科學敎育, 15, 115~132, 1998
Journal of Science education
15, 115~132, 1998

뉴튼-랩슨方法의 歷史的 發展過程 硏究

김 도 현* · 김 익**

A Study of the Historical Expansion Process of the Newton-Raphson Method

Kim Do-hyun · Kim Ik

Abstract

The Purpose of this thesis is to trace the historical expansion process of the Newton-Raphson Method and to criticize through examining Sir Isaac Newton & Joseph Raphson's records, letters, and issues.

This study helps many teachers to guide an algebraical solution about an equation in middle and high school mathematics as well as to change their course into using computers. And this study is also meaningful to try and distinguish the Newton's formula from the Raphson's iterative process.

I. 서 론

격동의 시대에 역사에 대한 관심이 높아지는 것은 과거로부터 미래에 대한 암시를 얻기 위해서이다. 이 때의 역사는 연대표나 인명, 왕국명 등의 고유명사를 중심으로 하는 입시를 위한 역사와 같은 것은 아니다. 그것은 인류의 문화와 사

* 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

** 제주제일중학교 교사

상의 흐름에서 각 시대의 정신을 크게 파악하기 위한 것이다. 오늘의 현상에서 변화의 원인을 찾고 이들 원인들 사이의 관계를 한 눈으로 관찰하기 위한 역사이다. 역사는 단순히 지난 과거사가 아니다. 이 과거사는 계속 되살아 오늘의 격동 속에 내일의 상황을 예측하게 하는 열쇠를 제공한다.

따라서 수학사를 연구하는 이유는 과거에 만들어진 수학의 업적 속에서 인간 정신이 어떻게 바뀌어지고 발전되어 왔는가를 통해 인간에게 무한한 가능성이 있다는 것을 깨닫는 것이다.

제6차 고등학교 교육과정에서는 삼 · 사차 방정식의 근을 인수분해를 이용하여 구하고 있고, 무리방정식의 근은 정방정식(integral equation)을 이용하여 풀고 있다. 그러나 순수과학이나 응용과학 등에서 사용되는 방정식 문제에서는 그 해를 구하기 위한 대수적인 방법이 없어 정확한 근을 구할 수 없는 경우가 대부분이다. 이러한 경우는 허용오차 내의 근사값을 찾는 수치해법을 이용해야만 한다. 이러한 방법중의 대표적인 방법이 뉴튼 방법이고 수학과 관련된 컴퓨터 소프트웨어에는 뉴튼 방법이 기본적으로 포함되어 있다.

비선형 방정식 $f(x)=0$ 을 풀기 위한

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1. 1}$$

의 반복 · 연산을 일반적으로 뉴튼 방법이라고 한다. 가끔 그것은 뉴튼-랩슨(Newton-Raphson) 방법이라고도 한다.

본 논문에서는 뉴튼(Issac Newton), 랩슨(Joseph Raphson)의 기록물, 편지, 발행물들로부터 관련된 내용을 정리, 분석함으로써 방법(1. 1)의 발전을 추적하고자 한다.

II. 뉴튼 랩슨방법

1. 뉴튼 방법 - 제 1공식

1669년 중반으로 추정되는 유율법의 원리(The principle of fluxions)에 관한 최초의 발표물로 간주되는 뉴튼의 소책자 「무한급수의 방정식에 의한 解析」(De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, 1711년 출판) 은 비록 그 공식이 오늘날의 체계화된 형태와 아주 다르고, 그 계산이 현행 공식보다 훨씬 더 장황할 뿐만 아니라 그 방식은 오직 다항방정식 문제만을 다루고 있지만 뉴튼-랩슨

방법 (1. 1)의 예로서 무엇을 사용해야 할 것인가에 관하여 뉴튼에 의해 처음으로 기록되어져 있다.

어떠한 미적분도 그 설명에는 사용되지 않았으며 유율도함수(fluxional derivatives)에 관한 언급은 그 소책자의 후반부에 처음으로 나타나는데, 그것은 뉴튼이 유율적 도함수에 관한 언급을 완전히 대수적 절차로서 간주하고 있음을 나타내고 있다. 다른 여러 자료에서 보듯이 뉴튼은 그의 생각을 대중에게 더 접근하기 쉽게 만들려는 노력으로 더 많은 전통적 방법과 기호법을 사용하였음이 알려졌지만 그 당시에 그가 미적분의 적용으로서 이 독특한 기법을 인지했거나 또는 그것을 미적분의 기교를 사용하는데 이끌어냈다는 확실한 증거는 없다.

(1. 1)의 역사적 발견에 있어서 미적분의 일반적 역할은 [1]에서 나타난다. 뉴튼의 기법은 현대 함수적 개념에서 다음과 같이 묘사된다.

x_0 는 $f(x)=0$ 의 해 x_* 의 첫 추정으로 주어진다고 하자. $g_0(x)=f(x)$ 라 쓰고 $g_0(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 라고 가정하자. $e_0=x_*-x_0$ 라고 쓰면 우리는 주어진 x_0 에 관한 이항전개에 의해 변수 e_0 안에 있는 새로운 다항방정식 (2. 1)을 얻는다.

$$
\text{(2. 1)}\qquad 0=g_0(x_*)=g_0(x_0+e_0)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x_0+e_0)^i
$$

$$
=\sum_{i=0}^{n} a_i\left[\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} x_0^j e_0^{i-j}\right]=g_1(e_0)
$$

여기서 e_0 의 2차 이상의 항들을 무시하면

$$
0=g_1(e_0)\approx\sum_{i=0}^{n} a_i[x_0^i+i x_0^{i-1} e_0]=\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i\right]+e_0\left[\sum_{i=0}^{n} a_i i x_0^{i-1}\right]
$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$
e_0\approx c_0=-\left[\sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i\right]\Big/\left[\sum_{i=0}^{n} a_i i x_0^{i-1}\right]
$$

이고 $c_0=-g_0(x_0)/g_0'(x_0)=-f(x_0)/f'(x_0)$ 라고 쓸 수 있다.

