Bessel의 미분 방정식의 한 해법과 Bessel 함수의 성질에 관한 고찰

고 충 석

차 례

Ko Chung-suk : A Solution of Bessel's Differential Equation and Properties of Bessel Functions

SUMMARY

Bessel's differential equation, which was set up by German mathematician F. W. Bessel, is the linear homogeneous ordinary differential equation of the second order, of the form

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0 \qquad (\alpha\geqq 0:\text{const.}).$$

The solution of teh above equation can be obtained comparatively easily because the equation has a regular poinr. In general, differential equations possess various solutions. However, in the case of those equations of the Fuchsian type which have regular singular points, solutions by the use of power series have been the commonest since the days of Sir Isaac Newton.

In this article, a solution expressed in power series is applied to Bessel's equation. This kind of solution, though useful, gives some considerably difficult problems according to the value of α. In such a case we can obtain the solution by the method of Frobenius, regarding α as a parameter. Bessel functions, solutions of Bessel's equation, are obtained more easily by the use of the Gama function. Although Bessel functions cannot be generally expressed in terms of elementary functions, the Bessel function in the form

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

can be expressed in terms of trigonometrical functions. Therefore there is much resemblance between the two function. As both sine and cosine function are periodic ones, Bessel functionscan be expanded in Fourier series.

Ⅰ 서 론

Bessel의 미분방정식은 독일의 F. W. Bessel (1784~1846)에 의하여 연구된 제2계 동차선형 상미분방정식이며 Fuchs형의 미분방정식에서도 대표적인 성질을 가진 미분방정식이다. 그리고 응용수학에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. Bessel의 미분방정식의 성질에는 Fuchs형의 미분방정식에 공통되는 여러가지의 수학적인 성질이 존재하고 있으므로 Bessel의 미분방정식의 해법을 해명한다는 것은 Fuchs형의 미분방정식의 해법을 해명하는데 좋은 시사가 될 것이다. 그러므로 Bessel의 미분방정식의 해법을 해명한다는 것은 중요한 의의가 있는 것이다. 여기에서는 Bessel의 미분방정식의 해를 해명하는 방법으로 Taylor의 건급수(巾級數)에 의한 해법으로 시행코저 한다. 제2계 동차선형 상미분방정식이라 할지라도 건급수에 의한 해법이 반드시 가능한 것은 아니므로 제2계 동차선형미분방정식인 Bessel의 미분방정식의 경우에 건급수에 의한 해법이 과연 가능할 것인가를 고찰하고 Bessel의 미분방정식의 해를 구성하는 함수에는 어떤 함수가 있는가를 고찰하는 동시에 해를 구성하는 함수 즉 Bessel함수는 어떤 성질이 있는가를 고찰코저 한다.

Ⅱ 본 론

Bessel의 미분방정식의 해법과 Bessel 함수의 성질을 고찰하기 위해서는「함수의 성질이 중요한 역할을 하고 있으므로, 미리 준비과정 으로 「함수의 초등적인 몇가지 성질을 기술코저 한다.

1. Γ 함수의 정의및 성질

(i) 정의 : Γ 함수 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad (\alpha>0)$

(ii) 성질 :

ㄱ) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)\ (\alpha>0)\cdots\cdots(1\cdot1)$

$$\because\ \Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^{\alpha+1-1}e^{-x}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N x^\alpha e^{-x}dx$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\left\{\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_{\varepsilon}^{N}+\alpha\int_{\varepsilon}^{N}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right\}=\alpha\int_{0}^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

우변의 부분적분에서 제1항은 부정형으로 되지만 L'Hospital의 법칙에 의하여 0이되므로.

ㄴ) n이 자연수일 때

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1) \qquad (n>1)$$

$$=(n-1)!\cdots\cdots(1\cdot 2)$$

특히 $\Gamma(1)=1$

ㄷ) n이 자연수가 아닐 때

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+m+1)=(\tfrac{1}{2}+m)(-\tfrac{1}{2}+m)\cdots\cdots\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2m+1)}{2^{2m+1}}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{(2m+1)!}{m!\,2^{2m+1}}\Gamma(\tfrac{1}{2})\cdots\cdots(1\cdot 3)$$

특히 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\cdots\cdots(1.4)$

윗식에서 $\alpha>1$인 경우는 $\Gamma(\alpha)$를 $0<\alpha<1$인 경우의 $\Gamma(\alpha)$로 바꿀 수 있다.

윗식 (1·4)의 관계는 확률론에서 매우 중요하므로 증명을 하면

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_{0}^{\infty}t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \quad \text{에서}$$

$x=\sqrt{t}$ 라 놓으면 $dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dx$

따라서 $\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ 로 된다.

여기서 $I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ 라 놓으면

$$I^2=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

우변이 적분영역은 x, y 평면상에서 제1상한 전체이므로 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 라 놓고

(x, y)를 (r, θ)로 변수변환하면

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r \quad (>0)$$

$$\therefore\ I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot r\cdot dr\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

따라서 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 이다.

ㄹ) n이 0또는 음의정수 $(-n)$일때

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad \text{에서}$$

$$\Gamma(0)=\lim_{n\to\pm 0}\frac{\Gamma(n+1)}{n}=\pm\infty \qquad (\text{복부호동순})$$

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{(-n)}=\frac{\Gamma(-n+2)}{(-n)(-n+1)}=\cdots\cdots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=\pm\infty \cdots (1\cdot 5)$$

이때 Γ 함수는 발산한다.

2) Beessel의 미분방정식의 한해법

Bessel의 미분방정식은 α를 정수로 하는 제2계 동차선형미분방정식

$$L(y,\alpha)=x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0 \qquad (\alpha\geqq 0)\cdots\cdots(2\cdot 1)$$

를 말하며 α를 Parameter로 생각하면 (2·1)은 제α차의 Bessel의 미분방정식이다. 그러므로 α의 값에 따라서 (2·1)의 해는 정해지므로 다음의 3경우에 대하여 일반해를 구하기 위하여 서로 일차독립인 기본해 $y_1(x)$, $y_2(x)$를 구하고저 한다.

