

非線形孤立波의 境界要素解析

金南亨·楊城基

濟州大學校 海洋科學大學 海洋土木工學科

Boundary Element Analysis of Nonlinear Solitary Wave

Nam-Hyeong Kim · Sung-Kee Yang

*Dept. of Ocean Civil Engineering, College of Ocean Sciences,
Cheju National University, Cheju 690-756, Korea*

Boundary element method based on Green's formula is applied to the analysis of nonlinear solitary wave. Assuming the fluid to be inviscid and incompressible, and the flow to be irrotational, the problem is formulated mathematically as a nonlinear initial-boundary values problem by the use of a governing differential equation and boundary conditions. The Laplace equation and boundary conditions are transformed into an integral equation by applying Green's formula. Two equations thus obtained are discretized by the use of the Galerkin's method spacewise and the finite difference method timewise. Collection method is employed for the discretization of the integral equation. Due to the nonlinearity, the incremental method is used for the numerical analysis.

Numerical results are compared with analytical solution. Excellent agreements are obtained, and this indicates the availability of the boundary element analysis as a numerical technique for nonlinear free water waves.

Key words : 고립파(solitary wave), 境界요소법(boundary element method), 수치해석(numerical analysis)

序 論

근년, 해양개발의 눈부신 발전에 따라서, 연안 해역을 대상으로한 다양한 연안 구조물이 설치되어지고 있고, 이들의 해양구조물의 설계에 있어

서 구조물에 작용하는 외력의 추정이 필요불가결하다. 그 산정의 기초로 되는 파동현상의 수치해석수법은 컴퓨터의 성능향상과 더불어 점점 더 중요성이 더해질 것으로 생각되어진다. 이와 같이, 파동현상의 수치해석수법(土木學會;1974, 日野;1974)으로서는 차분법(FEM), 특성곡선법,

유한요소법(FEM), MAC법 및 경계요소법(BEM) 등 많은 계산방법이 제안되었고 이용되어져 왔다. 수심감소에 따른 파의 변형을 해석한 것은, 특성곡선법에 의한 것으로, Freeman (1964), Peregrine (1967), Madsen (1969) 등의 계산에 있다. 또 MAC법은 자유표면을 갖는 흐름의 수치계산법으로 개발된 것으로, 사면위에서 고립파의 변형을 해석한 Chan (1970), 和田(1973)의 연구가 있다. 유한요소법을 이용한 것은 松田·岩崎(1975)가 사면위에서 장파의 변형을 해석했고, 瀧川(1983)가 유한진폭파 및 구조물과 유체의 상호작용에 관해서 해석했다.

경계요소법은 1970년대말 Brebbia (1979)가 종래의 고전적인 적분방정식에 유한요소법의 해석수법을 도입하여 새롭게 정식화한 이래, 급속하게 발전하여온 새로운 수치해석법이다. 유한요소법과 차분법이 해석영역에서 성립하는 방정식을 푸는데 대해, 경계요소법은 해석영역을 기술하는 미분방정식을 경계상에서 만 미지수가 있는 적분방정식

으로 변환하여 푸는 것이다. 따라서 경계요소법은 공간영역에서 해석대상의 경계만을 사용하기 때문에 해석영역법으로 불리는 유한요소법과 차분법에 비해, 경계조건의 엄밀한 설정과 함께, 입력데이터의 축소화에 따른 컴퓨터 기억용량의 대폭적인 삭감을 가져왔다.

따라서, 본 연구에서는 경계요소법을 사용하여 2차원 조파구조를 모델화하여, 해석계산의 한 예로써 비선형 고립파의 발생, 전파 및 반사의 과정을 수치계산했다. 아울러 본 계산의 결과와 이론해석의 결과를 비교하여 계산의 타당성과 검증을 하였다.

計算方法

1. 基礎方程式과 離散化

좌표계는 Fig. 1과 같이 X축은 정수면과 일치시켜, 오른쪽 방향을 정(+)으로 하며, Z축은

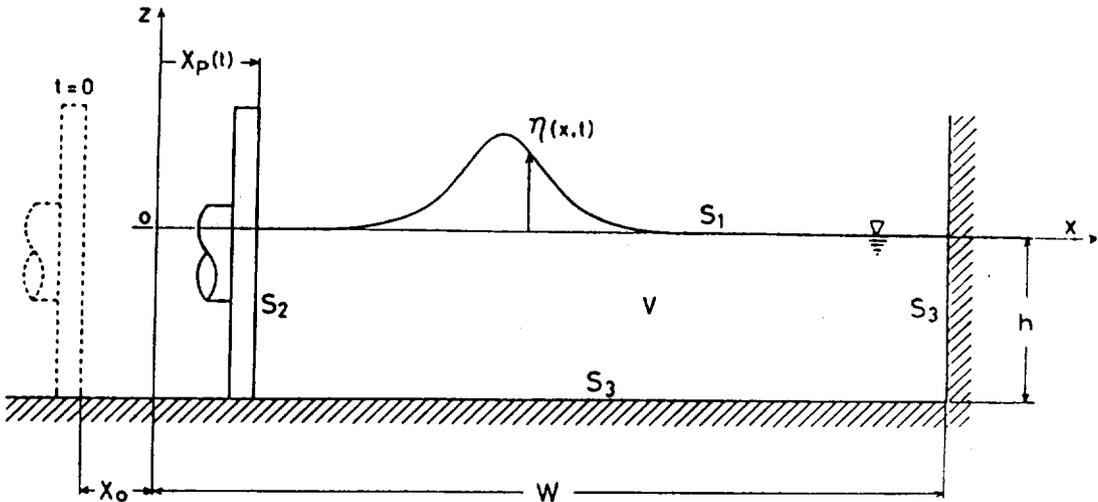


Fig. 1. The wave generator for a solitary wave.

