M. 1985. A Comprehensive Study of Bridge Loads and Reliability. Final Report. FHWA/OH-85/005. Jan.
- NCHRP. 1993. Development of Comprehensive Bridge Specifications and Commentary : Third Draft LRFD Specifications and Commentary. NCHRP Project 12-33. Transportation Research Board. Washington. DC.
- Nowak. A.S. 1993. Calibration of LRFD Bridge Design Code. Report UMCE. Department of Civil and Environmental Engineering University of Michigan. Ann Arbor. Michigan.
- Nowak. A.S., and Hong. Y.K. 1991. "Bridge Live-load Models". Journal of Structural Engineering. ASCE. 117(9): 2757-2767.
- Nowak. A.S., Zhou J.H., 1985. Reliability Models for Bridge Analysis. Report UMCE 85R3. University of Michigan. Ann Arbor. Michigan.
- Rackwitz. R., and Fiessler. B. 1978. "Structural Reliability under Combined Random Load Sequences". Computers and Structures. 9: 489-494.