(i) α가 0 또는 양의 정수에 같지 않을 경우

$x=0$는 (2·1)의 확정특이점이므로 ($x=\infty$도 확정특이점 이다) (2·1)의 해는

Taylor급수를 확대시킨 형인

$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n \quad (C_0\neq 0)\cdots\cdots(2\cdot 2)$와 같은 x^λ라는 인수와 한개의 수렴가능한 전급수와의 적인 형식의 해가 존재한다고 가정하고 미정지수λ와 계수 C_n를 결정코저 한다. (2·2)를 2회미분하여

$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)C_nx^{\lambda+n-1}$, $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)x^{\lambda+n-2}$ 를 (2·2)에 대입하여 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda+n-1)C_nx^{\lambda+n}+\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)C_nx^{\lambda+n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{\lambda+n-2}-\alpha^2\sum_{n-0}^{\infty}C_nx^{\lambda+n}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(\lambda+n)^2-\alpha^2\}C_nx^{\lambda+n}=-\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{\lambda+n+2}=-\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{\lambda+n}$$

윗 등식에서 x의 최저누승으로부터 차례로 좌우 양변의 계수를 비교하면

$\{\lambda^2-\alpha^2\}C_0=-C_{-2} \qquad (\therefore\ C_{-2}=0)$

$\{(\lambda+1)^2-\alpha^2\}C_1=-C_{-1}=0 \qquad (\therefore\ C_{-1}=0)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\{(\lambda+n)^2-\alpha^2\}C_n=-C_{n-2} \quad (n\geqq 2)$를 얻는다. 제1식

즉 (지수방정식)에서 근$\lambda=\pm\alpha$를 얻는다. 지금 $\lambda=\alpha(>0)$를 택하면 제2식에서 $C_1=0$, 마지막 식에서 $C_3=C_5=\cdots\cdots=0$를 얻는다. 또 C_0는 임의이므로 간단히 $C_0=1$로 하면

$$C_2=\frac{-1}{2^{2\times1}(\alpha+1)},\quad C_4=\frac{(-1)^2}{2^{2\times2}\cdot2(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$$C_6=\frac{(-1)^3}{2^{2\times3}\cdot2\cdot3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

일반적으로 $C_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

따라서 (2·2)는

$$y(x)=x^{\alpha}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}x^{2n}\}$$

라는 형식의 해를 얻게 되었다. 그런데 우변의 무한급수에서 계수 C_0를 다시 $\dfrac{1}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}$로 정하기 위하여 곱하면

$$y(x)=\frac{x^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}(\frac{x}{2})^{2n}\}$$

로 되며 제1의 해는

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}(\frac{x}{2})^{\alpha+2n}\cdots\cdots(2\cdot3)$$

으로 표시된다. 우변의 함수는 α차의 제1종의 Bessel 함수 $J_{\alpha}(x)$이다.

다음에 제2의 해를 구하기 위하여 $\lambda=-\alpha(<0)$ 일때에도 앞의 (i)의 경우와 똑같이 하면 $C_1=C_3=C_5=C\cdots\cdots=0$되며 $C_0=1$로 하면 α가 양의 정수에 같지 않을 경우에

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+n)}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots\cdots)$$

따라서 이 경에는 (2·2)는 다음과 같은 제2의 해

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\alpha+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+2n}\cdots\cdots(2\cdot4)$$

를 얻는다. 우변의 함수는 $-\alpha$차의 Bessel 함수 $J_{-\alpha}(x)$이다. 지금까지의 과정에서 (2·2)를 구성하는 미지정수 λ와 계수 C_n는 얻었지만 (2·3)과 (2·4)에서 무한급수로 표시된 함수 $J_\alpha(x)$와 $J_{-\alpha}(x)$가 (2·1)의해로서 과연 적합하는가? 즉 수렴하는가를 고찰해 보자. (2·3)과 (2·4)에서 D'Alembert의 판정법을 시행하면

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)}}{\Gamma(n+2)\Gamma(\pm\alpha+n+2)}\bigg/\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\pm\alpha+n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(n+1)(\pm\alpha+n+1)}\right|=0$$

즉 수렴반경 r는 ∞이다. 따라서 $J_\alpha(x)$와 $J_{-\alpha}(x)$는 $0<|x|<\infty$에 대하여 절대수렴한다. 그러므로 (2·3)과 (2·4)는 Bessel의 미분방정식 (2·1)의해로서 적합하다. 그리고 명백히 $J_\alpha(x)$와 $J_{-\alpha}(x)$의 비는 정수가 아니므로 $J_\alpha(x)$와 $J_{-\alpha}(x)$는 서로 1차독립인 기본해이다.

(ii) $\alpha=0$인 경우.

이 경우는 Bessel 의 미분방정식 (2·1)은

$L(y,0)=x^2y''+xy'+x^2y=0\cdots\cdots(2\cdot5)$로 된다.

이 경우에도 $x=0$는 (2·5)의 확정특이점 이므로 (i)의 경우와 똑같이 (2·5) 의해를

$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ ($C_0\neq0$) 와 같이 가정하고 y', y''를 계산하여 (2·5) 에 대입하고 정리하면

$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)^2C_nx^{\lambda+n}=-\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{\lambda+n}$ 에서 x의 최저누승으로 부터 차례로 좌우 양변의 계수를 비교하면

$\lambda^2C_0=-C_{-2}=0$ $(\therefore C_{-2}=0)$

$(\lambda+1)^2C_1=-C_{-1}=0$ $(\therefore C_{-1}=0)$

…………

$(\lambda+n)^2C_n=-C_{n-2}$ $(n\geqq2)$ 등을 얻는다.