연직방향을 정(+)으로 정의 하고, 고립파가 X 축의 오른쪽 방향으로 전파하는 것으로 한다. 유체는 비압축, 비점성유체로 가정하고, 유체운동은 비회전으로 가정할 때, 속도포텐셜 $\phi(x, z, t)$ 가 존재하고 ϕ 에 관한 기초방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0 \quad (\text{in } V) \quad \dots (1)$$

$$\partial \phi / \partial t + 1/2[(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial z)^2] + g \cdot \eta = 0 \quad (\text{on } S_1) \quad \dots (2)$$

$$\partial \phi / \partial n = n_x \cdot \partial \eta / \partial t \quad (\text{on } S_1) \quad \dots (3)$$

$$\partial \phi / \partial n = -dX_p / dt \quad (\text{on } S_2) \quad \dots (4)$$

$$\partial \phi / \partial n = 0 \quad (\text{on } S_3) \quad \dots (5)$$

여기서, S_1, S_2, S_3 은 각각 자유수면, 피스톤 내벽, 수조의 바닥 및 우측벽을 나타낸다. $\eta(x, t)$ 은 정수면으로부터 측정한 자유표면의 형상함수이다. n 은 각 경계에서의 외향법선을 나타내고, $n_x = \cos(n, z)$ 은 n 의 Z축에 대한 방향여현이다. g 은 중력가속도이다. $X_p(t)$ 은 피스톤 변위함수이고, 피스톤은 다음의 함수에 따라서 이동하는 것으로 한다(Camfield and Street; 1967, French;1970).

$$X_p(t) = X_0 \cdot \tanh(\omega(t-t_0)) \quad (0 \leq t \leq T) \quad \dots (6)$$

여기서, X_0 은 피스톤의 반행정을 나타내며, T 은 피스톤을 정지시키는 시각이다. 시간 $0 \leq t \leq T$ 는 고립파의 발생과정에 대응하고, 시간 $t > T$ 는 고립파의 전파과정에 대응한다. ω, t_0 은 피스톤 이동의 완급을 특징짓는 Parameter이다.

비선형 초기경계치문제를 경계요소법을 이용해서 풀기 위해서는, 식(1)~(2)을 2개의 적분방정식으로 변환하여야 한다. 두점 $P(\xi, \zeta), Q(x, z)$ 와 해석영역 V 을 포함하는 경계면 위에서 2차원 Green공식을 적용하면, 다음과 같다.

$$\phi_p = -1/\alpha_p \cdot \oint_S (\phi \cdot \partial G / \partial n - \partial \phi / \partial n \cdot G) ds$$

$$G = \ln(1/r), \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}$$

..... (7)

여기서, ϕ_p 는 경계 S 에서 취한 임의의 P 점에서의 속도포텐셜을 의미한다. α_p 는 P 점에서 두점선 사이의 각도를 나타낸다. r 은 P 점과 경계 S 위에서 취한 또 다른 Q 점 사이의 거리이다. ϕ 은 Cauchy 적분의 주치(主值)를 취하는 것을 의미한다. 따라서, 식(7)에 Laplace 식(1)과 경계조건 식(3)~(5)을 대입하고, $Z=-h_0$ 에서 $\partial G / \partial n = 0$ 을 고려하면, 다음식이 얻어진다.

$$\alpha_p \cdot \phi_p + \oint_{S_1} \phi \cdot \partial / \partial n (\ln 1/r) ds - \oint_{S_1} n_x \cdot \partial \eta / \partial t \cdot \ln 1/r ds + \oint_{S_2} dX_p / dt \cdot \ln 1/r ds = 0$$

..... (8)

여기서 $S=S_1+S_2+S_3$ 이다. 한편, 자유표면의 압력방정식(2)에 중량잔차법(The method of weighted residuals)을 적용하면, 다음과 같은 비선형 중량잔차방정식이 얻어진다.

$$\int_{S_1} \omega \cdot [\partial \phi / \partial t + 1/2(n_x^2 \cdot (\partial \eta / \partial t)^2 + (\partial \phi / \partial s)^2) + g \cdot \eta] ds = 0$$

..... (9)

여기서 $\omega(s)$ 는 중량함수(weighting function)이며, 다음의 관계식을 고려한다.

$$(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial z)^2 = (\partial \phi / \partial n)^2 + (\partial \phi / \partial s)^2$$

$$= n_x^2 (\partial \eta / \partial t)^2 + (\partial \phi / \partial s)^2;$$

..... (on S_1) (10)

