科學敎育, 11, 67~83, 1994
Journal of Science Education
11, 67~83, 1994

구간 계산을 이용한 고정점 반복법에 관한 연구

고연순* · 김도현**

A Study on Fixed Point Iteration Using the Interval Computations

Ko, Yeon-Soon* · Kim, Do-Hyun**

Abstract

Root-finding problem is one of the most basic problem in numerical analysis.

In this thesis, we shall consider a method for including zeros of real function of the real variable x. We can use the interval computations to find zeros of the function. Among the many methods for root finding, we shall study especially fixed point iteration.

It can be used to find zeros of the function with non-accuracy coefficients and an approximation of solution in algebraic equations.

1. 서 론

수치해석에서 중점으로 다루는 문제는 效率性과 正確性이다. 수학적으로는 완전히 해결된 문제도 실제로 컴퓨터를 써서 해를 구하려면 그 方法이 문제가 될 수 있다. 즉, 방정식의 根이 존재함이 수학적으로도 證明되도, 실제로 그 根을 구하려고 할 때 解決方法에서 문제점이 발생한다.

방식식의 근을 구할 때 2차방정식은 우리가 알고 있는 근의 공식을 이용하여 근을 구할 수 있다. 3차, 4차 방정식의 경우도 근을 구하는 공식이 있으나 복잡하고, 5차이상의

* 제주 공업고등학교 교사
** 제주대학교 사범대학 수학교육과

방정식에는 일반적으로 근을 구하는 공식이 없다. 따라서 方程式 $f(x)=0$의 根을 구함에 있어서, 근을 구하는 공식이 존재하지 않음이 알려져 있는 5차 이상의 代數方程式 및 근을 구하는 것이 불가능한 函數에서 수치해석을 이용한 계산방법은 최후의 수단이다. 그러므로 근이 존재하는 것을 확인한 후 적당한 방법을 반복함으로써 참근에 接近시키는 방법을 생각해 본다. 이 과정에서 效率性과 正確性이 가장 중요하다.

이제 방정식의 根을 찾기 위하여 固定點 反復法을 區間計算(Interval Computation)을 사용하여 변형시킴으로써 원하는 근사해를 구하여 효율성을 알아 보고 문제점을 提起하고자 한다. 區間計算을 이용했을 때의 효율성은 實驗, 觀察등에서 얻어지는 부정확한 데이타를 정확하게 입력시킬 수 있고, 무리수와 같은 데이타를 컴퓨터에 정확하게 입력시켜 원하는 근사해를 찾는데 도움을 준다.

2장에서는 구간계산에서의 二項演算을 +, -, ., / 등을 定義하고 여러가지 性質을 살펴본다.

3장에서는 구간계산을 이용한 連續 實函數 f에 대해 考察해 본다.

4장에서는 구간을 이용한 固定點 反復法의 性質을 조사한다.

5장에서는 실제로 例題을 들어 PASCAL-SC를 이용하여 프로그램에서 그 결과를 알아본다.

그리고, 이 방법을 사용함에 있어서 문제점을 提示한다.

2. 실수구간 계산

지금부터 實數 集合은 **R**로 表示하고, **R**의 元素는 小文字 a, b, ⋯, y, z로서 表示한다.

$$A=[a_1,a_2]=\{t \mid a_1 \leq t \leq a_2, \quad a_1,a_2 \in \mathbf{R}\}$$

와 같은 형의 實數의 部分集合을 閉區間으로 부른다. 모든 閉區間의 集合은 $I(\mathbf{R})$로 表示하고 $I(\mathbf{R})$의 元素는 大文字 A, B, ⋯, Y, Z로서 表示한다. 實數 x∈**R**는 $I(\mathbf{R})$에서의 특수한 元素 〔x, x〕로 생각할 수 있으며 그것을 點 區間으로 부른다.

<u>定義 2. 1.</u> $* \in \{+, -, ., /\}$를 實數集合 **R**에서 二項演算이라 하자. 만약 A, B∈$I(\mathbf{R})$이면, $A*B=\{z=a*b \mid a\in A,\ b\in B\}$를 $I(\mathbf{R})$에서 二項演算이라고 定義한다.