제1식 (지수방정식) 에서 근 $\lambda=0$의 2중근을 얻는다. $x=0$에 대응하는 제1의해 $y_1(x)$는 (i)의 경우와 똑같이 하여 구할 수 있으나 이것과 1차독립인 제2의해 $y_2(x)$를 구하는 것은 다

음과 같은 방법 즉 Forbenius의 방법에 의하여 구하고저 한다. 지금 λ를 Parameter로 생각하고 위의 제2및 마지막 식에서

$C_1=C_3=C_5=\cdots\cdots=0$ 그러므로 $(\lambda+2n)^2C_{2n}=-C_{2n-2}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 에서

$C_0=1$로택하면

$$C_2=\frac{-1}{(\lambda+2)^2},\quad C_4=\frac{(-1)^2}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2},\quad C_6=\frac{(-1)^3}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2(\lambda+6)^2},\ \cdots\cdots$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\cdots(\lambda+2n)^2}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

이들 계수 $y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ $(C_0\neq0)$ 에 대입하면

$$y(x)=Y(x,\lambda)=x^\lambda\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\cdots(\lambda+2n)^2}x^{2n}\}\cdots\cdots\cdots(2\cdot6)$$

(2·6) 를 (2·5) 에 대입하면

$L((x,\lambda))=x^2Y''(x,\lambda)+xY'(x,\lambda)+x^2Y(x,\lambda)=\lambda^2x^\lambda$ 로 되며

$\lambda=0$라 놓으면 $L(Y(x,\lambda))=0$가 되므로

(2·5) 의 제1의 해는

$$y_1(x)=Y(x,0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^24^2\cdots\cdots(2n)^{2n}}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{0+2n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot7)$$

이며 우변의 함수는 0차의 제1종의 Bessel 함수 $J_0(x)$ 이다. 그리고 $J_0(x)$는 평등수렴하고 또한 절대수렴하는 무한급수가 됨은 Bessel 함수의 정적분표시의 관계식을 사용하면 간단히 증명할 수 있다*.

다음에 제2의해 즉 $y_1(x)=J_0(x)$와 1차독립인해 $y_2(x)$를 구하기위하여

$L(y(x,\lambda))=\lambda^2x^\lambda$를 λ로 편미분하면

L와 $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ 는 교환 가능하므로

$L[\frac{\partial Y\langle x,\lambda\rangle}{\partial\lambda}]=2\lambda\cdot x^{\lambda}+\lambda^2x^{\lambda}\log x$ 에서 $y=0$ 라 놓으면 우변은 0이되므로

(2·5)의 제2의 해는

$y_2(x)=L[\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$ 이다.

계산을 실행하기 위하여 〈2·6〉에서

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda}=x^{\lambda}\log x,$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{(\lambda+2)^2}=-\frac{2}{(\lambda+2)^2}\{\frac{1}{\lambda+2}\},$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2}=-\frac{2}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2}\{\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda+4}\},$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2(\lambda+6)^2}=-\frac{2}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2(\lambda+6)^2}\{\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda+4}+\frac{1}{\lambda+6}\},\ \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\cdots(\lambda+2n)^2}=-\frac{2}{(\lambda+2)^2(\lambda+4)^2\cdots(\lambda+2n)^2}\{\frac{1}{\lambda+2}+\frac{1}{\lambda+4}+\cdots+\frac{1}{\lambda+2n}\},$$

………… 을 사용하면

$$y_2(x)=L[\frac{\partial(Y x,\lambda)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}=\log x\{1-\frac{1}{(1!)^2}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{(2!)^2}(\frac{x}{2})^4-\frac{1}{(3!)^2}(\frac{x}{2})^6+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}(\frac{x}{2})^{2n}+\cdots\}-\{-\frac{1}{(1!)^2}(\frac{x}{2})^2+\frac{1}{(2!)^2}(1+\frac{1}{2})(\frac{x}{2})^4-\frac{1}{(3!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{x}{2})^6+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})(\frac{x}{2})^{2n}+\cdots\cdots\}$$

$$=\log x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\psi(n)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=J_0(x)\log x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\psi(n)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\qquad (x>0)\ \cdots\cdots\cdots\ (2\cdot8)$$

$$\left(\psi(0=0,\ \psi(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

(2·8) 의 우변의 함수는 0차의 제2종의 Bessel 함수이며 (2·8) 의 우변의 제1항에 $J_0(x)\log x$ 라는 새로운 함수가 나타난다.

(iii) α가 양의 정수 m에 같은 경우 이 경우 Bessel 의 미분방정식 (2·1)은

$L(y,m)=x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0\cdot\cdots\cdots$ (2·9) 로 된다.

$x=0$는 (2·9) 의 확정특이점이므로 (i), (ii)의 경우와 똑같이 (2·9)의 해를

$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n(C_0\neq0)$ 와 같이 가정하고 y', y'', 를 계산하여 (2·9)에 대입하고 정리하면

$\sum_{n=0}^{\infty}\{(\lambda+n)^2-m^2\}C_nx^{\lambda+n}=-\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{\lambda+n}$에서 x의 최저 누승으로부터 차례로 좌우양변의 계수를 비교하면

$\{\lambda^2-m^2\}C_0=-C_{-2}=0\qquad(\because C_{-2}=0)$

$\{(\lambda^2-m^2\}C_1=-C_{-1}=0\qquad(\because C_1=0)$

……………

$\{(\lambda+n)^2-m^2\}C_n=-C_{n-2}\ (n\geqq2)$ 등을 얻는다.