경계 S_1, S_2, S_3 위에 N 개 절점을 배치하고, j 와 $j+1$ 절점으로 구성되는 j 요소($j=1, 2, \dots, N$)에 대하여, $\phi, \dot{\phi}, \eta, \dot{\eta}, \omega$ 의 분포를 다음과 같이 1차함수로 근사시킨다.

$$\phi = N_j^T \cdot \phi_j, \quad \dot{\phi} = (\dot{\phi}_j, \dot{\phi}_{j+1})$$

$$\dot{\phi} = N_j^T \cdot \dot{\phi}_j, \quad \dot{\phi} = (\dot{\phi}_j, \dot{\phi}_{j+1})$$

$$\eta = N_j^T, \eta_j, \quad \eta = (\eta_j, \eta_{j+1}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\dot{\eta} = \dot{N}_j^T, \dot{\eta}_j, \quad \dot{\eta} = (\dot{\eta}_j, \dot{\eta}_{j+1})$$

$$U = N_j^T, U_j, \quad U = (U_j, U_{j+1})$$

$$\omega = N_j^T, \omega_j, \quad \omega = (\omega_j, \omega_{j+1})$$

$$N_j^T = (1-s/l_j, s/l_j)$$

여기서, N절점은 j+1의 절점치로서 1의 절점치를 이용한다. 또 $U = dX_p/dt$ 이다. 식(8)에 나타난 경계면 위의 적분을, 각 요소에서 적분의 합으로 치환하고, 식(11)을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot \phi_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}^T \cdot \phi_j - \sum_{j=1}^{S_i} \cos \beta_j \cdot B_{ij}^T \cdot \eta_j \\ + \sum_{j=S_i}^{S_i} B_{ij}^T \cdot U_j = 0 \quad ; (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{ij}^T &= \int_0^{l_j} N_j^T \cdot \partial/\partial n (\ln l/r) ds \\ B_{ij}^T &= \int_0^{l_j} N_j^T \cdot (\ln l/r) ds \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

이다. 단, β 는 요소내에서 일정하다. 식(13)의 적분은 $i=j$ 와 $i=j+1$ 의 경우를 포함하여 엄밀하게 해석적인 방법(登坂·中山;1987)으로 풀 수 있고, 특이점 처리는 필요하지 않다.

식(9)에 관해서도 같은 방법으로 이산화하며, 중량잔차함수 ω_j 에 대하여 정리하면, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{j=1}^{S_i} r_j \cdot \omega_j = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1 (2\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) + b_1 (3\dot{\eta}_1 + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2) \\ &\quad + c_1 (\phi_2 - \phi_1) + g \cdot a_1 (2\eta_1 + \eta_2) \\ r_j &= a_{j-1} (\dot{\phi}_{j-1} + 2\dot{\phi}_j) + a_j (2\dot{\phi}_j + \dot{\phi}_{j+1}) + b_{j-1} (\dot{\eta}_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + 2\dot{\eta}_{j-1}\dot{\eta}_j + 3\dot{\eta}_j) + b_j (3\dot{\eta}_j + 2\dot{\eta}_j\dot{\eta}_{j+1} + \dot{\eta}_{j+1}) + c_{j-1} \\ (\phi_j - \phi_{j-1}) + c_j (\phi_{j+1} - \phi_j) + g \cdot a_{j-1} (\eta_{j-1} + 2\eta_j) \\ + g \cdot a_j (2\eta_j + \eta_{j+1}) \quad (j=2, 3, \dots, S_2-1) \\ r_{S_1} = a_{S_1-1} (\dot{\phi}_{S_1-1} + 2\dot{\phi}_{S_1}) + b_{S_1} (\dot{\eta}_{S_1-1} + 2\dot{\eta}_{S_1-1}\dot{\eta}_{S_1} + 3\dot{\eta}_{S_1}) \\ + c_{S_1-1} (\phi_{S_1} - \phi_{S_1-1}) + g \cdot a_{S_1-1} (\eta_{S_1-1} + 2\eta_{S_1}) \\ a_j = l_j/6, \quad b_j = l_j \cdot \cos^2 \beta_j/24, \quad c_j = 1/4 \cdot l_j \end{aligned}$$

이다. ϕ 는 접선방향의 미분치 $\partial\phi/\partial s$ 는 요소내에서 일정한 것으로 가정하여, 다음과 같이 차분한다.

$$\partial\phi/\partial s = (\phi_{j+1} - \phi_j)/l_j \quad \dots\dots\dots (15)$$

식(14)은 임의의 중량함수 ω 에 관하여 성립하기 위해서는, 다음의 식을 만족해야 한다.

$$r_j = 0 \quad ; (j=1, 2, \dots, S_1) \quad \dots\dots\dots (16)$$

2. 増分計算法

ϕ 와 η 에 관한 식(12), (16)의 비선형 연립대수방정식은, 증분법(incremental method)을 사용하여 선형화한다. 어떤 시간 t_0 에 있어서 ϕ 와 η 의 값을 ϕ_0, η_0 로 하고, 시각 $t_0 + \Delta t$ 에 대한 값을 ϕ, η 로 한다. 이때 시각 t_0 와 $t_0 + \Delta t$ 의 사이에 각각의 증분 $\Delta\phi, \Delta\eta$ 를 Taylor 전개하면, 다음과 같이 된다.