$x_1=x_0+c_0$ 라 놓고 그 과정을 반복하면 x_1 에 관해서 원래 다항식 g_0 을 전개하지 않고 c_0 점에 관해 (2. 1)안에서 얻어진 다항식 g_1 을 전개한다. 즉 c_0 는 새로운 방정식 $g_1(x)=0$ 의 해 e_0 의 첫 추정이 된다고 생각했다. 그러므로 앞에서와 같은 방법으로 $0=g_1(e_0)=g_1(c_0+e_1)=g_2(e_1)$ 을 얻는다. 여기서

다항식 g_2는 명쾌하게 계산되었다. $e_1 \approx c_1 = -g_1(c_0)/g_1'(c_0)$와 같고, $c_1 = -g_0(x_0+c_0)/g_0'(x_0+c_0) = -f(x_1)/f'(x_1)$이다. $x_2 = x_1 + c_1$로 놓고 그 과정을 반복하면 c_1에 관해 전개되는 g_2에 의해 계속되어진다.

방정식에 영향을 끼친 분석에 의한 예

방정식에 영향을 끼친 수치에 관한 분석

여기에서의 어려운 것은 전적으로 분석 기법에 있기 때문에, 처음으로 수 방정식[5](數 方程式, numerical equation)에서 사용한 방법을 설명할 것이다.

$y^3-2y-5=0$ 은 해결되었다고 가정하자, 그리고 2는 그것의 10분의 1보다 작은 것에 의해 구해진 근과 다른 숫자라고 하자.

$$\begin{cases} +2.10000000 \\ -0.00544853 \end{cases}$$
$$2.09455147$$

$2+p=y$	y^3	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Sum	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0.1+q=p$	$+p^3$	$+0.001+0.03q+0.3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0.06 \quad +1.2 \quad +6.0$
	$+10p$	$+1 \quad\quad +10$
	-1	-1
	Sum	$+0.061+11.23q+6.3q^2+q^3$
$-0.0054+r=q$	$6.3q^2$	$+0.000183708-0.06804r+6.3r^2$
	$+11.23q$	$-0.060642 \quad\quad +11.23$
	$+0.061$	$+0.061$
	Sum	$+0.000541708+11.16196r+6.3r^2$
-0.00004853		

그러면 $2+p=y$라 놓고 그 방정식에 x대신에 이 값을 대입하여, 그 결과로 $p^3+6p^2+10p-1=0$ 이라는 새로운 방정식이 생기고 그 방정식의 근 p는 작은 값이므로 p^3+6p^2 을 무시할 수 있다. 그러면 $10p-1 \approx 0$ 또는 $p \approx 0.1$은 그 방정식의 매우 가까운 근사해가 된다.

몫에 0.1을 쓰고 $0.1+q=p$라 가정하자. 그리고 p 대신에 이 값을 대입

5). 숫자방정식이라고도 한다. 방정식에서 기지수가 모두 숫자인 것을 말한다.
예를 들면, $2x^2+3x-1=0$, $x^3-2x^2-x+2=0$ 등이다.

하면 앞에서처럼 $q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$ 이고 $q^3+6.3q^2$ 은 무시할 수 있다. 그러면 $11.23q+0.061[\approx 0]$ 은 해의 참값에 접근하여 $q\approx -0.0054$ 이 된다.

여기서 몫에 -0.0054 를 쓰고 $-0.0054+r=q$ 라 가정하자. 앞에서와 같이 이것을 대입하고 원하는데 까지 그 계산을 계속한다.

그러나 만약에 q^3 을 제거한 방정식 $6.3q^2+11.23q+0.061[=0]$ 에서 q 대신에 $-0.0054+r$ 을 대입해 보자.

그러면 $6.3r^2+11.16196r+0.000541708=0$ 이 생기고 $6.3r^2$ 을 무시하면 $r=\dfrac{-0.000541708}{1.16196}\approx -0.00004853$ 이 된다.

2.10000000에 -0.00544853을 더하면 원하는 몫 2.09455147 을 얻는다.

[표 1] $x^3-2x-5=0$ 을 해결하는 뉴튼 방법

[표 1]에서 이 방법에 의한 $g(x)=x^3-2x-5=0$ (era [2, p.64]의 표준검사문제)의 뉴튼 해법에 관해 보여주고 있다.

(1) Line 1. $x_0=2$ 라 잡으면 해 $x_*=2.09455148\cdots$ 의 계속적인 추정이 여기에 모아졌다.

(2) Lines 2-5. $g_0(x_*)=g_0(2+p)=p^3+6p^2+10p-1=g_1(p)=0$ 처럼 이항전개를 사용하여 g_0 를 전개하고 고차 계수 항들을 생략하면 $10p-1\approx 0$ 이 남고, 따라서 $p\approx 0.1$ 이고 $x_1=2.1$ 이다.

(3) Lines 6-10. $g_1(p)=g_1(0.1+q)=q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=g_2(q)$를 전개하여 $11.23q+0.610\approx 0$ 로 절단하고 이것은 $q=-0.00543\cdots$ 로 주어지고, 반올림하여 -0.0054 이다. 따라서 $x_2=2.0946$ 이다.

(4) Lines 11-14. $g_2(q)=g_2(-0.0054+r)=6.3r^2+11.16196r+0.000541708$ $=g_3(r)$ 를 전개하여(여기서 g_2 안에 q^3 항은 작아져서 생략되었다.) 고차 계수 항들을 생략하여 계산하면 $r\approx -0.00004853$ 을 산출하고, 따라서 절단 후에 $x_3=2.09455147$ 이다.