제1식 (지수방정식) 에서 근 $\lambda=\pm m$를 얻는다. m가 정수가 아닐 때에는 (i)에서 이미 $J_m(x)$는 기본해가 되었다. 그런데 m가 양의 정수일 때에는

$J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$** 가 되므로 $J_{-m}(x)$와 $J_m(x)$는 본질적으로 동일한 함수이므로 $J_{-m}(x)$와

$J_m(x)$는 1차 독립인 기본해를 만들 수 없다. 그러므로 m가 양의 정수일 때에는 기본해 $y_1(x)$와 $y_2(x)$를 (ii)의 경우와 같이 Frobenius의 방법에 의하여 구해본다. $\lambda=-m(<0)$에 대하여 제2및 마지막식에서 $C_1=C_3=C_5=\cdots\cdots=0$이고

또 마지막 식의 $\{(\lambda+2m)^2-m^2\}C_{2m}=-C_{2m-2}$에서 C_{2m}의 계수는 0이되므로 C_{2m}를 결정할 수 없다. 그러므로 λ를 Parameter로 생각하고 $C_2, C_4, C_6\cdots\cdots$를 (ii)의 경우와 같이 $\{(\lambda+2k)^2-m^2\}C_{2k}=-C_{2k-2}(k=1,2,3,\cdots\cdots\cdots)$에서 결정하고 (2·9) 의해인

$y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n(C_0\neq0)$에 대입하면

$$y(x)=Y(x,\lambda)=C_0x^\lambda\{1-\frac{x^2}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}}+\frac{x^4}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{x^{2m}}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}}+\cdots\cdots\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot10)$$

(2·10) 를 (2·9) 에 대입하면

$$L(Y(x,\lambda))=C_0(\lambda^2-m^2)x^\lambda\cdots\cdots\ (2\cdot11)$$

로되며 $\lambda=-m$ 라 놓으면 $L(Y(x,-m))=0$ 로 된다. 그러나 여기에서 주의할 것은 (2·10) 의 x^{2m} 이상의항의 분모는 모두 0이 되기 때문에 x^{2m} 이상의항의 분모가 0이 되지 않기 위하여 최초의 계수 C_0는 임의의 값인 것에 착안하여 C_0의 값을 다음과 같이 정한다.

즉 $C_0=a_0\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot12)$

(단a_0는 임의정수)

이와 같이 C_0를 정하면 (2·10) 의 x^{2m} 이상의항의 분모는 0가 아니되므로 (2·11) 은

$L(Y(x,\lambda))=a_0\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2\}(\lambda^2-m^2)x^\lambda\cdots\cdots\ (2\cdot13)$ 로 된다.

계산을 편리하기 위하여 (2·10) 을 다음과 같이 2개의식의 합으로 나눈다.

$$Y(x,\lambda)=U(x,\lambda)+V(x,\lambda)$$

$$U(x,\lambda)=a_0\{(\lambda+2)-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}x^\lambda\cdot\{1-\frac{x^2}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}}$$

$$+\frac{x^4}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}}-\cdots\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\cdots\{(\lambda+2m-2)^2-m^2\}}\Bigg]\cdots\cdots\cdots(2\cdot14)$$

$$V(x,\lambda)=(-1)^n a_0 x^{\lambda+2m}\{1-\frac{x^2}{(\lambda+2m+2)^2-m^2}+\frac{x^4}{\{(\lambda+2m+2)^2-m^2\}\{(\lambda+2m+4)^2-m^2\}}$$

$$-\frac{x^6}{\{(\lambda+2m+2)^2-m^2\}\{(\lambda+2m+6)^2-m^2\}}+\cdots\cdots\cdots\}\cdots\cdots\cdots(2\cdot15)$$

위에서 $U(x,\lambda)$는 m개의항을 가진 급수이고 $V(x,\lambda)$는 무한급수이다.

(2·13) 에 $\lambda=-m$ 라 놓으면

$L(Y(x,-m))=0$가 되므로 (2·9) 의 제1의해는

$$y_1(x)=U(x,\ -m)+V(x,-m)=0+(-1)^m a_0 x^m\{1-\frac{x^2}{2^{2\times1}(m+1)}+\frac{x^4}{2^{2\times2}\cdot2\,!\,(m+1)(m+2)}$$

$$-\frac{x^6}{2^{2\times3}\cdot3\,!\,(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}\cdot n\,!\,(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}+\cdots\}$$

$$=(-1)^m a_0 x^m\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\cdot(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n)}(\frac{x}{2})^{2n}\}$$

$$=(-1)^m a_0 2^m m\,!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\Gamma(m+n+1)}(\frac{x}{2})^{m+2n}$$

$$=(-1)^m a_0\, 2^m m\,!\,J_m(x)$$

a_0는 임의정수이므로 $a_0=\dfrac{1}{(-1)^m 2^m\cdot m\,!}$ 로 택하면 $y_1(x)=J_m(x)$········· (2·16) 로 된다.

다음에 제2의해 $y_2(x)$를 구하기 위하여 (2·13) 을 λ로 편미분하면 L와 $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$는 교환가능 하므로

$$\frac{\partial L(Y(x,\lambda))}{\partial\lambda}=L[\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}]$$ 에서

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}a_0\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}(\lambda^2-m^2)x^\lambda$$ 한 후

우변에 $\lambda=-m$를 대입하면 명백히 0가 되므로 (2·9) 의 제2의 해는

$$y_2(x)=L\left[\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}$$ 이다.

즉 $$\left[\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}=\left[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial V(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}=\left[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}+\left[\frac{\partial V(x,\lambda)}{\sigma\lambda}\right]_{\lambda=-m}$$

이다.