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi, \quad \eta = \eta_0 + \Delta\eta \quad \dots\dots\dots (17)$$

증분 $\Delta\phi, \Delta\eta$ 의 2차항은 미소량이기 때문에 무시하면, 식(12), (16)는 $\Delta\phi, \Delta\eta$ 에 대하여 선형화된다. ϕ 와 η 의 시간 편미분치에 관해서는 차분법을 사용하여, 시각 Δt 에 있어서 $\partial\phi/\partial t, \partial\eta/\partial t$ 의 값은 시각 t 에 대하여 선형으로 변화하는 것으로 가정하여, 시각 $t_0 + \Delta t$ 에 있어서 $\partial\phi/\partial t, \partial\eta/\partial t$ 를 다음과 같이 근사시킨다.

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial t &= \partial\Delta\phi/\Delta t - (\partial\phi/\partial t)_0, \\ \partial\eta/\partial t &= \partial\Delta\eta/\Delta t - (\partial\eta/\partial t)_0 \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

解析結果 및 考察

여기서, 첨자 "o"는 시각 t_0 에 있어서의 값을 의미한다. 따라서, 식(12)과 식(16)은 다음과 같은 $\Delta\phi$, $\Delta\eta$ 에 관한 연립일차대수방정식이 유도된다.

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ \dots & \dots \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

연립일차대수방정식(19)을 풀어서 얻어진 $\Delta\phi$, $\Delta\eta$ 을 식(17), (18)에 대입하면, 시각 $t_0 + \Delta t_0$ 에 대한 ϕ , η , $\partial\phi/\partial t$, $\partial\eta/\partial t$ 의 값이 구해진다. 따라서 시간 Δt 씩 나아가면서 방정식(19)을 풀면 조파현상의 수치 simulation을 할 수가 있다.

본 해석에서는, $W/h=30$ 인 일정한 수심 h 의 구형수조(Fig. 1)을 모델화하고, 경계 S_1 을 30 요소, 경계 S_2 를 10요소, 경계 S_3 을 각각 6요소를 등분할 하였으며, 각 경계에서의 요소분할은 각 시각마다 자유수면 및 피스톤의 위치에 따라서 재분할하도록 했다. 시각 $t=0$ 일때 유체는 완전히 정지하고 있는 것으로서, 아래와 같이 초기 조건을 설정했다.

$$\phi = \eta = 0, \quad \partial\phi/\partial t = \partial\eta/\partial t = 0 \dots\dots\dots (20)$$