뉴튼에 의해 기술된 그 과정은 연속적인 다항식 g_1, g_2,... 의 명쾌한 계산을 필요로 하지만 그 과정은 어렵다.

분명히 미적분은 뉴튼의 발표에서는 사용되지 않았고 그것은 전적으로 이항전개를 사용해서 얻은 최저 계수 항에 근거를 두었다.

또한 새롭게 바꿔지고 계속적으로 사용되어진 연속적인 추정 x_i 대신에 $x_* = x_0 + c_0 + c_1 + \cdots$ 처럼 x_*의 최종 추정은 단지 그 과정의 끝 부분에서 계산되어진다는 것을 주의하라. 분명히 이 과정은 현행의 반복기법과 대단히 다르다. 이 과정은 연속적인 단계에서 해의 정확한 유효숫자의 자릿수들을 대략 두 배로 근사시킴으로써 연속적 단계에서 뉴튼에 의해 보유된 자릿수가 두 배로 되었음을 주목하라. 이것은 뉴튼이 이미 그 기법의 이차수렴(quadratic convergence)을 알고 있었다는 암시를 준다.

위에 인용된 내용을 약간 개정한 번역판은 1671년에 쓴 뉴튼의 소책자 「유율법과 무한급수」(De methodis fluxionum et serierum infinitarum)이라는 서문에 포함되었다. 「유율법과 무한급수」의 미완성의 원고는 처음에는 출판할 의도였지만, 1672년에, 자기 이름으로 처음 내놓은 「빛과 색에 관한 새 이론」(New Theory about Light and Colors)에 대해 학계의 비난과 그 저서에 대한 부당한 취급을 받자 이에 대해 " …새로운 사상을 전혀 발표하지 말든지 죽는 날까지 그것을 수호하는 노예가 되어버리든지 어느 하나를 택해야겠다. 그러나 내 자신의 기쁨을 위해 연구는 하되 사는 동안에는 발표만은 하지 않을 작정이다."라고 말한 적이 있는 점으로 미루어볼 때 결국 뉴튼이 그 때 그 저서를 발행하지 않은 이유를 짐작하게 한다. 「무한급수의 방정식에 의한 해석」은 1711년까지 발간되지 않았고 윌리엄 존스(Willam Jones)에 의해 'Analysis per quantitatum series, fluxions, ac differentias…'안에 포함되어 발간되었고 그것은 역사적으로 아주 큰 비중을 차지한다.

「유율법과 무한급수」는 존 콜슨(John Colson)[2, III, p.13]에 의해 번역돼 1736년에 발행되었다. 그럼에도 불구하고 뉴튼 저서의 많은 사본들이 유력한 수학자들 사이에서 널리 읽혀졌다.

뉴튼은 「무한급수의 방정식에 의한 해석」의 사본을 아이작 바로우(Issac Barrow)에게 주었고, 그는 그 사본 1부를 존 콜린스(John Collins)에게 보냈고, 그는 그의 서신 왕래자들 사이에 그 책 소식을 알렸고, 그들 중의 일부는 그 책

사본의 일부 몫을 가지는 특권을 가졌다. 이러한 것들 중의 하나가 라이프니쯔 (Leibniz, G.W.)가 1676년 런던 방문중에 만들어진 자료인데 [2, II, p248-259]에서 재현되었으며, 그 안에는 연산에 관한 상당량의 자료가 생략된 반면 거의 축어적인 것 이상으로 분석된 구절이 포함되어 있다.

[표 1]의 내용을 본질적으로 포함한 뉴튼 방법의 초창기 인쇄된 보고서는 1685년 런던에서 발간된 존 월리스[6](John Wallis)의 『대수학』[7](A Treatise of Algebra both Historical and Practical)의 94장에 있다.

뉴튼의 방법과 동일한 대수적인 방법을 12세기 대수학자 나시르 알딘 알 투시는 알고 있었다. 그리고 15세기 아라비아 수학자 알 카시는 N의 근을 찾기 위해 $x^p - N = 0$ 를 해결하는데 그 형식을 사용했다.

2. 뉴튼 방법

반복 형태로 표현되어 있는 방법(1. 1)이 뉴튼에 의해 처음으로 사용되었고, 비다항방정식에 적용한 내용은 초판이 1687년에 런던에서 발간된 그의 저서 『자연 철학적 수학의 원리』(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) 의 재판과 제3판에 들어 있다. 계속해서 발행된 몇 개의 간행물에서 그는 케플러 (Kepler, J.)의 방정식

(2. 2) $$x - e\sin(x) = M$$

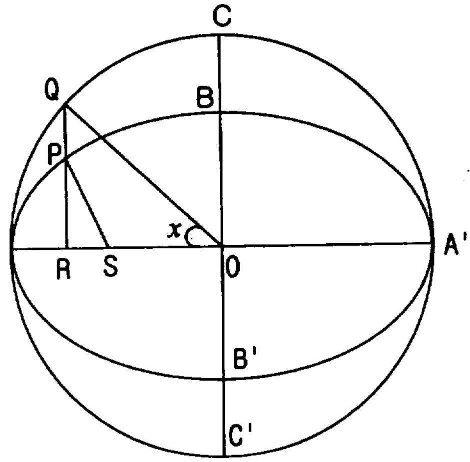
의 해법에 관한 기법을 기술(記述)하였다. 방정식 (2. 2)에서 x는 이심근점이각 (離心近點離角, eccentric anomaly), M은 평균근점이각(平均近點離角, mean anomaly), 그리고 e는 타원의 이심률을 나타내고 있으며 여기서 M과 x는 호도법으로 측정되었다.