먼저 $\left[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}$ 를 계산하기 위하여

$U(x,\lambda)$를 다음과 같이 변형한다.

$$U(x,\lambda)=a_0x^\lambda[\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}-\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots$$

$$\{(\lambda+2m)^2-m^2\}x^2+\{(\lambda+6)^2-m^2\}\cdots\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2\}x^4-\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}\{(\lambda+2m)^2-m^2\}x^{2m-2}]$$

여기서

$$f_1(\lambda)=\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}$$

$$f_2(\lambda)=\{(\lambda+4)^2-m^2\}\{(\lambda+6)^2-m^2\}\cdots\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}$$

$$f_3(\lambda)=\{(\lambda+6)^2-m^2\}\cdots\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$f_m(\lambda)=\{(\lambda+2m)^2-m^2\}$라 놓고

$\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda)$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}f_2(\lambda)$, ………, $\frac{\partial}{\partial\lambda}f_m(\lambda)$를 계산하면

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda)=2f_1(\lambda)\Big[\frac{(\lambda+2)\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}}{f_1(\lambda)}$$

$$+\frac{(\lambda+4)\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+6)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m)^2-m^2\}}{f_1(\lambda)}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(\lambda+2m)\{(\lambda+2)^2-m^2\}\{(\lambda+4)^2-m^2\}\cdots\cdots\{(\lambda+2m-2)^2-m^2\}}{f_1(\lambda)}]$$에서

$[\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda)]_{\lambda=-m}$ 하면 우변의 괄호내의 값은 제1항으로 부터 모두 0가 되고 마지막 항만 이 0가 되지 않는다.

그러므로

$$[\frac{\partial}{\partial\lambda}f_1(\lambda)_{\lambda=-m}=(-1)^{m-1}\cdot 2^{2m-1}\cdot m!(m-1)!$$

똑같이 계산하면

$$[\frac{\partial}{\sigma\lambda}f_2(\lambda)]_{\lambda=-m}=\frac{(-1)^{m-2}\cdot 2^{2m-1}\cdot m!(m-1-1)!}{1!\,2^2},$$

$$[\frac{\partial}{\partial\lambda}f_3(\lambda)]_{\lambda=-m}=\frac{(-1)^{m-3}\cdot 2^{2m-1}\cdot m!(m-1-2)!}{2!\,2^{2\times 2}},\ \cdots\cdots\cdots$$

따라서

$$[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}]_{\lambda=-m}=\frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}a_0m!}{x^m}\sum_{m=0}^{m-1}\frac{(m-1-n)!}{n!}(\frac{x}{2})^{2n}\cdots\cdots\cdots(2\cdot 17)$$

다음에 $[\frac{\partial V(x,\lambda)}{\partial\lambda}]_{\lambda=-m}$ 를 계산하기 위하여 (2·15) 에서

$g_1(\lambda)=(\lambda+2m+2)^2-m^2,\quad g_2(\lambda)=(\lambda+2m+4)^2-m^2,\quad g_3(\lambda)=(\lambda+2m+6)^2-m^2,\ \cdots\cdots$

$\cdots\cdots$라놓고

$$[\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)}]_{\lambda=-m},\quad [\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)g_2(\lambda)}]_{\lambda=-m},\quad [\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)g_2(\lambda)g_3(\lambda)}]_{\lambda=-m}$$

, $\cdots\cdots\cdots$를 계산하면

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)}=\frac{1}{g_1(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}+x^{\lambda+2m}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{g_1(\lambda)}$$

$$=\frac{x^{\lambda+2m}}{g_1(\lambda)}\log x+\frac{x^{\lambda+2m}(-2)(\lambda+2m+2)}{\{g_1(\lambda)\}^2}$$

따라서 $\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)}\right]_{\lambda=-m}\quad\frac{x^m\log x}{2^2(m+1)}-\frac{x^m}{2\cdot2(m+1)}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(m+1)}\right\}$

$$=\frac{x^m\log x}{2^{2\times1}(m+1)}-\frac{x^m\cdot m\,!}{2(m+1)\,!}\left\{1+\frac{1}{m+1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

똑같이 계산하면

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)\,g_2(\lambda)}\right]_{\lambda=-m}=\frac{x^m\log x}{2^{2\times2}2(m+1)(m+2)}-\frac{x^m\cdot m\,!}{2\cdot2(m+2)!}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m+2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}x^{\lambda+2m}\frac{1}{g_1(\lambda)\,g_2(\lambda)\,g_3(\lambda)}\right]_{\lambda=-m}=\frac{x^m\log x}{2^{2\times3}2\cdot3(m+1)(m+2)(m+3)}-\frac{x^m\cdot m\,!}{2\cdot2\cdot3(m+3)\,!}$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^6,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

따라서

$$\left[\frac{\partial V(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}=(-1)^m a_0 x^m\log x\left\{1-\frac{x^2}{2^{2\times1}(m+1)}+\frac{x^4}{2^{2\times2}2\,!\,(m+1)(m+2)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2^{2\times3}3\,!\,(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots\cdots\right\}+(-1)^m\frac{a_0x^m}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}m\,!}{n\,!\,(m+n)\,!}\Big\{\psi(n)$$

$$+\psi(m+n)-\psi(m)\Big\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot18)$$

(2·17) 와 (2·18) 에서

$a_0=\frac{(-1)^m}{2^{m-1}m\,!}$ 라 놓으면

$$\left[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}=-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-1-n)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$\left[\frac{\partial V(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}=\frac{x^m\log x}{2^{m-1}m!}\left\{1-\frac{x^2}{2^{2\times1}(m+1)}+\frac{x^4}{2^{2\times2}2!(m+1)(m+2)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2^{2\times3}3!(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots\cdots\right\}+\frac{x^m}{2\cdot2^{m-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!(n+m)!}\{\psi(n)$$

$$+\psi(m+n)-\psi(m)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=2\log x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\{\psi(n)+\psi(m+n)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

$$+\psi(m)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

$$=2\log xJ_m(x)+\psi(m)J_m(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\{\psi(n)+\psi(m+n)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

지금 $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U(x,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial V(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}$ 로 하고

$Y_m(x)=\left[\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=-m}-\frac{1}{2}\psi(m)J_m(x)$ 라 놓으면

$$Y_m(x)=J_m(x)\log x-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-1-n)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)}\{\psi(n)$$

$$+\psi(m+n)\}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$ 로 된다.

따라서 $y_2(x)=Y_m(x)\quad(x>0)\cdots\cdots\cdots(2\cdot19)$ 이며 m차의 제2종의 Bessel 함수이며 (ii)의 경우와 같이 $J_m(x)\log(x)$ 라는 새로운 함수가 나타난다. $m=0$일 때에는 제2항을 0라하면(2·19)는 (2·8) 과 같게 된다.

