Non-Abelian Aharonov-Bohm effect에서 산란파동함수

박규은*, 강동식**

Scattering Wave function in Non-Abelian Aharonov-Bohm effect

Park Kyu-eun, Kang Dong-shik***

Abstract

In Non-Abelian case, the Aharonov-Bohm effect is considered. Scattering Wave function with arbitrary α-value is given and compared with the result of the Aharonov-Bohm's calculation.

서 론

고전 전자기 이론에서 대전입자(charged particle)의 동력학은 Lorentz힘에 의해서 기술된다(J.D.Jackson). 대전입자가 외부 전기장 · 자기장 속을 운동할 때 전하량 q와 속도 V에 따라서 힘을 받게되고 이는 곧 전기장 · 자기장이 없는 영역에서는 대전입자에 미치는 힘이 영이 되고 입자는 자유운동을 하게 된다. 우리의 고찰에서는 다른 힘(중력 · 약력(weak force))을 무시한다. Lorentz 힘의 공식은 전기장 · 자기장을 이용해서 표현되고 이것은 곧 전기장 · 자기장(이하 전자기장)이 기본 장이 됨을 의미한다. 고전론에서는 또한 전기장 · 자기장을 scalar potential(=φ)과 vector potential(=A)를 이용하여 수학적으로 표현하는데 vector 연산자(=∇)의 특성으로 인해 φ와 A가 유일하게 정의되지 않는다. 따라서 φ와 A에는 같은 역할을 하는 유사한 φ', A'들이 있을 수 있고 φ와 A, φ'과 A' 사이에는 gauge 변환이라는 변환을 통해서 관계지워지게 된다.

gauge 변환에 의해서 연결할 수 있는 φ와 A들은 같은 전기장 · 자기장 값을 주기 때문에 φ, A를 기본 물리량으로 생각하는 데는 무리가 있게 된다. 하지만 양자역학에서의 계(system)의 기술은 Schrodinger 파동방정식에 의해서 기술되고 이 파동방정식은 Hamiltonian(=H)이라는 연산자를 포함하고 있다. 바로 이 Hamiltonian 연산자에

* 師範大學 科學敎育科
** 師範大學 科學敎育科 (講師)

scalar potential과 vector potential이 포함되고 따라서 φ 와 A가 수학적 편리를 위해서 도입됐다는 고전론적 관점은 재고의 여지가 있게 된다. 이러한 점에 착안하여 1959년 Y. Aharonov와 D. Bohm은 (Y.Aharonov, D.Bohm; 1959) WKB 방법을 써서 전자기 potential(; φ, A)들의 의미를 재조명하게 된다. 무한히 긴 Solenoid에서 전류에 의한 자기장은 Solenoid 외부에서는 사라지게 되고 이때 대전된 입자가 외부영역에서 어떤 영향을 받게 된다면 이는 곧 자기장 이외의 다른 장(field)의 영향에 의한 것이라고 생각할 수 있다(이 경우 전기장은 zero이다). 이론적 계산에 의하면 solenoid 외부를 지나가는 전자가 받는 영향은 위상인자(phase factor)의 변화이며 이는 2중 slit 실험에 의해서 위상의 변화를 관측할 수 있음을 나타내고 실험으로 확인되고 있다(물론 실험에 의한 확인이 곧 전기장과 자기장을 기본 장(field)의 위치에서 끌어 내리는 증거는 될 수 없다.). Solenoid 외부에서 자기장은 영이지만 vector potential A는 gauge 변환에 의해서 영이 아니다. 따라서 이 영이 아닌 A가 대전입자 파동함수의 위상을 변화시키는 요인이 되고 따라서 A가 기본 장으로서의 위상을 갖게 된다. Non-Abelion이 경우에는 φ 와 A가 adjoint representation이며 이 경우 Bohm-Aharonov 효과는 T.T.Wu와 C.N.Yang에 의해서 정성적으로 연구되었다(T.T.W, C.N.Yang; 1975). Non-Abelion 전하를 갖는 입자가 non-Abelion potential이 영이 아닌(하지만 non-Abelion field strength는 영) 영역을 통과할 때 어떤 결과가 나타나는가? 아직까지도 Non-Abelian인 경우는 자세한 정량적 결과가 나오질 않고 있다. 우리의 논문은 Non-Abeian potential에서 SU(2) multiplet으로 표현되는 입자들의 파동함수를 계산하고 각각의 파동함수들은 Aharonov-Bohm이 계산한 U(1) gauge group의 경우와 같음을 보이고자 하는 데 있다.