區間 $A=[a_1, a_2]$, $B=[b_1, b_2]$에서 演算은 다음과 같이 計算된다.

$A+B=[a_1+b_1,\ a_2+b_2]$,

$A-B=[a_1-b_1,\ a_2-b_2]$,

$A\cdot B=[\min\{a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2\},\ \max\{a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2\}]$,

$A/B=[a_1, a_2]\cdot[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$ (단, $0\notin B$)

<u>定義 2.2.</u> 만약 r(x)가 **R**에서 連續 一項演算이면,

$$r(X)=[\min r(x), \max r(x)] \quad \text{단, } x\in X$$

를 $I(\mathbf{R})$ 상에서 一項演算으로 定義한다.

$I(\mathbf{R})$에서 一項演算에 對한 例를 보면, X^k ($k\in\mathbf{R}$), e^x, $\ln X$, $\sin X$, $\cos X$等이다.

<u>定理 2.3.</u> A, B, C를 $I(\mathbf{R})$의 元素라 하면 다음 性質의 成立한다.

(1) $A+B=B+A$, $A\cdot B=B\cdot A$ (交換法則)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$, $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (結合法則)

(3) $X=[0, 0]$과 $Y=[1, 1]$은 덧셈과 곱셈에 關한 項等元이다. 즉, 모든 $A\in I(\mathbf{R})$에 對하여,

$$A=X+A=A+X \Leftrightarrow X=[0,0],$$

$$A=Y\cdot A=A\cdot Y \Leftrightarrow Y=[1,1].$$

(4) $a_1\neq a_2$인 任意의 元素 $A=[a_1, a_2]\in I(\mathbf{R})$은 +와 ·에 對한 逆元을 갖지 않는다. 그러나 다음이 成立한다.

$$0\in A-A, \quad 1\in A/A,$$

$$A\cdot(B+C)\subset A\cdot B+A\cdot C \quad \text{(部分的인 分配法則)}$$

(5) 任意의 實數 a에 대하여, $a(B+C)=aB+aC$

모든 $b \in B$, $c \in C$에 대하여 $bc \geq 0$이면, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

<u>定理 2.4.</u> $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(\mathbf{R})$ (단, $k=1,2$)이고 $A^{(k)} \subset B^{(k)}$ (단, $k=1,2$)이라 하면, 演算 $* \in \{+, -, \cdot, /\}$에 對하여

$$A^{(1)} * A^{(2)} \subset B^{(1)} * B^{(2)}$$

이 成立한다.

또한, 一項演算 $r(X)$는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$X \subset Y \Rightarrow r(X) \subset r(Y)$$

$$x \in X \Rightarrow r(x) \in r(X).$$

<u>定義 2.5.</u> 두개의 區間 $A=[a_1, a_2]$, $B=[b_1, b_2]$ (단, $A, B \in I(\mathbf{R})$)사이의 距離는 다음과 같이 定義한다.

$$q(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

<u>定理 2.6.</u> 定理 2.5.의 距離를 갖는 距離空間$(I(\mathbf{R}), q)$는 完備性(complete)이다.
(이것은 區間들의 모든 Cauchy 數列은 한 區間으로 收斂한다는 것이다.)
<u>定理 2.7.</u> $A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \cdots$인 區間들의 數列 $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 區間 $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$에 收斂한다.

<u>定理 2.8.</u> 定義 2.1에 紹介한 區間사이의 演算 $+$, $-$, $\cdot$, $/$은 連續이다.

<u>定義 2.9.</u> $I(\mathbf{R})$에 속하는 任意의 區間 $A=[a_1, a_2]$의 절대값은 다음과 같이 定義한다.

$$|A| = q(A, [0, 0]) = \max\{|a_1|, |a_2|\}$$

定義 2.10. 區間 $A=[a_1, a_2]$의 나비(폭)는

$$d(A) = a_2 - a_1 \geq 0$$

으로 定義한다.