뉴튼의 기하학적 기교를 이해하고 뉴튼-랩슨 방법의 형식적인 형태를 관련시키기 위해서는 (2. 2)에 포함된 항들을 이해할 필요가 있다.

---

6). 1616-1703 : 영국의 수학자. 1649년에 옥스퍼드 대학의 기하학 교수에 임명되었다.
곡선형의 면적에 관해서 월리스가 얻은 결과를 연구하여 뉴튼은 이항정리 (二項定理)를 발견했다.

7). 그 내용은 산수와 대수의 역사, 이론 및 실용에 걸쳐 있는데, 그 중에서 역사 부분은 신용할 수 없는 것으로 가치가 없으나 다른 부분은 걸작이어서 내용이 놀랄 만큼 풍부하다고 한다.



[그림 1] 타원궤도 안에서 행성의 위치 찾아내기

다음에 언급하는 것은 [3, p72-85]에 기초를 두고 있는데, 그 문제의 근원은 근일점[8]을 통과하여 시간이 경과한 이후에 태양 주위의 타원 궤도를 움직이는 행성의 위치를 결정하는데 있다.

[그림 1]에서 중심이 원점에 있는 타원(궤도) $ABA'B'$ 는 표준(標準)방정식(canonical equation)

(2. 3) $$\left(\frac{y^2}{a^2}\right)+\left(\frac{z^2}{b^2}\right)=1$$

에 의해 정의된다고 하자.

그러면 그 타원은 이심률 e를 $e=\frac{b}{a}$ 로 두었을 때, 길이 a의 반(半)장축 AO와 $S=-b=-ae$에서 초점(태양)을 갖는다.

원점을 중심으로 하여 타원에 외접하는 반지름이 a인 원을 $ACA'C'$ 라 하자. P(행성)는 카테시안 좌표(Cartesian coordinate)에 의해 정해진 타원 위의 점이라고 하고, QPR은 P를 지나 AO에 수직인 선이고 각각 점 Q, R에서 외접원과 선 AO를 두 부분으로 잘라낸다고 하자. 그러면 P의 카테시안 좌표(Cartesian coordinate)는 $|PR|$과 $|OR|$의 길이에 의해 정의된다.

$\frac{|PR|}{|QR|}=e$ 라는 사실은 쉽게 증명되어 주어졌고, 그래서 우리는 단지

8). 지구가 태양에 가장 가까워지는 위치

$|QR|$과 $|OR|$의 발견만을 필요로 하며 이심근점이각(離心近點離角, eccentric anomaly)의 지식을 보이는 것은 쉽다. 즉 각 $x=\angle AOQ$는 P를 충분히 정하면 $\sin(x)=\frac{|QR|}{|QO|}=\frac{|QR|}{a}$ 이고 $\cos(x)=\frac{|RO|}{|QO|}=\frac{|RO|}{a}$.

그러므로 $|PR|=ea\sin(x)$ 이고 $|OR|=a\cos(x)$. 이심근점이각(離心近點離角, eccentric anomaly) x는 계산되었다.

점 P는 시간이 0일 때의 점 A를 통과(근일점 통과)하여 t시간이 됐을 때, 태양 S에 대한 타원궤도 안에 행성의 위치를 표현한다고 가정하자. 만약 그 행성의 궤도주기가 T라면 동경 SP는 한 궤도의 경로 안에서 2π를 돌았으므로 행성의 평균각속도(mean angular velocity)는 $n=\frac{2\pi}{T}$ 이다. t시간 동안에 각속도 n인 S에 관한 동경 회전에 의해 씻겨진 각은 평균근점이각(平均近點離角, mean anomaly) $M=nt$이다.

그러므로 (2. 2)에서 x를 구하게 되면 각 $\angle AOQ$가 되고, M과 e가 주어지고 여기서 M은 t로부터 $M=\frac{2\pi t}{T}$ 와 같이 계산되어진다.

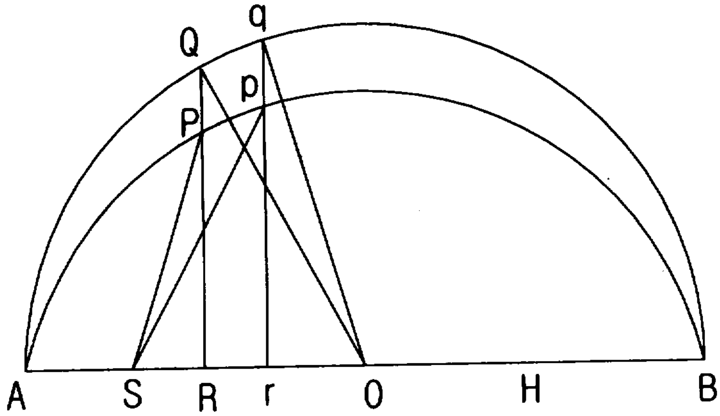
이 문제의 역사적 기원은 [2, IV, p668-669]에서 논의된다. 케플러의 문제에 관한 뉴튼의 관심은 1676년 6월 13일자 헨리 올덴베르그(Henry Oldenburg)에게 보낸 편지에서 처음으로 털어놓았는데 거기에서 그는 수량 $|PR|$에 관한 일련의 전개를 이끌어내고 있지만 (2. 2)을 풀기 위한 수치해법은 제시하지 않고 있다.

1726년에 라틴어로 출판되었고, 1729년에 앤드류 모토(Andrew Motto)에 의해 영어로 번역된 『자연 철학적 수학의 원리』의 제 3판에 관한 1934년 케죠리(Cajori, F.)의 간행본으로부터 나온 내용을 아래에 나타내고 [그림 2]와 주석을 덧붙이고 있다. 여기서 수치적으로 (2. 2)을 풀기 위한 뉴튼의 기법이 제시되고 있다.