본 론

SU(2) gauge 이론에서 전자는 $|{\varphi_1 \atop \varphi_2}\rangle$로 표현되고 e potential A_μ는 adjoint representation이.. 비상대론적인 경우에 전자에 대한 Schrodinger 파동방정식은 다음과 같은 고유치 문제이다.

$$H\varphi = E\varphi \quad \text{——— (1)}$$

여기서 Hamiltonian $H=\frac{1}{2m}(P-iA)^2$

파동함수 $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2}$, A는 gauge potential이다. 적절한 gauge 변환에 의해서 gauge potential $A_\mu = (A_t, A)$은 다음과 같은 형태로 바꿀 수 있다.

$$A_\mu = (0,\ 0,\ A_\theta,\ 0)$$
$$A_\theta = \frac{1}{ir}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix} = -2\frac{\alpha}{r}\tau_3 \quad \text{—— (2)}$$

여기에서 $\tau_3 = \frac{i}{2}\sigma_3$, σ_3는 pauli 행렬이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 $p=\frac{1}{i}\nabla$를 이용하면 (h=1, c=1로 놓음)

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\alpha\right)^2\psi_1$$
$$= -k^2\binom{\psi_1}{\psi_2} \quad \text{——— (3)}$$
$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\alpha\right)^2\psi_2$$

가 되고 두 성분을 개별적으로 취급할 수 있게 된다.

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\alpha\right) + k^2\right\}\psi_i$$

$$=0,\ i=1,2. \quad \text{—— (4)}$$

ψ_1에 대한 미분방정식을 변수분리(Separation of variables) 방법으로 정리해서 쓰면 θ -의존미분방정식은 $e^{in\theta}$ 형태의 해를 갖고 r-의존 미분방정식은 Bessel 미분방정식이 된다.

따라서 ψ_1에 대한 미분방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\psi_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \left[a_m J_{m+\alpha}(kr) + b_m J_{m-\alpha}(kr) \right] \quad \text{——— (5)}$$

Solenoid 단면의 반경을 R이라고 하면 식(5)는 r<R 영역에서 구한 해와 r=R에서 연속이 되야 하고 Solenoid의 반경 R를 아주 작게 하므로서 ψ은 $r\approx 0$에서 유한한 값을 가져야 한다. Bessel 다항식 $J_\nu(x)$이 x가 영으로 접근할 때 유한하기 위해서는 ν 가 음수가 되면 안된다. 식(5)에서 ν 가 음수가 아닌 경우를 택하면(ν 가 음수가 되는 경우는 계수 a_m, b_m을 영으로 놓음)

$$\psi_1 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \; a_m J_{|m+\alpha|}(kr) \quad \text{——— (6)}$$

와 같이 쓸 수 있다.

미분방정식 (4)를 보면 대전된 입자가 gauge potential A_μ에 의해서 산란되는 경우로 볼 수 있음을 알 수 있고 따라서 입사 입자의 파동을 $e^{ikr\cos\theta}$로 보면 산란된 파동은 (J.J.Sakurai)

$$e^{ikr\cos\theta} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \quad \text{——— (7)}$$

이 된다. 식(7)과 식(6)은 같은 것으로서 (7)식에서 $f(\theta)$를 구할 수 있다.

평면 입사파 $e^{ikr\cos\theta}$를 Bessel 다항식으로 전개시키면 (G. Arfken)

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(kr) e^{im\theta} \quad \text{——— (8)}$$

이고 이 식을 (7)식에 대입해서 (6)식과 같게 놓으면

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(kr) e^{im\theta} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} a_m J_{|m+\alpha|}(kr) \quad \text{—— (9)}$$

과 같이 된다. 산란의 결과는 Solenoid에서 멀리 떨어진 지점에서 측정하므로 $kr\to\infty$일때 $J_\nu(kr)$의 점근식을 사용하는 것으로도 충분하다. $kr\to\infty$일 때 (G. Arfken)

$$J_{kr}(kr) \sim \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{——— (10)}$$

이므로 식(9)는

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(kr - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{im\theta} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(kr - \frac{|m+\alpha|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{im\theta} \quad \text{—— (11)}$$

가 된다. 식(11)에서 cosine항을 지수항으로 바꿔서 쓸 때 $\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}$ 를 포함하는 항(term)이 있으며 이는 산란이론에서 미래에서 과거로 진행하는 파이므로 제외되어야 한다(J.J.Sakurai). 따라서 $\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}$ 항의 계수를 영으로 놓으면

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(a_m \exp\left(\frac{i|m+\alpha|}{2}\pi + i\frac{\pi}{4}\right) - i^m \exp\left(\frac{im\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right)\right) e^{im\theta} = 0$$

$$a_m = i^{2m} \exp\left(-\frac{i}{2}|m+\alpha|\pi\right) \quad \text{——— (12)}$$

이 되고 (11)식에 a_m을 대입해서 정리하면 다음이 된다.