點 區間의 集合은 $\{A \in I(\mathbf{R}) \mid d(A)=0\}$로 表示된다. 위의 定義로부터 다음의 性質을 얻을 수 있다.

$$A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$$
$$d(A \pm B) = d(A) + d(B).$$

定理 2.11. $I(\mathbf{R})$에 속하는 任意의 區間 A, B에 對하여 다음 性質이 成立한다.

(1) $d(A) = |A - A|$,

(2) $A \subset B \Rightarrow \frac{1}{2}(d(B) - d(A)) \leq q(A, B) \leq d(B) - d(A).$

3. 구간값과 실함수의 치역

이 節에서는 連續 實函數 f에 대해 考察해 본다. f로부터 表現되는 어떤 式 $f(x)$는 獨立變數에 대한 函數 f의 값을 決定하는 計算過程이다. f로부터 表現되는 어떤 式이 常數 $a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}$을 갖는 다면, 이것을 $f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$로 쓰기로 한다. 여기에서 각각의 常數 $a^{(k)}$ $(0 \leq k \leq m)$는 한 式에서 오직 한 번만 나타난다고 假定한다.

(例) : 함수 f에 대한 2개의 式은

$$f^{(1)}(x; a) = \frac{ax}{1-x}, \quad x \neq 1, x \neq 0,$$
$$f^{(2)}(x; a) = \frac{a}{\frac{1}{x} - 1}, \quad x \neq 1, x \neq 0$$

이다.

다음의 式

$$\begin{aligned} &W(f, X; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)}) \\ &= \{f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) \mid x \in X,\ a^{(k)} \in A^{(k)},\ 0 \leq k \leq m\} \\ &= [\min_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \leq k \leq m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}), \max_{\substack{x \in X \\ a^{(k)} \in A^{(k)}, 0 \leq k \leq m}} f(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})] \end{aligned}$$

는 $x\in X$와 $a^{(k)}\in A^{(k)}$, $0\le k\le m$가 서로 獨立일 때 그 函數 f의 모든 값들을 包含하는 區間을 나타낼 것이다. 이 定義는 f의 식과 獨立이다.

(例) : 앞 例에서의 函數 f와 $A=[0,1]$, $X=[2,3]$에 對하여

$$W(f^{(1)},[2,3];[0,1])=\{\frac{ax}{1-x}\mid 2\le x\le 3,\ 0\le a\le 1\}=[-2,0]$$

$$W(f^{(2)},[2,3];[0,1])=\{\frac{a}{\frac{1}{x}-1}\mid 2\le x\le 3,\ 0\le a\le 1\}=[-2,0]$$

따라서

$$W(f^{(1)},X;A)=W(f^{(2)},X;A)$$

그러나,

$$f^{(1)}([2,3];[0,1])=\frac{[0,1][2,3]}{1-[2,3]}=[-3,0]$$

$$f^{(2)}([2,3];[0,1])=\frac{[0,1]}{\frac{1}{[2,3]}-1}=[-2,0]$$

이므로

$$f^{(1)}(X;A)\neq f^{(2)}(X;A)$$

어떤 實函數 f의 區間計算은 다음과 같이 定義한다. 어떤 式의 函數 f로 주어졌다고 하자. 이 식에서 구간으로 바꾼 모든 被演算數와 區間演算으로 바꾼 모든 演算은 式 $f(x, A^{(0)},\cdots A^{(m)})$로 表現된다. 만약 모든 被演算數가 定義 2.1과 定義 2.2에서 관련된 演算의 定義城안에 있다면, 이것은 f에 對한 區間計算 또는 區間 算術計算이라 부른다.

<u>定理 3.1.</u> f를 實變數 $x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$인 連續函數라 하고, f에 대한 어떤 式을

$$f(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이라하자. 區間 $Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)}$, $B^{(0)},\cdots,B^{(m)}$에 對한 區間計算을

$$f(Y^{(1)},\cdots,Y^{(n)};B^{(0)},\cdots,B^{(m)})$$

으로 定義하면 다음이 成立한다.