"그러나 이 곡선에 대한 묘사가 어려우므로 근사치에 의한 해결이 보다 바람직 할 것이다.

그러면 첫째로 57.29578도의 각일 수 있는 일정한 각 B가 발견되었다고 하자. 이것은 타원의 지름 AB에 대한 초점들 사이의 거리 SH처럼 반지름과 같은 길이의 호에 대(對)한다.

두 번째로 일정한 길이 L은 같은 비율로 반지름일 수 있다.



[그림 2] Kepler의 방정식에 대해 Newton의 해법을 덧붙인 작도

그리고 이것들은 발견되어지고 그 문제는 다음에 오는 해석에 의해 해결될 수 있다. 임의의 작도에 의해(또는 심지어 추측에 의해서도), 그것의 실제 자리 p 가까이에 그 행성의 위치 P를 안다고 가정하자. 그래서 타원의 지름에 관한 비율로부터 세로좌표 PR을 타원의 축과 만나게 하면 외접원 AQB의 세로좌표 RQ가 주어질 것이다. 여기서 세로좌표는 각 AOQ의 싸인값이다. AO는 반지름이 된다고 가정하고 또한 P로 그 타원을 자른다고 하자. 만약 그 각이 참에 가까운 수들을 가지고 대략적인 계산법에 의해 발견되어졌다면 충분할 것이다.

우리는 또한 시간에 비례하는 각을 알 수 있다고 가정하자. 즉 그 시간은 물체가 타원 안에서 1회전하는 시간에 대한 호 Ap를 그렸던 때와 마찬가지로 4개의 직각을 이루게 된다. 이 각을 N이라 하자. 그리고 나서 각 D를 정하자. 그 각 D는 반지름에 대한 각 AOQ의 싸인값만큼 각 B를 이루게 되며, 각 E는 그 길이 L이 각 AOQ의 코싸인값에 의해 축소되기 때문에 그로 인해 각 $N-AOQ+D$가 되고, 이 때 그 각은 직각보다 작아지거나 또는 그것에 의해 커질 때 증가된다.

다음에 각 F를 정하자. 그 각은 반지름에 대한 각 $AOQ+E$의 싸인값만큼 각 B를 이루게 되며, 각 G는 그 길이 L이 각 $AOQ+E$의 코싸인값에 의해 축소되기 때문에 그로 인해 각 $N-AOQ-E+F$가 되고, 이 때 그 각

은 직각보다 작아지거나 또는 그것에 의해 커질 때 증가된다.

세 번째로 각 H를 정하면 그 각은 반지름에 대한 각 $AOQ+E+G$의 싸인 값만큼 각 B를 이루게 되며, 각 I는 그 길이 L이 각 $AOQ+E+G$의 코싸인 값에 의해 축소되기 때문에 그로 인해 각 $N-AOQ-E-G+H$가 되고, 이 때 그 각은 직각보다 작아지거나 또는 그 직각이 커지면 그로 인해 증가된다. 그래서 우리는 무한으로(in infinitum) 진행할 수 있다.

마지막으로 각 $AOQ+E+G+I+\cdots$ 와 같은 각 AOq를 잡고 그것의 코싸인으로부터 Or과 세로좌표 pr을 잡으면, 보다 큰 타원에 대한 타원의 작은 축만큼 그것의 싸인값 qr이 되고, 그러면 물체의 정확한 위치 p를 잡을 수 있을 것이다. 각 $N-AOQ+D$가 음수가 될 때, 각 E의 $+$는 어디에서든지 $-$로 변하고, $-$는 $+$로 변한다. 그리고 각 G와 I의 표시에 대해서도 마찬가지인데 그 경우 각 $N-AOQ-E+F$와 $N-AOQ-E-G+H$가 음수가 된다. 그러나 무한급수 $AOQ+E+G+I+\cdots$ 는 너무 빨리 수렴하므로, 두 번째 항 E를 지나 계속해서 진행하는 것이 항상 필요하지는 않을 것이다. 그리고 그 계산법은 이 정리에 기초를 두었고, 범위 APS는 호 AQ와 초점 S에서 반지름 OQ위에 수직으로 떨어지는 직선 사이의 차이에 정비례하여 변화한다."

이 구절은 사실상 다음과 같이 이해해야 할 것이다. 사실상 가로축을 "반지름" $a=1$이 되도록 줄였다고 가정하자.

$\angle B$는 e라디안이라고 하자.(57.29578도에 대한 $\angle B$의 비율은 $2b/2a=e$와 같고, "반지름과 같은 길이의 호에 대(對)하는 각은 $360a/2\pi a=360/2\pi=1$라디안 "이므로 뉴튼의 기록처럼 57.29578은 대략 1라디안이다.).

$L/a=1/e$이 되는 L을 가정하자(그러면 $L^{-1}=e$). p는 행성의 위치라고 하고, P는 p의 초기 추정이라고 하자. 위에서처럼 p를 정하면 그것은 이심근점이각(離心近點離角), $\angle AOq$ 계산을 만족시킨다는 것에 주목하자.

$\angle AOQ=x_0$는 $\angle AOq$의 첫 번째 추정이라고 하자. $\angle AOq$는 다음과 같이 결정된다.