Fig. 2는 그림과의 발생으로부터 전파, 반사의

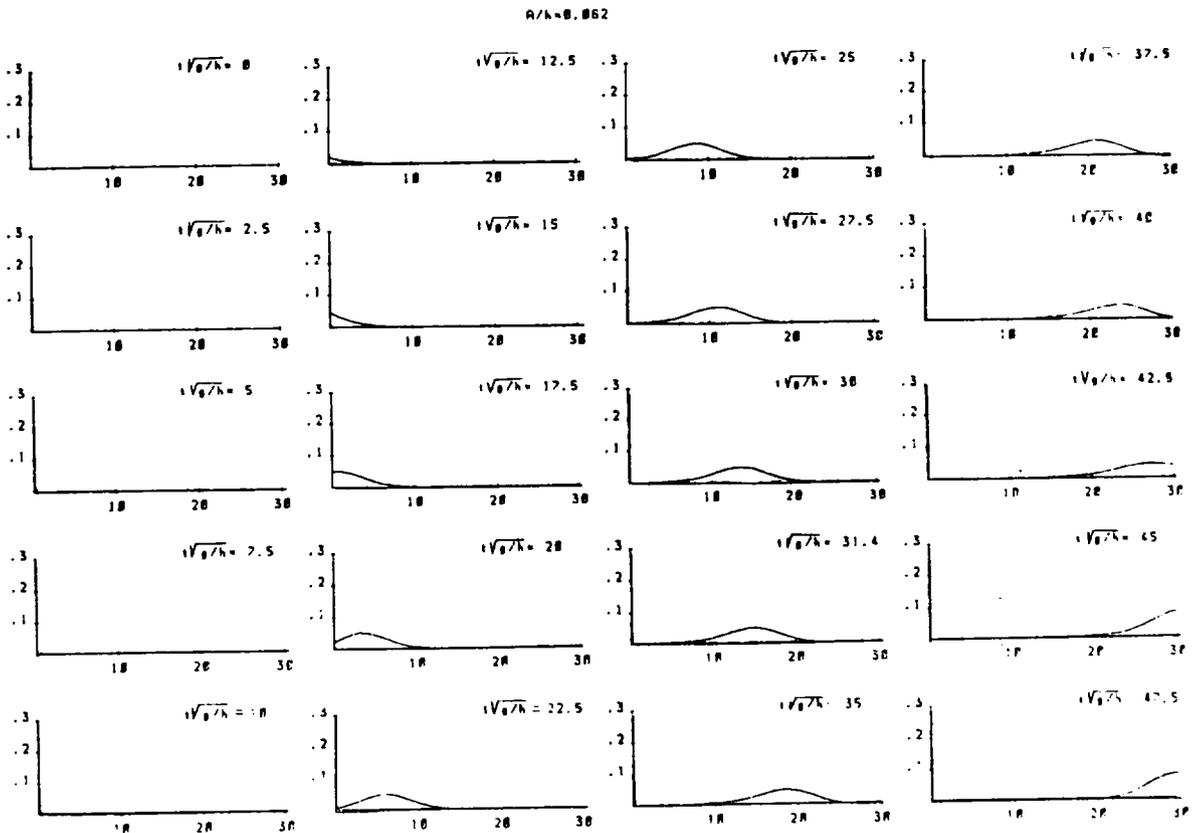


Fig. 2. The motions of a simulated solitary wave in case 1.

$A/h = 0.17$

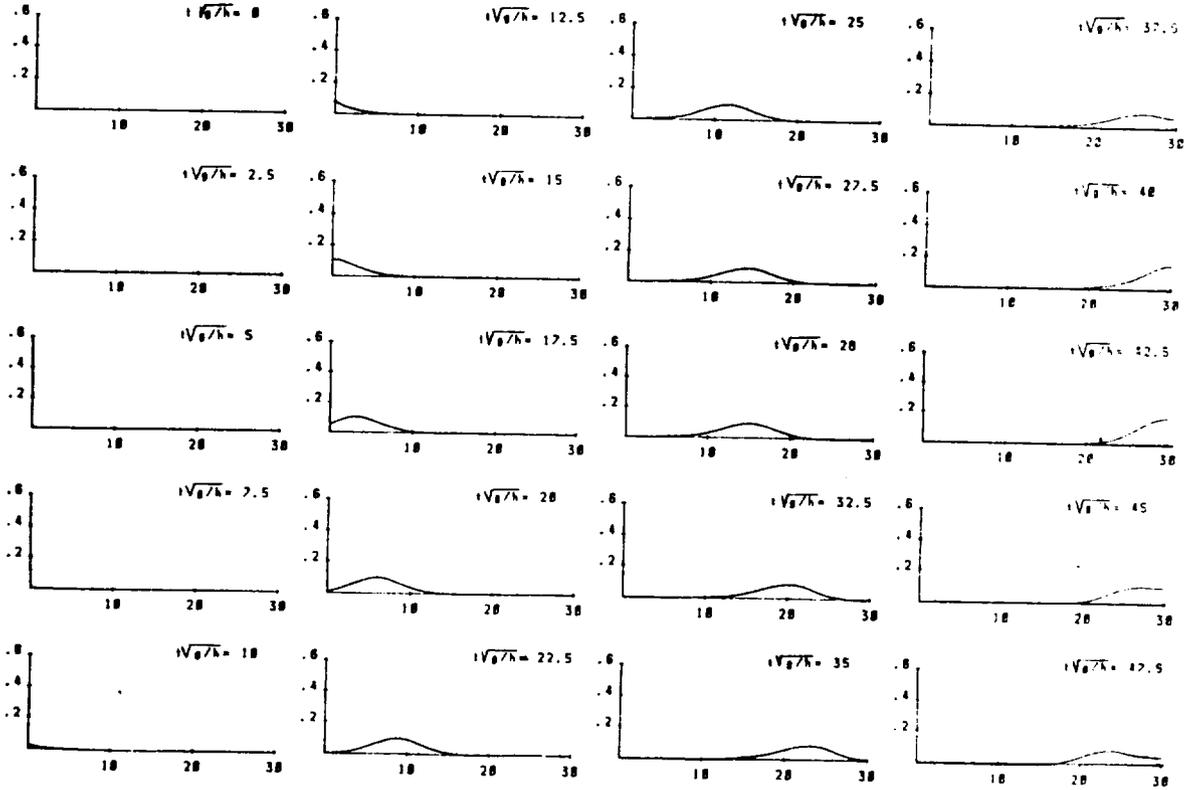


Fig. 2. The motions of a simulated solitary wave in case 2.

과정을 계산한 결과를 나타낸 것이다. 횡축에는 무차원 좌표 X/h 를, 종축에는 자유표면의 무차원 형상함수 η/h 로 잡는다. 종축의 위치는 피스톤 내벽면의 위치와 일치시키고 있다. 계산조건

은 Table 1과 같이 3개의 Case를 행했다. 여기서, Case 3의 경우를 살펴보면, 시각 $t\sqrt{(g/h)} = 24.0$ 일때 무차원파고 $A/h = 0.17$ 의 고립파가 생긴 것을 알 수 있다. 또 시각 $t\sqrt{(g/h)} = 33.0$

Table 1. The numerical values of parameters of wave generator.