(a) 모든 $X^{(k)}\subset Y^{(k)}$, $A^{(j)}\subset B^{(j)}$, $1\le k\le n$, $0\le j\le m$에 對하여, $W(f, X^{(1)},\cdots,X^{(n)}; A^{(0)},\cdots,A^{(m)})\subset f(X^{(1)},\cdots,X^{(n)};A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$

(b) 모든 $X^{(k)} \subset Y^{(k)}$, $A^{(j)} \subset B^{(j)}$, $1 \le k \le n$, $0 \le j \le m$에 對하여, $f(X^{(1)}, \cdots, X^{(n)}; A^{(0)}, \cdots, A^{(m)}) \subset f(Y^{(1)}, \cdots, Y^{(n)}; B^{(0)}, \cdots, B^{(m)})$

이 成立한다.

(例) : 函數 f를 $f(x; a) = a - \frac{x}{1+x}$, $(x \neq -1)$ 이라 하고,

$X = [-\frac{1}{2}, 1]$, $Y = [-\frac{1}{2}, 2]$, $A = B = [2, 3]$을 選擇하면, 다음의 關係를 얻는다.

$$W(f, [-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [\frac{3}{2}, 4] \subset f([-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [0,4]$$

$$f([-\frac{1}{2}, 1]\ ;\ [2,3]) = [0,4] \subset f([-\frac{1}{2}, 2]; [2,3]) = [-2,4].$$

定理 3.1. (a)에서 항상 等式을 얻을 수 있는 경우는 각각의 數 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}, a^{(0)}, \cdots, a^{(n)}$가 식 $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$에서 오직 한 번만 나타날 때이다.

定理 3.2. p를 다음 式으로 定義하는 實變數 x에 대한 多項式이라 하자.
$p(x; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$

$$= (\cdots((a^{(m)}x + a^{(m-1)})^{n_{m-1}} + a^{(m-2)})^{n_{m-2}} + \cdots + a^{(1)})^{n_1} + a^{(0)},\quad \text{단},\quad n_v \ge 2,\quad 1 \le v \le m-1.$$

만약, 그 式에서 나타난 冪들(Powers) 이

$$X^k = [\min_{x \in X} x^k, \max_{x \in X} x^k]$$

와 같이 計算되어 진다면,

$$W(p, X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)}) = p(X; a^{(0)}, \cdots, a^{(m)})$$

이 된다.

(주의) : 一般的으로, $X^2 \neq X \cdot X$가 된다.

定理 3. 1의 一般的인 內容과 定理 3. 2에서 記述된 特別한 경우와 더불어 區間計算을 한 어떤 函數 f에 對한 近似値의 性質에 關心이 있다. 그러므로, 一變數 函數인 경우에는 다음과 같이 體系化시킬 수 있다.

定理 3. 3. f를 實變數 x의 實函數라 하고, $f(x;a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$를 f의 任意의 式이라 하자. 새로운 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

은 各各에 나타난 實變數 x를 새로운 變數 $x^{(k)}$, $1\le k\le n$로 代置함으로써 定義된다. Y와 $A^{(0)},\cdots,A^{(m)}\in I(\mathbf{R})$에 대하여, 區間計算 $f(Y;A^{(0)},\cdots,A^{(m)})$가 存在한다고 하자. 또한 다음 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\cdots,x^{(n)};a^{(0)},\cdots,a^{(m)})$$

이 區間 Y에 있는 各 變數 $x^{(k)}$에 對하여 任意의 $x^{(j)}\in Y$, $1\le j\le n$, $j\ne k$, $a^{(j)}\in A^{(j)}$, $0\le j\le m$에 對한 Lipschitz 條件을 滿足한다고 하자. 그 밖의 記法(notation)은 定理 3. 1에서와 같다. 그러면 $X\subset Y$에 對하여 다음이 성립한다.

$$q(W(f,X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}),f(X;A^{(0)},\cdots,A^{(m)}))\le r\cdot d(X),\ r\ge 0.$$

定理 3. 4. f가 實變數 x의 實函數이고 $f(x)$를 f에 對한 任意의 式이라고 하자. 定理 3. 3의 모든 假定이 成立된다고 하면, 임의의 $X\subset Y$에 對하여,

$$d(f(X))\le\rho\cdot d(X),\quad \rho\ge 0$$

이 成立한다.