$\angle N/2\pi=t/T$가 되는 $\angle N$을 가정하자(그러면 $\angle N=2\pi t/T=M$, 평균근

점이각). $\angle D/\angle B=\sin(\angle AOQ)/a$가 되는 $\angle D$를 가정하고(그러면 $\angle D=e\sin x_0$), $\dfrac{\angle E}{\angle N-\angle AOQ+\angle D}=\dfrac{L}{L-\cos(\angle AOQ)}$이 되는 $\angle E$ ($x_0=\angle AOQ$에 관한 수정 c_0)를 가정하면

$$c_0=\angle E=\frac{L(\angle N-x_0+\angle D)}{L-\cos x_0}=\frac{M-x_0+e\sin x_0}{1-e\cos x_0} \tag{2. 4}$$

는 $x_1=x_0+c_0=\angle AOQ+\angle E$를 산출한다. 마찬가지로 같은 공식을 사용하여 각각 $x_1=\angle AOQ+\angle E$와 $x_2=\angle AOQ+\angle E+\angle G$, 등등으로부터 연속적으로 $\angle G=c_1$, $\angle I=c_2$, 등등이 결정되고, $\angle AOq=\angle AOQ+\angle E+\angle G+\angle I+\cdots$이다. 즉 $x_*=x_0+c_0+c_1+c_2+\cdots$.

방정식 (2. 4)은 정확하게 $f(x)=x-e\sin x-M$인 $c_0=-f(x_0)/f'(x_0)$이고 그 다음의 수정 c_i들은 (1. 1)의 적용과 같다. 분명히 이 구절을 뉴튼-랩슨 방법의 예로 인정한 최초의 것은 1882년 아담스(John Cauch Adams)였다. 여기에서 뉴튼의 방법은 비다항방정식(nonpolynomial equation)을 풀기 위한 반복적 과정에서 처음 사용되었다. 이것은 뉴튼이 그의 방법을 단지 유리정다항방정식들(rational integral polynomial equations)에 관해서만 사용했다는 반복되는 주장과 좋은 대조를 이루고 있고 무리방정식과 초월방정식으로의 확대는 심프슨(Tomas Simpson)에 의해 처음으로 만들어졌다. 그러나 이 구절이 그 논쟁에 대한 기하학적 모호성을 야기했지만, 일반적으로 뉴튼-랩슨 기법의 역사적 발전에 이 구절이 어떤 영향을 발휘하지는 않은 듯하다. 게다가 뉴튼이 미적분의 사용을 그의 기법에 관련지었다는 분명한 증거는 없다. 미적분의 사용이 필요하지 않은 이 과정을 끌어내는 방법은 매우 많다. 예를 들어 순수하게 기하학적인 전개는 심프슨의 에세이 제 3판[4]에 제시된다. 단지 『자연 철학적 수학의 원리』의 세 번째 간행본에서 인용된 그 구절은 1713년의 두 번째 간행본에서 똑같은 구절을 복사했다. 이 구절은 1687년의 첫 번째 간행본과 같은 구절을 수정한 것이다. 다른 개정판들은 [2, VI, p314-318]에서 논의되었고, 4절에서 논의된 『무한급수의 방정식에 의한 해석』에서 뉴튼에 의해 앞서 소개된 접근방법과 일치하는 이 방법의 기원을 제시했다. 다음의 [2, VI, p314-318]에서 $x_*=x_i+e_i$라 놓고 (2. 2)을 고쳐 쓰면

$$M = x_i + e_i - e\sin(x_i + e_i)$$

$$= x_i + e_i - e(\sin x_i[1 - \frac{1}{2}e_i^2 \cdots] + \cos x_i[e_i - \cdots])$$

$$= x_i + e_i - e(\sin x_i \cos e_i + \cos x_i \sin e_i)$$ 이고

이것은 $x_{i+1} = x_i + c_i$ 를 되풀이하게 하여

$$M - x_i + e\sin x_i = e_i(1 - e[\cos x_i - \frac{1}{2}e_i \sin x_i \cdots])$$

$$\approx e_i(1 - e\cos(x_i + \frac{1}{2}e_i))$$ 인 것으로부터 된 것이다. 여기서

$$e_i \approx c_i = \frac{M - x_i + e\sin x_i}{1 - e\cos(x_i + \frac{1}{2}c_{i-1})} \tag{2. 5}$$

후자의 형식은 분명히 『자연 철학적 수학의 원리』 의 첫 번째 간행본 안에 일치하는 구절에서 뉴튼에 의해 분명히 사용하려고 했으나 약 1690년으로 거슬러 올라가서 주석[2, VI, p315-316]에서 퇼리에(Fatio de Duillier)가 지적했듯이 뉴튼의 형식은 결점이 있었다. 오히려 (2. 5)형식을 반영하여 그 장을 교정했고, 뉴튼은 그 다음의 간행본에서 (2. 4)형식에 도달하기 위해 $\frac{1}{2}c_{i-1}$ 항을 생략하는 단순한 양자택일을 채택하였다. 이 개정판에서 미적분에 의한 역할이 있었다면 어떤 역할이었는지는 분명하지 않다.

3. 랩슨의 공식화

1690년에 랩슨(Joseph Raphson, 1648-1715)은 다항방정식 풀이에 관해 새로운 비법이 제시된 소책자 『일반방정식의 분석』 (Analysis equationum universalis)을 발간했다. 이 소책자의 두 번째 간행본은 뉴튼에 관한 기록과 함께 1697년에 한 권의 책으로 발간되었다. 랩슨이 윌리스에게 보낸 자필로 된 증정, 즉 같은 필적으로 보이는 그 원문에 대한 수정문을 포함하며, 그리고 [1]과 [5]에서 묘사된, 부록은 없으나 서문은 포함하고 있는 랩슨의 소책자 사본이 마이크로 필름[6]에 이용할 수 있고 우리의 논평을 위한 기초가 된다. 그 책의 일반적 설명은 [5]에서 제시되었고 [7]은 랩슨의 문제 9를 포함한다. 문제 9는 [표 2] 에 재현되고 있다.