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \left\{ i^{2m} \exp\left(-|m+\alpha|\pi - i\frac{\pi}{4}\right) - i^m \exp\left(-\frac{im\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi k}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} \left\{ (-1)^m e^{-i|m+\alpha|\pi} - 1 \right\} e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \text{—— (13)}$$

(13)식에 있는 급수를 계산하기 위하여 수렴인자

$e^{-m\in}$을 도입하고 결과식에서 $\in$을 zero로 보내버린다.(이 때 $\in$은 임의의 양수)

$$\sum_{m+-\infty}^{+\infty} e^{im(\theta+i\in)}\{(-1)^m e^{-i|m+\alpha|\pi}-1\}$$

$$=\Big(\sum_{m=-[\alpha]}^{+\infty}+\sum_{m=-[\alpha]-1}^{-\infty}\Big)e^{im(\theta+i\in)}\{(-1)^m e^{-i|m+\alpha|\pi}-1\} \text{ —— (14)}$$

여기서 $[\alpha]$는 α를 넘지 않는 최대정수이다. 첫번째 합에서 m대신 m-$[\alpha]$를 두번째 합에서는 m-$[\alpha]$-1로 치환하고 나서 m대신 -m으로 치환하면 식(14)는

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m-[\alpha])(\theta+i\in)}(e^{-i\alpha\pi}-1)$$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-i(m+[\alpha]+1)(\theta+i\in)}(e^{i\alpha\pi}-1)$$

$$=e^{-i[\alpha]\theta}(e^{-i\alpha\pi}-1)\sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\theta+i\in)}$$

$$+e^{-i([\alpha]+1)}\ (e^{i\alpha\pi}-1)\sum_{m=0}^{\infty} e^{-im(\theta+i\in)} \text{ —— (15)}$$

와 같이 되고 합의 기호 밖에 나와 있는 인자에서는 $\in$을 영으로 놓을 수 있다.

다음 관계식을 이용하여 식(14)를 다시 쓰자.

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\theta+i\in)}=\frac{1}{1-e^{i(\theta+i\in)}}=\frac{-e^{-i\theta/2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-im(\theta+i\in)}=\frac{1}{1-e^{-i(\theta+i\in)}}=\frac{e^{i\theta/2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \text{ —— (16)}$$

$$(14)=\frac{-e^{-i\theta/2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}e^{-i[\alpha]\theta}(e^{-i\alpha\pi}-1)$$

$$+\frac{e^{i\theta\cdot 2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}e^{-i([\alpha]+1)\theta}(e^{i\alpha\pi}-1)$$

$$=\frac{e^{-i[\alpha]\theta-i\theta/2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\alpha\pi}) \text{ —— (17)}$$

따라서

$$f(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\sin\frac{\theta}{2}}\exp[-i(([\alpha]+\frac{1}{2})\theta+\frac{i\pi}{4}] \text{ —— (18)}$$

가 되고 산란 파동 함수는 다음과 같이 된다.

$$\psi_1=e^{ikr\cos\theta}+\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi kr}\ \sin\frac{\theta}{2}}\exp[-i(([\alpha]+\frac{1}{2}\ \theta+\frac{i\pi}{4}] \text{ —— (19)}$$

$$\psi_2=e^{ikr\cos\theta}+\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi kr}\ \sin\frac{\theta}{2}}\exp[-i(([\alpha]+\frac{1}{2}\ \theta+\frac{i\pi}{4}] \text{ —— (20)}$$

(19)식과 (20)식의 결과를 ref.1), ref.2)의 결과와 비교하면 ref.1), ref.2)에서는 $o<\alpha<1$인 경우로서 $[\alpha]=0$가 된다. Flux를 α로 나타내면 $\Phi=-\frac{ch}{e}\alpha$로서 α의 범위를 한정시키는 것은 특정범위의 flux만을 고려한 것이 된다. 또한 non-Abelian 경우에는 일반적으로 $[\alpha]\neq 0$이므로 (P.A. Horvathy, 1986) 임의의 α에 대한 결과식이 보다 정확한 정보를 제공하여 준다. (19)식과 (20)식을 이용하면 입사양성자 파동함수는 산란후 양성자 파동함수와 중성자 파동함수의 중첩이 된다. 물론 이 경우 전하보존의 법칙은 gauge potential의 charge도 고려하므로서 해결된다.

참 고 문 헌

Arfken, G. 1989. Mathematical methods For Physicists. 3rd. Ed. Chap. 11.

Haronov, Y. A., D. Bohm. 1959. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. Phys. Rev. 115, 485

Horvathy, P. A. 1986. Non-Abelian Aharonov-Bohm Effect. Phys. Rev. D33, 407.

Jackson, J. D. 1984. Classical Electrodynamics. 2nd. Ed. Chap. 6.

Wu, T. T., C. N. Yang. 1975. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields. Phys. Rev. D12, 3845.