4. 고정점 반복법

어떤 函數 g에 對하여 $g(x)=x$로 表現되는 方程式에서의 根을 찾는 方法에 대해 살펴보고자 한다. 이러한 方程式의 根을 函數 g에서의 固定點(Fixed point)이라 한다. 만약 주어진 임의의 函數 g에서 固定點을 찾을 수 있다면, 根을 찾는 모든 問題들은 解決이

可能하게 된다. 例를 들어, $f(x)=0$의 근을 찾는 問題는 $g(x)=x-f(x)$일때,, $g(x)=x$, $g(X)=X$의 固定點과 一致하게 된다. 그러므로, 解決해야 할 課題는 函數가 固定點을 언제 가지는가를 決定하는 것이며, 固定點 또는 固定點 問題들이 어떻게 決定될 수 있는가 하는 것들이다.

§1. 점 반복법(Point iteration)

다음 定理는 固定點의 存在性(existence)과 唯一性(uniqueness)에 대한 充分條件을 提示한다.

定理 4.1. 임의의 $x\in[a,b]$에 對하여 $g\in C[a,b]$, $g(x)\in[a,b]$라고 하면, 函數 g는 區間$[a,b]$에서 固定點을 가진다.

더구나, $g'(x)$가 區間(a,b) 위에서 存在하고, 모든 $x\in(a,b)$에 對하여

$$|g'(x)| \le k < 1$$

이라고 假定하면, 函數 g는 區間$[a,b]$에서 정의된 唯一한 固定點 ξ를 가진다.

定理 4.2. 函數 g를 區間$[a,b]$에서 정의된 連續函數라 하고 임의의 $x\in[a,b]$에 對하여 $g(x)\in[a,b]$라 하자. 또한, 모든, $x\in(a,b)$에 대해

$$|g'(x)| \le k < 1$$

을 滿足하는 g'가 區間(a,b)에서 存在한다고 하자.

만약, $P^{(0)}$를 區間$[a,b]$에서의 임의의 數라고 하면,

$$p^{(n)} = g(p^{(n-1)}), \quad n \ge 1$$

로 定義되는 數列은 區間$[a,b]$에 있는 唯一한 固定點 ξ로 收斂할 것이다.

§2. 구간 반복법(Interval iteration)

다음은 函數의 區間計算에 대한 基礎的인 固定點 定理이다.

<u>定理 4.3.</u> 函數 f는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$을 滿足하는 $X^{(0)}$에서의 連續函數라 하자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \geq 0$$

로 주어지는 反復法이

$$X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

를 滿足하면, 다음이 結果를 얻는다.

(1) 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 $X = f(X)$ 를 갖는

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X$$

를 만족한다.

(2) $x = f(x)$를 滿足하는 各各의 $x \in X^{(0)}$는 X에 包含된다. 즉,

$$\{x | x \in X^{(0)},\ x = f(x)\} \subset X$$

가 成立한다.

(證明)

(1) 假定 $X^{(1)} \subset X^{(0)}$로부터 다음이 滿足된다.

$$X^{(2)} = f(X^{(1)}) \subset f(X^{(0)}) = X^{(1)} \subset X^{(0)}.$$

그러므로 數學的 歸納法에 의해,

$$\cdots \subset X^{(3)} \subset X^{(2)} \subset X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

를 보일 수 있다. 定理 2.7로부터 數列은 하나의 元素 $X \in I(\mathbb{R})$로 收斂함을 알 수 있다.

이제, 區間計算의 連續性은

$$X = \lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \lim_{k \to \infty} f(X^{(k)}) = f(X)$$

를 意味한다.