PROBLEMA. IX

Proponature a a a - b a = c Aequatio secundae Formulae

Numeris a a a - 2 a = 5

Theor. x = c + bg -ggg

3gg - b

2 = g　　5 = c　2 , 1 = g　　2 , 1000

4 = bg　2 , 1　　- , 0054

-8 = ggg

3gg = 12 +9　　9　　21　　2 , 0946 = g

b = -2　　42　　2 , 0946

10)+1 , 0(+ , 1 = x　　4 , 41 = gg　　125676

2 , 1　　83784

188514

441　　418920

882

4 , 38734916 = gg

3gg = 13 , 23　　-9 , 216 = ggg　　2 , 0946

b = -2 ,　　+9 , 200

2632409496

+11 , 23)　　- , 06100(- ,0054 = x　　1754939664

3948614244

13 , 16204743 = 3gg　　4 , 1892 = bg　　8774698320

-2 , = b　　5 , = c

-9 , 189741550536 = ggg

+11 , 16204748　　9 , 1892　　+9 , 1892 = bg + c

+11 , 16205) - , 000541550536

(- , 000048517 = x

2 , 0946

- , 000048517

2 , 094551483 = g

[표 2]. $x^3-2x-5=0$ 의 풀이에 관한 랩슨의 방법

여기서 랩슨은 미지수 a가 있는 $a^3-ba-c=0$ 형태의 방정식을 생각하고, 만약 g가 해 x_*의 추정이고

$$x=\frac{c+bg-g^3}{3g^2-b} \tag{2. 6}$$

이라면 더 나은 추정은 $g+x$처럼 얻을 수 있다는 것을 가리키고 있다.

형식적으로 이것은 $f(a)=a^3-ba-c$ 으로 $g+x=g-\frac{f(g)}{f'(g)}$ 의 형태이다. 그래서 랩슨은 이 공식을 방정식 $a^3-2a-5=0$ 에 반복적으로 적용한다.

초기 추정 $g=2$로부터 출발하여 랩슨은 $x=0.1$, -0.0054, -0.000048517 과 -0.0000000014572895859, 그리고 x_*의 추정들 $g=2$, 2.1, 2.0946, 2.094551483과 $2.09455148154271014$1에 일치하는 수정들을 연속적으로 계산한다. 방정식 $x^3-2x-5=0$ 는 앞서 II장 1절에서 논의되었고, 거기에서 그 방정식의 해에 관한 뉴튼의 기법을 분석했다. 두 가지 방법들은 수학적으로 같지만, 랩슨과 뉴튼의 계산들 사이의 구별은 해의 더 정확한 추정치 g가 연속적으로 적용되며 뉴튼이 사용했던 중간의 다항식들을 생성할 필요 없는 (2. 6)을 랩슨은 반복하여 사용한 것이다.

뉴튼과 랩슨에 의해 계산된 수들이 차이가 난 이유는 부분적으로 II장 1절에서 정의된 g_3에 관한 다항식의 전개에서 한 항을 뉴튼이 고의적으로 생략했기 때문이다. 또한 랩슨은 연속적인 반복에서 계산된 모든 중요한 자릿수(digit)들을 보존한 반면에 뉴튼은 그의 방법의 각 단계에 의해 생성된 단지 처음 몇 개의 중요한 자릿수(digit)들만을 사용했다.

랩슨은 그의 저서에서 30개 이상의 예(example)와 공식을 제시하고 있다. 각각의 경우에 그것들은 10차까지의 다항식들을 포함하고 있다. 수정항 x에 관한 식의 출처는 (2. 6)에 주어진 것처럼 그 소책자의 서문에 묘사되었고, 반복해서 사용된 특별한 방정식에 관한 최초의 수정공식은 유도해 냈지만 정확하게는 이항전개를 사용하여 앞서 II장 1절에서 뉴튼이 묘사한 것에 의해 사용되었다.

그러므로 랩슨은 본래 (1. 1)을 사용했지만 뉴튼의 제시에서처럼 랩슨은 도함수항 형태로 미적분의 규칙을 사용하기보다는 오히려 순전히 대수적으로 나아갔고, 모든 경우에 있어서 그는 다항식들처럼 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 에 대응하는 표현들을

전부 자세하게 썼다. 그 책은 다항방정식의 다양성에 관한 적당한 수정공식이 주어진 긴 일련의 표로 끝난다. 유율법에 관하여 랩슨의 그 후의 광범위한 연구에도 불구하고 다항방정식에 관한 그의 반복적 기교와 미적분을 전혀 관련시키지 않은 것은 [1]에서 설득력 있게 주장했고, 그는 방정식들의 다른 종류들에 그것을 전혀 확장시키지는 않았다. 그럼에도 불구하고 계산적인 편리성을 충분히 개선한 반복적 공식화에 관한 뉴튼 방법의 중요한 발전이 되는 랩슨의 공식화를 생각하는 것이 타당하다.

다음의 영국 왕립 학회(Royal Society)의 정기 간행물에 기록돼 있고, [5]로부터 인용된 랩슨의 기법에 관한 논평은 주목할 만하다.

"1690년 6월 30일, 할레(Halley, E.)가 말했는데 랩슨은 모든 종류의 방정식을 풀이하는 방법을 창안하였고, 무한급수 안에 그 방정식들의 근들이 주어지고, 빨리 수렴하며, 그는 5차 다항방정식들의 해법을 원했고 비예트의 알려진 방법들에 의해 이룩될 수 있었던 것 보다 훨씬 짧은 시간에 표 7 에 충실한 해답을 제출했다."

"1690년 12월 17일, 랩슨의 책은 요즘 할레에 의해 제작되었고, 그 책에서 그는 일반적인 규칙에 의해 모든 방정식들의 근들을 어떻게 구하는지를 보여주는 *ye* 방법의 주목할 만한 진보를 이루는데, 그것에 의하면, 연산에 의해 알려진. 근의 수는 두 배가 된다. 따라서 3 또는 4회 반복에 의해 *yt* 는 8 또는 10자리의 숫자에 충실한 근들을 발견한다."