Case	X_0/h	$\omega\sqrt{(h/g)}$	$t_0\sqrt{(h/g)}$	$T\sqrt{(h/g)}$	$\Delta t\sqrt{(h/g)}$
1	0.224	0.223	16.86	33.72	0.1
2	0.348	0.287	14.76	29.53	0.1
3	0.440	0.386	11.14	22.28	0.1

非線形獨立派의 境界要素解訴

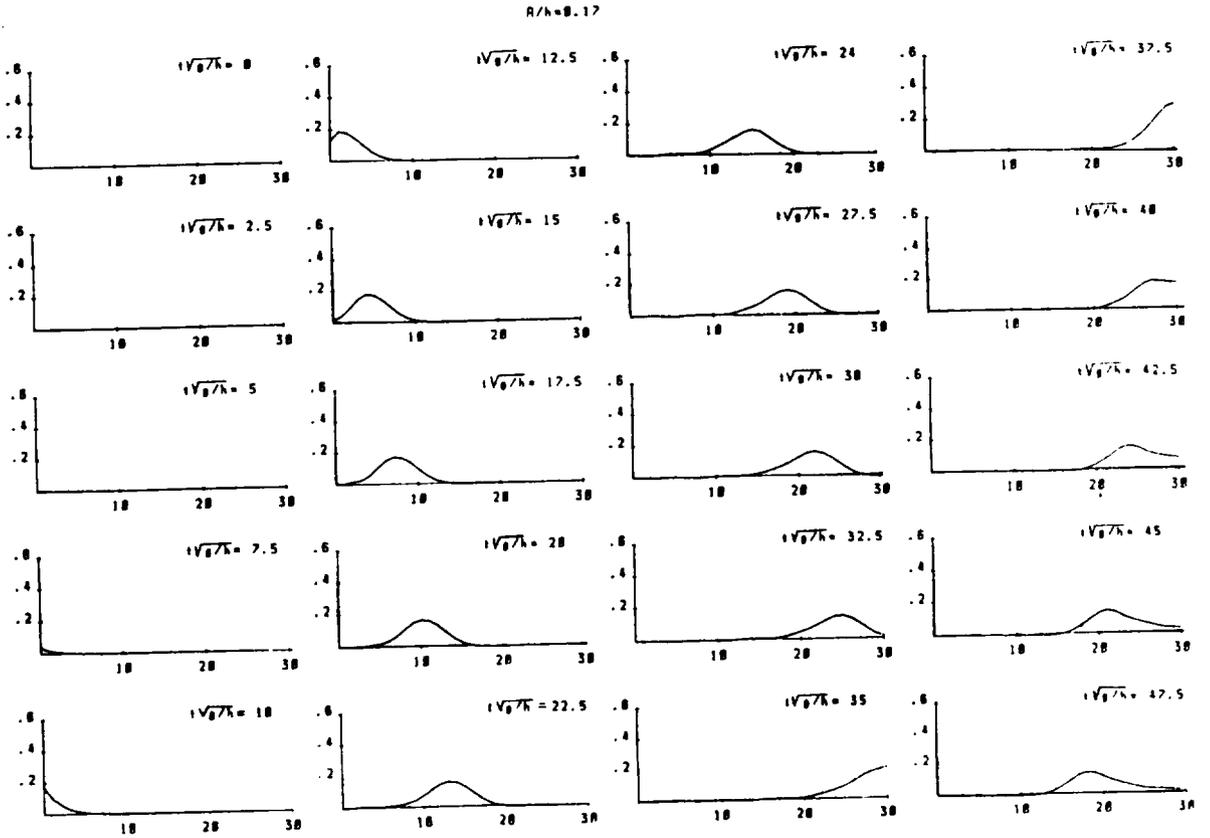


Fig. 2. The motions of a simulated solitary wave in case 3.

일때 파의 처올림(run-up)이 생기며, 이때 정수면으로 부터 파의 처올림 높이를 R로 하면 $t\sqrt{(g/h)} = 36.9$ 일때, 최고점에 달하며 $R/h=0.295$ 이다. 최고점에 달한후 고립파는 역 방향으로 다시 전파하여 가며, 피스톤의 내벽과 수조의 우측벽 사이에서 반사, 전파를 반복하는 것으로 예상되어진다. 또, 우측벽에서 파의 처올림은 Case 1의 최고점은 $t\sqrt{(g/h)}=46.1$ 일때, $R/h=0.09$ 이며, Case 2의 최고점은 $t\sqrt{(g/h)}=42.9$ 일때, $R/h=0.123$ 을 나타내었다. Fig. 2로부터 A/h가 작으면 고립파의 발생에 시간이 많이 걸리고, 우측벽에 도달하는 속도도 늦는 것을 알 수 있다. Fig. 3

은 각각 $t\sqrt{(g/h)}=31.4$, $t\sqrt{(g/h)}=28.0$, $t\sqrt{(g/h)}=24.0$ 일때 얻어진 고립파 형상을 각각 Boussinesq (1872)의 이론해와 비교한 것이다. 그 결과 일정수심에 있어서는 대개 일치하며, 파고가 크면 편차가 조금 나타나는 것은 수면상의 요소 분할이 좀 크게 분할된 것으로 여겨지므로, 요소분할을 작게하면 이 편차는 없어질 것으로 생각된다. Fig. 4는 본해석 방법의 적용범위를 검토하기 위해, 파동이론의 적용한계를 나타낸 것이며, 고립파 이론의 적용범위는 Ursell의 분류(岸; 1964)에 의해 $\eta_0 \cdot L^2/h^4 < 40$ 으로 했다. 본 수치 계산은 일본구주대학(Kyushiu University,