(2) $x \in X^{(0)}$는 $x=f(x)$를 滿足한다고 하자. 定理 2.4에 의해 다음을 滿足시킨다.

$$x = f(x) \in f(X^{(0)}) = X^{(1)}.$$

$$x = f(x) \in f(X^{(1)}) = X^{(2)}.$$

그러므로, 一般的으로 數學的 歸納法에 의하여

$$x \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

를 滿足하며 結果的으로 $x \in X$이다.

이제, 기초적인 固定點 定理 4.3.을 약간 수정한 또 하나의 固定點 定理를 證明한다.

<u>定理 4.4.</u> 函數 f는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$를 滿足하는 $X^{(0)}$에서의 連續函數라 하자. 다음의 反復法을 생각해보자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}) \cap X^{(k)}, \quad k \geq 0.$$

方程式 $\tilde{x} = f(\tilde{x})$ 를 滿足하는 $\tilde{x} \in X^{(0)}$가 적어도 하나는 存在한다고 假定하면, 다음의 結果를 얻는다.

(1) 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 $X = f(X) \cap X$를 갖는

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X$$

를 滿足한다.

(2) 方程式 $x=f(x)$를 滿足하는 各各의 $x \in X^{(0)}$는 X에 包含된다. 즉,

$$\{x | x \in X^{(0)},\ x = f(x)\} \subset X.$$

(證明)

(1) $\tilde{x} \in X^{(0)}$이므로 다음이 成立한다.

$$\tilde{x} \in f(X^{(0)}) \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

數學的 歸納法을 이용하여,

$$\tilde{x} \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

를 얻을 수 있다. 區間들의 共通部分은 항상 공집합이 아니므로, 定理 2.7에 의해 數列 $X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \cdots$는 X로 收斂한다. 따라서,

$$X = \lim_{k \to \infty} X^{(k+1)} = \lim_{k \to \infty} f(X^{(k)}) \cap (X^{(k)}) = f(X) \cap (X)$$

가 成立한다.

(2) $x = f(x)$인 $x \in X^{(0)}$를 假定하면 다음이 成立한다.

$$x = f(x) \in f(X^{(0)}) \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

또한, 數學的 歸納法에 의하여

$$x \in X^{(k)}, \quad k \geq 0$$

이며, 結果的으로 $x \in X$이다.

定理 4.3.과 定理 4.4.의 假定에서 存在하는 固定點은 반드시 唯一한 것은 아니다. 이것은 다음의 간단한 例에서 보여지고 있다.

(예) 方程式 $X = X \cdot X \cdot X$(단, $X \in I(\mathbf{R})$)을 생각해 보자. 이 式은 $I(\mathbf{R})$의 元素인 다음의 區間들에서 明白하게 滿足된다.

$$X = [-1, 1],\ [1, 1],\ [-1, -1],\ [0, 1],\ [-1, 0],\ [0, 0].$$

다음의 定理들은 固定點의 唯一性을 보여준다.

<u>定理 4.5.</u> 函數 f는 $X^{(0)} \in I(\mathbb{R})$을 滿足하는 $X^{(0)}$에서의 連續函數라고 하자.

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \geq 0$$

과 r < 1일때 모든 $X, Y \subset X^{(0)}$에 對하여

$$q(f(X), f(Y)) \leq r \cdot q(X, Y)$$

임을 고려해보면, $X = f(X)$는 唯一한 固定點 $X^* \in I(\mathbf{R})$을 가진다. 뿐만 아니라, 이 反復法은 X^*에 收斂한다.

(證明) : 임의의 k, $m \geq 1$에 對하여 數列

$$\lim_{k \to \infty} r^k = 0, \quad \{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$$

이 <u>코오시수열</u>(Cauchy sequence)이므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} q(X^{(k+m)}, X^{(k)}) &\leq q(X^{(k+m)}, X^{(k+m-1)}) + \cdots + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\ &= q(f(X^{(k+m-1)}), f(X^{(k+m-2)})) + \cdot + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\ &\leq r^{(m-1)} \cdot q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) + \cdots + q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} r^j \cdot q(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \\ &\leq \left(\frac{1}{1-r}\right) \cdot r^k \cdot q(X^{(1)}, X^{(0)}). \end{aligned}$$

$I(\mathbb{R})$이 完備性(Complete)이므로,

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X^*, \quad X^* = f(X^*).$$

가 成立한다.