그러므로 랩슨의 기법은 비예트의 기법과는 비교되지만, 반면에 뉴튼의 방법은 비록 그것이 윌리스의 대수학에는 나타났었지만 언급되지는 않는다. 5차 다항방정식들의 해법에 관한 언급의 중요성은 4차까지의 모든 다항방정식들에 관한 근들의 분석적 해법은 알려졌지만 5차에 관한 일반적인 공식은 없다고 알려졌었고(실제로 존재하지 않음) 랩슨은 그럼에도 불구하고 수치해법들은 얻어질 수 있다고 증명하였다. 끝으로 이차수렴의 특성은 처음부터 다시 주의해야 한다는 것은 주목 할만하다.

랩슨의 일생에 대해 몇 가지 검증할 수 있는 항목들은 [5]에서 거론되었다. 비록 뉴튼이 랩슨의 마지막 저서 Hitoria fluxionum에 자기 이익만 차리는 부록을 붙이기 위해 랩슨의 죽음이라는 상황을 이기적으로 이용한 듯 보이기는 하지만 뉴튼과 랩슨의 접촉은 매우 한정적이었던 것 같다. 1690년 그의 소책자 서문에서 랩슨은 뉴튼의 연구를 언급하고 있지만 그가 자신의 방법은 "믿건대 기원이

같지 않을 뿐만 아니라 분명히 전개도 같지 않다"[6], [7]고 진술하고 있다. 1697년 그의 책의 부록에 있는 뉴튼에 관한 참조문들은 명백히 방정식들을 풀기 위한 그의 방법이라기보다는 오히려 이항전개에 관해 뉴튼의 사용을 언급하고 있다.[1],[5].

1798년에 라그랑쥬(Lagrange, J.)는 "이 두 가지 방법은 비슷한 시기에 발표되었을 뿐이다."라고 평하였고, 랩슨의 기교는 "뉴튼의 방법보다 더 간단하다" 왜냐하면 "계속해서 변형시키지 않아도 된다"고 하였지만 그 두 가지 방법은 사용자들에 의해 오랫동안 별개의 것처럼 간주되었다. 게다가 특히 뉴튼과 랩슨의 방법들 사이의 비교에 관한 것과 이 방법들에서 미적분학의 역할을 인정하려 하지 않는 역사적 세부사항들은 [1]에 나타난다.

III. 결론

방정식의 근을 구하는 방법은 수학에서 가장 오래 된 문제들 중의 하나일 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용해서 근을 찾는 수치해석 분야에서도 관심의 대상이 되고 있다. 이런 방법들 중 뉴튼 방법은 비교적 빠르고 널리 쓰이는 것으로 알려져 있다.

본 논문에서는 아라비아 대수학자들과 비에트의 저서에 있는 선구자들로부터 라그랑쥬에 의한 현대함수 형태의 공식에 이르기까지 뉴튼, 랩슨의 공헌도에 초점을 맞추어 방법(1. 1)의 발전을 논하였다.

뉴튼-랩슨 방법의 역사적 발전 과정을 통해 다음과 같은 결론을 예상할 수 있다.

(1) 뉴튼-랩슨 방법은 역사적 사실에 매우 가깝게 표현된 명칭인 듯하다.

(2) 현재 그 방법은 컴퓨터 프로그램에 보편적으로 내장되어 있으며, 수 많은 교재에 뉴튼의 이름과 함께 소개되고 있음을 알 수 있다.

(3) 뉴튼-랩슨 방법은 오래 전에 알려진 방법이지만 실제로 활용하기 시작한 것은 컴퓨터가 발달된 최근의 일이다.

(4) 현재 우리 나라에는 數學史 硏究分野에 대한 資料와 情報가 많지 않은 상태이다. 이와 같은 현실을 감안하면 이 연구는 數學史를 연구하고자 하는 사람들에게 약간의 도움은 줄 수 있으리라 생각된다.

(5) 중학교 교과과정에서 적용해 볼 수 있는 방법들을 찾아볼 수 있다.

예를 들어 $n(n-2)=195$ 와 같은 두 자연수 n, $n-2$ 를 구하는 과정에서 $n^2 \approx 195$ 라 놓고 195 근방의 완전제곱수를 구하여 $n=15$ 임을 찾아낼 수 있다. 이러한 경우는 인수분해를 이용하지 않고도 할 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] N. KOLLERSTROM. Thomas Simpson and "Newton's method of approximation" : an enduring myth, Brit. J. Hist. Sci.. 25(1992), p.347-354.

[2] D. T. WHITESIDE, ED., The Mathematical Papers of Isaac Newton, Volumes I-VII, Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1976.

[3] A. E. ROY, Orbital Motion, 3rd ed., Adam Hilger, Philadelphia, 1988.

[4] T. SIMPSON. Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks. Illustrated by a Variety of Examples, London, 1740.

[5] D. J. THOMAS, Joseph Raphson, F. R. S. Notes Rec. Roy. Soc. London, 44(1990), p 151-167.

[6] J. RAPHSON, Analysis aequationum universalis seu ad aequationes algebraicas resolvendas methodus generalis, et expedita, ex nova infinitarum serierum doctrina deducata ac demonstrata, London, 1690, Microfilm copy: University Microfilms, Ann Arbor, MI.

[7] N. BICANIC AND K. JOHSON, Who was "-Raphson"? Internat. J. Numer. Meth. Engrg..14(1979), p 148-153

[8] 김용운, 김용국, 數學史大全 , 우성문화사, 1986

[9] Florian Cajori 著, 정지호 譯, 數學의 歷史, 창원사, 1983