그리고 (ii), (iii) 의 (2·8) 과 (2·19) 의 제1항의 급수의 수렴에 관해서는 Mertens의 급수의 승법에 관한 정리를 상기하며 수렴반경을 구하면된다 (증명생략)

3) Bessel 함수의 성질

Bessel 함수는 역사적으로는 궤도상의 유성의 위치를 결정하는데 사용되는 Kepler의 방정식 $X-e\sin X=K$를 풀기 위하여 고안된 것이지만

$$\left(X=K+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)J_n(ne)\sin nK\right)$$

앞에서 Bessel 함수는 Bessel의 미분방정식 의해를 구성하고 있는 사실을 알게 되었으나, 응용수학의 여러가지 분야에서도 널리응용되고 있다. 여기에서는 주로 Bessel의 미분방정식의해와 관련이 있는 다음의 4가지 경우의 성질에 대하여 고찰코저 한다.

(i) Bessel 함수의 정적분 표시

Bessel의 미분방정식 의해인 Bessel 함수를 급수형으로 표시하면 그의 전개중심의 근방에서의 함수의 성질을 조사하는데는 적합하나 전체적인 성질을 조사하는 데는 적당치 않은다. 그러므로 전체적인 성질을 조사하는 데는 해를정적분형으로 표시하는 것이 적당하다.

지금 모함수 $\Phi(x,t)=exp\frac{x}{2}(t-t^{-1})$에 대하여 생각하면 우변은 $exp(\frac{x}{2}t)\cdot exp(-\frac{x}{2}t^{-1})$가 되며, 이것들을 급수로 표시하면

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r t^r\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k t^{-k}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{r!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{r+k}\cdot t^{r-k}$$

여기서 $r-k=m$ 즉 $r+k=m+2k$ 라놓으면

$$exp\frac{x}{2}(t-t^{-1})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(r+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}\cdot t^m$$

윗식에서 t^m의 계수는 $J_m(x)$이며 m는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 변하므로 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}$로 바꾸었다.

$$\therefore exp\frac{x}{2}(t-t^{-1})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J^m(x)t^m$$

$$=J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(x)t^m+\sum_{m=1}^{\infty}J_{-m}(x)t^{-m}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot1)$$

그런데

$$J_{-m}(x)\sum_{k=0}^{\infty}=\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \quad \text{에서}$$

$\Gamma(-m+k+1)=\pm\infty$ $(k=0,1,2,\cdots\cdots,(m-1))$이므로 $J_{-m}(x)$의 제1항으로부터 m개의항 까지 0이다. 따라서

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \quad \text{에서}$$

$k=m+s$ 라 놓으면

$$J_{-m}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+s}}{\Gamma(m+s+1)\Gamma(s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2s}=(-1)^m J_m(x)^{**}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot2)$$

$(3\cdot1)$ 에 $t=ei^{\theta}$ $(i=\sqrt{-1})$ 라 놓으면

$t^m=ei^{m\theta}=\cos m\theta+i\sin m\theta$

$t^{-m}=e^{-}i^{m\theta}=\cos m\theta-i\sin m\theta$

$t-t^{-1}=2i\sin\theta$ 에서

$exp\frac{x}{2}(t-t^{-1})=exp(ix\sin\theta)$

$$=J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(x)(\cos m\theta+i\sin m\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}J_{-m}(x)(\cos m\theta-i\sin m\theta)$$

윗식에 $J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$ 를 적용시키면

$$\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cos 2m\theta$$

$$+2i\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\theta \quad \text{로 되며}$$

복소수의 성질에서

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(x)\cos 2m\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 3)$$

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 4)$$

(3·3) 의 양변에 $\cos 2m\theta$, (3·4) 의 양변에 $\sin(2m-1)\theta$를 곱하여 0에서 π까지 적분하면 (3·3) 에서

$$J_{2m}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta d\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 5)$$

(3·4) 에서

$$J_{2m-1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m-1)\theta d\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 6)$$

또 (3·3) 의 양변에 $\cos(2m-1)\theta$ (3·4) 의 양변에 $\sin 2m\theta$ 를 곱하여 0에서 π까지 적분하면

$$\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos(2m-1)\theta d\theta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 7)$$

$$\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin 2m\theta d\theta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 8)$$

(3·5) 와 (3·8) 에서

$$J_{2m}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta\, d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin 2m\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta+\sin(x\sin\theta)\sin 2m\theta\}d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta-2m\vartheta)d\vartheta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 9)$$

똑같이 하며 (3·6) 와 (3·7) 에서

$$J_{2m-1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\{x\sin\theta-(2m-1)\theta\}\,d\theta \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 10)$$

(3·9) 와 (3·10) 을 한개의 식으로 표시하면

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta$$

$$(n=0,1,2,\cdots\cdots\cdots) \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 11)$$

이것은 Bessel 함수를 삼각함수의 정적분형으로 표시하고 있는 것이며, Bessel 함수와 삼자함수와의 사이에는 밀접한 관계가 있다는 것을 시사하는식이라 하겠다.