固定點의 唯一性(Uniqueness)은 다음으로부터 얻어진다.

$$q(X^*, Y^*) = q(f(X^*), f(Y^*)) \le r \cdot q(X^*, Y^*),$$

$$X^* \ne Y^*, \quad X^* = f(X^*), \quad Y^* = f(Y^*).$$

이때, $r<1$이므로 이 不等式은 矛盾이다.

<u>定理 4.6.</u> 函數 f는 $X^{(0)} \in I(\mathbf{R})$을 滿足하는 $X^{(0)}$에 있는 實變數 x를 갖는 連續 實函數라고 하자. $f(x)$는 函數 f의 式이다. 또한, $x \in X^{(0)}$에 對하여 $X^{(0)}$에서 $f'(x)$가 存在하고,

$$|f'(x)| \le k < 1, \quad x \in X^{(0)}$$

라고 假定하자.

이때,

$$X^{(k+1)} = f(X^{(k)}), \quad k \ge 0$$

$$X^{(1)} \subset X^{(0)}$$

이고

$$d(f(X)) \le \rho \cdot d(X), \quad 0 \le \rho < 1$$

이 $X \subset X^{(0)}$에 對하여 明白하다고 하면, 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 다음의 性質을 갖는다.

(1) f는 $X^{(0)}$에서 唯一한 固定點 ξ를 갖는다.

(2) $\xi \in X^{(k)}$, $k \ge 0$.

(3) $X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \cdots$는 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \xi$를 滿足한다.

(證明)

(1) : 定理 4.1.에 의해 明白하다.

(2) : 定理 4.2.에 의해 明白하다.

(3) : $d(f(X)) \le p \cdot d(X)$, $d(X^{(k+1)}) \le p \cdot d(X^{(k)})$이므로

$$d(X^{(k+1)}) \le \rho^{(k+1)} \cdot d(X^{(0)}).$$

이것은 다음을 意味한다.

$$\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)}) = 0.$$

이미 어떤 k_0에 대하여 $X^{(K_0+i)}=\xi$, $i\leq 1$임에도 불구하고 (2)는 $\xi\in X^{(k)}=\xi$ 가 成立한다.

(例題) : 函數 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$은 區間 $X^{(0)}=[1, 1.5]$에서 唯一한 根 ξ를 가진다.

$$x = \frac{20}{(x^2+2x+10)}$$

은 $x=g(x)$의 形式중의 하나이다. 函數

$$g(x) = \frac{20}{(x^2+2x+10)}$$

은 定理 4.6.의 條件을 滿足한다.

그러므로 다음이 成立한다.

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = [\xi,\xi], \quad k\geq 0.$$

$$[\because \ \bullet\ |g'(x)| = \left|\frac{-20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}\right| < \frac{x+1}{4} \leq \frac{2.5}{4} < 1, \quad x\in X^{(0)}.$$

- 函數 g는 $X^{(0)}$에서 減少한다.
- 만일 函數 g가 微分可能하고 g'이 有界이면, g는 絶對連續(Absolutely continuous)이다.
- 임의의 x, $y\in X$에 對하여

$$|g(x)-g(y)| \leq M|x-y|$$

를 滿足하는 常數 M이 存在할 必要充分條件은 函數 g가 絶對收斂(Absolutely continuous)하고 $|g'|\leq M$이다.]