JAPAN)의 대형계산기(MELCOM)를 이용하였 5.632초 걸렸다.
으며, 계산시간(CUP Time)은 500 Step당

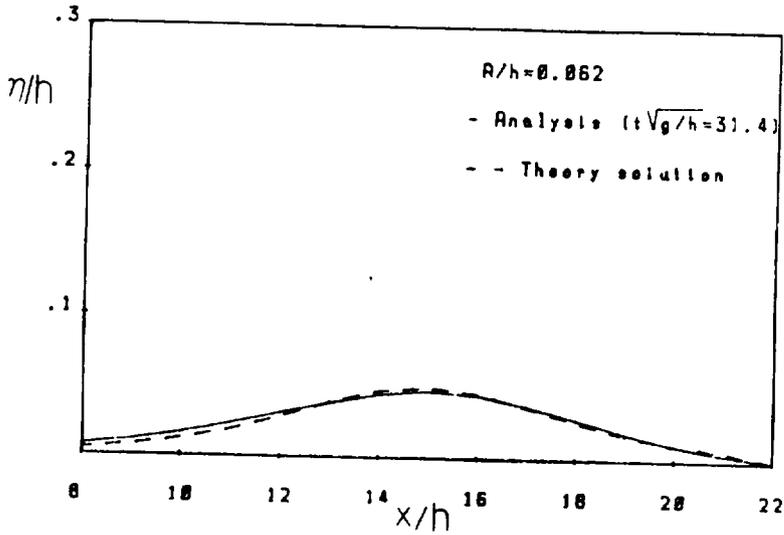


Fig. 3. Comparison of the computed wave profile with the theory of Boussinesq in case 1.

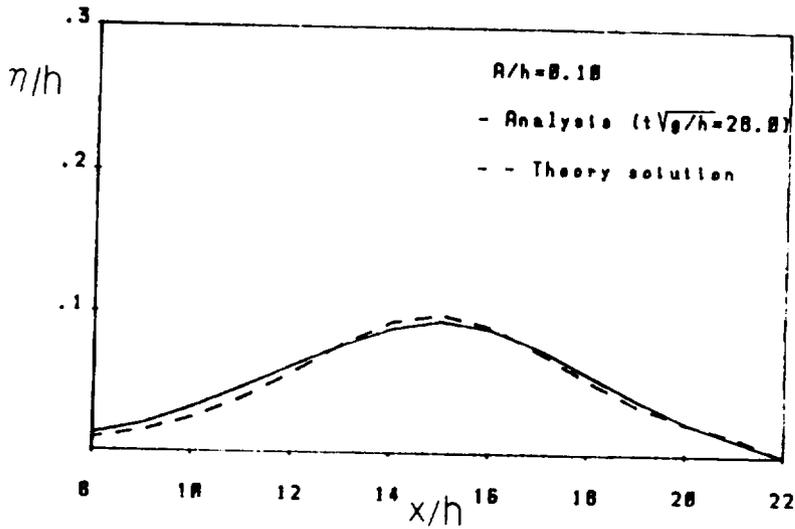


Fig. 3. Comparison of the computed wave profile with the theory of Boussinesq in case 2.

非線形獨立派の境界要素解法

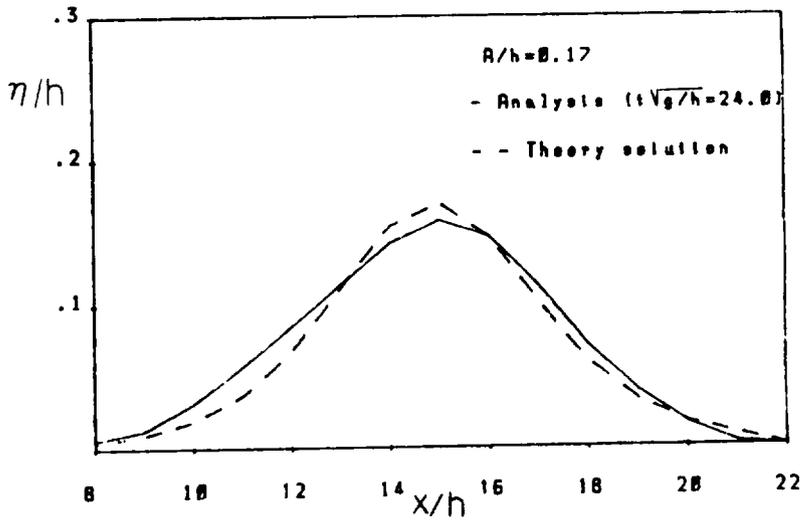


Fig. 3. Comparison of the computed wave profile with the theory of Boussinesq in case 3.