다음에 $J_0(x)$가 평등절대수렴 함을 증명해본다.

$$\cos(x\sin\theta)=1-\frac{(x\sin\theta)^2}{2!}+\frac{(x\sin\theta)^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)\frac{(x\sin\theta)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

그런데 $\left|u_n(\theta)\right|=\left|\frac{(x\sin\theta)^{2n}}{(2n)!}\right|\leq\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ 이고

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 는 절대수렴 하므로

Weierstrass의 평등수렴에 관한 정리를 이들에게 적용시키면

$\cos(x\sin\theta)$는 임의의 θ및x에 대하여 평등하고 또한 절대수렴 한다. 그러므로 $\cos(x\sin\vartheta)$의 우변을 θ에 관하여 항별적분 하면

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta=\frac{1}{\pi}\Big[\int_0^\pi d\theta-\frac{x^2}{2!}\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta+\frac{x^4}{4!}\int_0^\pi \sin^4\theta d\theta-$$

$$\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^\pi \sin^{2n}\theta d\theta+\cdots\cdots\cdots\Big]$$

여기서 공식 $\int_0^{\pi} f(\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\theta)d\theta$ 및

Wallis의 공식

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\cdots\cdots 2}\ \frac{\pi}{2}\quad (n\text{는 짝수})$$

를 이용하여 우변을 계산하면

$$=1-\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\ \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{0+2n}=J_0(x)^*$$

그리고 끝 $|J_0(x)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta\right|\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(x\sin\theta)d\theta|$

$$\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\theta=1$$

물론 $|J_n(x)|\leqq 1$ 이다.

똑같이 생각하면

$\left|J_{2m}(x)\right|\leqq\frac{x}{2m}$ 이므로 $\lim_{m\to\infty}J_{2m}(x)=0$ 이다.

이상의 성질에서 Bessel 함수의 추적을 대략 할 수 있다.

(ii) Bessel 함수의 점화식

$$\left.\begin{cases}\{x^nJ_n(x)\}'=x^nJ_{n-1}(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{ㄱ})\\ \{x^{-n}J_n(x)\}'=-x^{-n}J_{n+1}(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{ㄴ})\\ \{J_n(x)\}'=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{ㄷ})\\ \frac{n}{x}J_n(x)=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{ㄹ})\end{cases}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot 12)$$

(n는 임의의 실수)

(3·12) 를 증명한다.

$$x^n J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{n+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}x^{2n+2k}$$ 에서

양변을 x로 미분하며 (ㄱ) 을 얻게 되며 (ㄴ) 도 똑같이 하면 얻어진다.

(ㄱ) 과 (ㄴ) 의 좌변을 직접 미분하면

$$J'_n(x)=J_{n-1}(x)-\frac{n}{x}J_n(x)$$

$$J'(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x)$$

이들 2식에서

$$\left.\begin{aligned} J'_n(x)&=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\} \\ \frac{n}{x}J_n(x)&=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 13)$$

(3·13) 의 관계식에서 $J_0(x)$, $J_1(x)$만 먼저 알게되면 $J_2(x)$, $J_3(x)$,…………및 $J'_0(x)$, $J'_1(x)$…………를 구할 수 있으며 (3·13) 를 만족시키는 함수 $J_n(x)$를 일명 원주함수라고도 한다.

(iii) Bessel 함수의 초등함수 표시

Bessel 함수는 초등함수는 아니나, 특별한 경우일 때 삼각함수로 표시할 수 있다.

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$ 에서

$$\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)=\frac{(2k+1)!}{k!\,2^{2k+1}}\sqrt{\pi}$$ 를 대입하면

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\frac{1}{2}+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}\,(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 13)$$

똑같이 하면

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \cdots\cdots\cdots (3\cdot 14)$$

(3·12) 의 (ㄴ) 을 이용하면

$$\frac{d}{xdx}\left\{\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{-J_{\frac{3}{2}}(x)}{x^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{d}{xdx}\left\{\frac{J_{\frac{3}{2}}(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{-J_{\frac{5}{2}}(x)}{x^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{d}{xdx}\left\{\frac{J_{\frac{5}{2}}(x)}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}=\frac{-J_{\frac{7}{2}}(x)}{x^{\frac{7}{2}}}$$

따라서 일반적으로 다음식을 얻는다.

$$\left\{\frac{d}{xdx}\right\}^n\left\{\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right\}=(-1)^n\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{x^{n+\frac{1}{2}}}$$

그러므로

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\sin x}{x}$$

똑같이하면

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\cos x}{x}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 14)$

$(n=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots\cdots)$

따라서 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin x+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos x\right\}$

라는 형이된다.

(단 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$, $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 는 $\frac{1}{x}$ 의 다항식)

이상에서 Bessel 함수는 차수가 반홀수일 때에는 초등함수인 삼각함수로 표시된다.

(IV) Bessel 함수의 영점 (근)

$$u=J_n(\alpha x),\ v=J_n(\beta x)\ (n=0,1,2,\cdots\cdots\cdots)$$

는 다음의 Bessel의 미분방정식을 만족시킨다.

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+(\alpha^2-\frac{n^2}{x^2})u=0\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+(\beta^2-\frac{n^2}{x^2})v=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①×v−②×u 하고 x를 양변에 곱하여 정리하면

$x(u''v-uv'')+(u'v-uv')=(\beta^2-\alpha^2)xuv$

즉

$$\frac{d}{dx}\{x(u'v-uv')\}=(\beta^2-\alpha^2)xuv \qquad (\alpha\neq\beta)$$

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^1 xuv\,dx=[x(u'v-uv')]_0^1$$

$$\therefore \int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)dx=\frac{\alpha J'(\alpha)J_n(\beta)-\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (3\cdot15)$$

여기서 α, β가 $J_n(x)=0$의 상이한 양의영점이면

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)J_n(x\beta)dx=0\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3\cdot16)$$

$$(J_n(\alpha)=J_n(\beta)=0\ ;\ \alpha\neq\beta)$$

그런데 α, β가 $J_n(x)=0$의 영점이고 $\alpha=\beta$일 때에는 (3·15) 의 우변의 분모분자는 $\frac{0}{0}$되어 부정형이 된다.