5. 응 용

이 장에서는 例題를 통하여 固定點 反復法(Fixed-point iteration)의 性能을 알아보고자 한다.

$$(\text{例題})\quad f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

$f=x^3+2x^2+10x-20$은 區間 $X^{(0)}=[1, 1.5]$에서 唯一한 해 ξ를 갖고 있다. 函數 $f=x^3+2x^2+10x-20$은 $x=g(x)$, $|g'(x)|\le k<1$을 滿足하는 函數 $g(x)=x=\dfrac{20}{(x^2+2x+10)}$ 을 찾을 수 있으므로 固定點 反復法이 可能하다. 그 過程들은 이미 앞에서 言及했으므로 그 計算結果만을 보여주도록 하겠다. 프로그램에 의한 계산의 結果는 다음과 같다.

```
The initial interval              >>>>> [1.0E+00,    1.5E+00]
The Tolerance                     >>>>> 1.00000000000E-10
The Maximum iteration number      >>>>> 30
*****************************************************************
 N                          Nth  Iteration  interval
*****************************************************************
 1 [              1.3E+00,                     1.5E+00]
 2 [              1.31E+00,                    1.40E+00]
 3 [              1.35E+00,                    1.40E+00]
 4 [              1.35E+00,                    1.38E+00]
 5 [              1.366E+00,                   1.374E+00]
 6 [              1.366E+00,                   1.370E+00]
 7 [              1.368E+00,                   1.370E+00]
 8 [              1.3683E+00,                  1.3691E+00]
 9 [              1.3687E+00,                  1.3691E+00]
10 [              1.3687E+00,                  1.3689E+00]
11 [              1.36879E+00,                 1.36885E+00]
12 [              1.36879E+00,                 1.36882E+00]
13 [              1.36880E+00,                 1.36882E+00]
14 [              1.368804E+00,                1.368810E+00]
15 [              1.368807E+00,                1.368810E+00]
16 [              1.3688074E+00,               1.3688085E+00]
17 [              1.3688079E+00,               1.3688085E+00]
18 [              1.3688079E+00,               1.3688082E+00]
19 [              1.36880808E+00,              1.36880817E+00]
20 [              1.36880808E+00,              1.36880812E+00]
21 [              1.36880810E+00,              1.36880812E+00]
22 [              1.368808102E+00,             1.368808111E+00]
23 [              1.368808106E+00,             1.368808111E+00]
24 [              1.368808106E+00,             1.368808109E+00]
25 [              1.3688081076E+00,            1.3688081083E+00]
26 [              1.3688081076E+00,            1.3688081080E+00]
27 [              1.3688081077E+00,            1.3688081080E+00]
28 [              1.36880810777E+00,           1.36880810785E+00]
*****************************************************************
 Solution      >>>>>  [ 1.36880810777E+00,  1.36880810785E+00]
```

6. 결　　론

本文에서 다룬 區間計算은 적절한 初期値를 잡고 近似解를 구하는데 重要하게 使用된다. 區間計算을 使用했을 때의 效率性은 無理數와 有限素數로 表現될 수 없는 分數와 같은 數를 正確하게 컴퓨터에 入力시켜서 원하는 만큼 正確한 方程式의 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

그러나 이 方法들을 使用함에 있어서 몇 가지 問題點이 있었다.

첫째, 初期區間을 設定할 때 단 하나의 根만을 包含해야 하는 假定에 의해 그 區間을 어떻게 신속히 찾아낼 수 있는가 하는 것이다.

둘째, 특히 固定點 反復法에서 $f(x)=0$일 때 $|g'(x)| \le k < 1$을 滿足하는 $x=g(x)$인 函數 $g(x)$의 表現式을 적절하게 찾을 수 있는가 하는 것이다.

이러한 問題點들이 解決된다면, 區間計算을 사용한 方程式의 近似解를 구함에 있어서도 매우 有用할 것이다.

참고문헌

1. 송만석, 장건수, 수치해석학, 김영사, 1986.
2. 이경환, 송문섭, 수치해석, 회중당, 1984.
3. 홍준표, 이경이, 컴퓨터수치해석연습, 문운당, 1991.
4. Götz Alefeld, Jürgen Herzberger, Introductions to Interval Computation, Academic Press, 1983.
5. H. Ratschek, J. Rokne, Computer Methods for the Range of Functions, Halsted Press, 1984.
6. K. Nickel, The contraction mapping fixed point theorem in interval analysis. MRC Technical Summary Rep. No. 1334, Madison, Wisconsin, 1973.