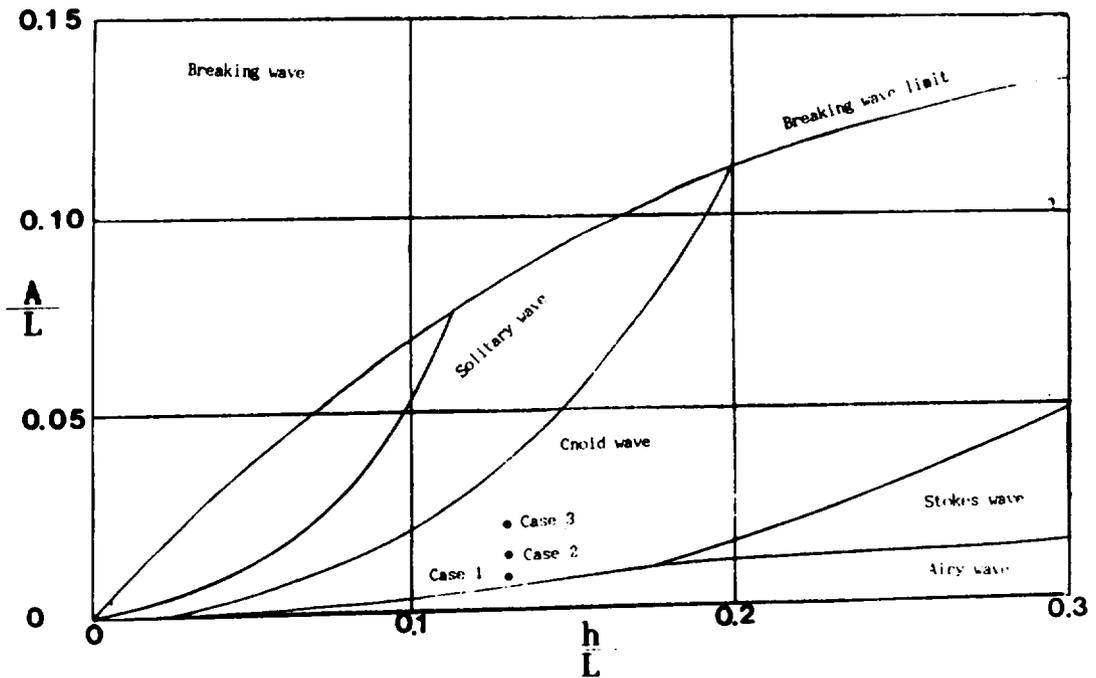


Fig. 4. The application limit of wave theory.

結 論

경계요소법을 이용하여 2차원 조파수조를 모델화 하여 비선형 고립파의 변형을 수치해석 했다. 수치해석의 예를 통하여 본 해석법의 타당성이 검증되었으며, 파동문제의 simulation수법으로써 충분히 유효하고, 또한 광범위한 파동문제의 해석에 있어서 유효한 “數値波動水槽”로서 이용할 수 있는 것이 제시되었다. 특히, 높은 정도를 얻기 위하여서는 이산화할 때 2차요소를 이용하는 것과 요소를 적게 분할하는 것이 바람직한 것으로 사료된다.

參考文獻

Brebbia, C. A., 1979. Boundary Element Techniques in Engineering.

Boussinesq, J., 1872. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, Vol. 17, pp. 55-108.

Camfield, F.E. and Street, R.L., 1967. An investigation of the deformation and breaking of solitary waves, Dept. of Civil Engineering Rechnical Report, No. 81, Stanford Univ..

Chan, R.K.C and Street, R.L., 1970. Shoaling of finite-amplitude waves on

plane beach, Proc. of the 12th Conf. on Coastal Eng., pp. 345-361.

Freeman, J.C. and Le Mehaute, B., 1964. Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, Proc. ASCE, Vol. 90, No. HY2, pp. 187-216.

French, J. A., 1970. Wave uplift pressures on horizontal platforms, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.

Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach, Jour. Fluid Mech., Vol. 27, No. 4, pp. 815-827.

Madsem, O.S. and Mei, C.C., 1969. The transformation of a solitary wave over an uneven bottom, Jour. Fluid Mech., Vol. 39, No. 4.

金南亨, 1991. 淺海波浪と波動底面亂流境界層の特性に關する基礎的研究, 熊本大學博士學位論文.

大山 巧, 1985. 境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析, 第32回海岸工學講演會論文集, pp. 555-559.

登坂 宜好·中山 司, 1987. 境界要素法の基礎, 日科技連.

瀧川 清, 1983. 有限要素法解析による淺海波の變形特性に關する研究, 京都大學博士學位論文.

松田 健志·岩崎 敏夫, 1975. 有限要素法による長波の變形の解析, 第22回海岸工學講演會論文集, pp. 93-96.

岸 力, 1964. 波動論, 水工シリーズ 64-05, 土木工學水理委員會.

日野 幹雄, 1974. 數値シミュレーションと海岸
工学, 1974年水工学に関する夏期研修會講
義集, 土木學會數理委員會.
和田 明, 1973. 數理 モデルによる有限振幅波

の研究, 第20回海岸工学講演會論文集,
pp. 387-392.
土木學會編, 1974. 土木工学における數値解析
(流體解析編), サイエンス社.