이때에는 α를 $J_n(x)=0$의 영점으로 하고 $\beta=\alpha+\varepsilon$ 라놓고 $\varepsilon\to0$인 극한을 생각하면

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J'_n(\alpha)J_n(\beta)-\beta J_n(\alpha)J'_n(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J'_n(\alpha)J_n(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}$$

$$=\lim_{\beta\to0}\frac{\alpha'_n(\alpha)J_n(\alpha+\varepsilon)}{2\alpha\varepsilon+\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\alpha J'_n(\alpha)J'_n(\alpha+\varepsilon)}{2\alpha+2\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{2}\{J'_n(\alpha)\}^2$$

따라서 (3·15)

$$\int_0^1 x\{J_n(\alpha x)\}^2 dx=\frac{1}{2}\{J'_n(\alpha)\}^2 \quad (\text{단}\ \ J_n(\alpha)) \cdots\cdots\cdots (3\cdot 17)$$

그리고 $J'_n(\alpha)=\frac{n}{\alpha}J_n(\alpha)-J_{n+1}(\alpha)$에서

$J_n(\alpha)=0$ 이므로

$J'_n(\alpha)=-J_{n+1}(\alpha)$

그러므로 (3·17) 은

$$\int_0^1 x\{J_n(\alpha x)\}^2 dx=\frac{1}{2}\{J_{n+1}(\alpha)\}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 18)$$

이상의 (3·16) 및 (3·18) 에서 $J_n(\alpha x)$, $J_n(\beta x)$는 (0, 1)에서 x를 밀도함수로 하면 이들은 직교함수계를 구성함을 알 수 있다.

Ⅰ 결 론

지금까지의 Bessel의 미분방정식 $L(y,\alpha)$의 해법을 고찰할 때 $x=0$인 확정 특이점의 근방에서 α의 3가지의 경우로구별하여 일반해를 구하기 위하여 서로 일차독립인 2개의 기본해 $y_1(x)$, $y_2(x)$를 Frobenius의 방법을 이용하여 다행히 얻게 되었다.

이것은 Fuchs 형의 미분방정식에 한하여 건급수에 의한 해법이 성공됨을 의미하는 것이다.

사실 제2계 동차선형미분방정식이라할 지라도 예를 들면

$x^4y''+2x^3y'-y=0$에 대하여 $x=0$는 확정 특이점은 아니지만 $y(x)=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n(C_0\doteqdot 0)$ 라는 해가 존재한다고 가정하여 푼다면 지수방정식에서 $C_0=0$ 이 되어 $C_0\doteqdot 0$에 모순되므로 이와 같은 경우에는 Frobenius의 방법이 성공하지 않는다. 즉 Forbenius의 방법은 Fuchs 형의 미분방정식에는 유력한 해법이지만 다른 「제2계 동차선형미분방정식에는 무력할 때에도 있다. 다음에 확정특이점 $x=\infty$의 근방에서의 해는 $z=\frac{1}{x}$로놓고 변수변환하면 $x=\infty$ 의

근방에 변환되므로 독립변수가 z인 Bessel 의 미분방정식 $\frac{d^2y}{dz^2}+p(z)\frac{dy}{dz}+q(z)y=0$ 와 $z=0$의 근방에서의 해에 관하여 고찰하면 좋다. 이 사실은 Fuchs 형의 미분방정식에 공통되는 이론이다. 다음에 Bessel 함수는 본론에서 삼각함수로 표시된다는 함수임을 이해할 때 Bessel 함수는 곧 Fourier 급수와 밀접한 관계를 가짐을 알 수 있다. 사실 $J_0(x)$, $J_{2m}(x)$는 $\cos(x\sin\theta)$의 Fnurier 여현급수의 계수이며, $J_{2m}(x)$는 $\sin(x\sin\theta)$의 Fourier의 정현급수의 계수임을 부기한다. 그리고 n이 양의정수인 Bessel 함수 $J_m(x)$의 영점들은 어떤 구간에서 직교함수계를 구성한다는 것은 주목할 점이다.

끝으로 본론에서 취급한 미분방정식의해법은 Frobenius의 방법을 이용하였으나 이것은 한방법에 불과하다. Bessel 함수의성질에 관해서는 이밖에 중요한 성질이 많다. 이와 같은 성질의 구명에는 복소함수론의 힘을 빌때 훌륭하게 해결된다는 것으로 결론을 한다.

참 고 서 적

1) 武くま良一 數學史 培風舘 東京 1966
2) 河田龍夫 應用數學概論 I. 岩波書店 東京 1961
3) 大學數學研究會 微分積分學概說 共立出版 東京 1967
4) 高木貞治 解析概論 岩波書店 東京 1958
5) 川上太左英・藤田博共著, 應用數學, まき書店 東京 1958
6) 兒王鹿三 理工系. 基礎數學解析 I, II まき書店 東京 1967
7) 吉田耕作. 加藤敏夫共著 大學演習應用數學 1 裳華房 東京 1961
8) 三木忠夫 常微分方程式とその應用 ころな社 1966
9) 豊田浩七. 松山昇編 微分方程式 養賢堂 東京 1963
10) 福原滿洲雄. 稻葉三男共著 微分方程式通論 共立出版 東京 1959
11) 福原滿洲雄 微分方程式 上, 下巻 朝倉書店 東京 1957
12) 宮武修. 高橋共著 微分方程式 まき書店 東京 1961
13) 吉江たく兒 初等常微分方程式 裳華房 東京 1956
14) 矢野健太郎 大學演習 微分方程式 裳華房 東京 1960
15) 〃 微分方程式 裳華房 東京 1960
16) 高野一夫 微分方程式と 演習 森北出版 東京 1958
17) 粟野保. 末岡淸一. 石津武彦共譯 フォーサイス 微分方程式 上巻 朝倉書店 東京 1956
18) スミルノフ 高等數學教程 I巻 (1.2分册), II巻(1.2分册) 共立出版 東京 1964
19) 日本數學會編 岩波數學辭典 岩波書店 東京 1967
20) Hildebrand F. B. Advanced Calculus for Engineers Prentice-Hall, Inc. New York(1954)
21) Ralph Agnew. Differential Equations Mcgraw-Hill New York (1942)
22) Ince E.L. Ordinary Differential Equations Longmas Green London (1927)
23) Forsyth A. R. Theory of Differential Equations. Cambridge University Press (1890)