

# Lipschitz 비선형 시스템의 제어기 설계

강진식\*

## Controller Design for Lipschitz Nonlinear System

Jin-Shik Kang\*

### ABSTRACT

In this paper, the Lipschitz nonlinear system, obtained by simple coordinate transform and linearization of the nonlinear system at the equilibrium or trajectory, is considered. For these systems, the quadratic stability is defined and is reformulated in the well known linear matrix inequality (LMI) which can be easily treated. Also, the stabilizability and detectability is characterized, and the state feedback and observer design problem is formulated, and transformed into affine convex optimization problem.

The controller structure considered in this paper is observer based state feedback control. Some new conditions are derived for the separation principle which have known not to applicable to nonlinear system. By using this property, the controller could be designed by separate design of state feedback controller and observer. But, this design may have poor property of enduring the model uncertainty. To overcome this poorness of robustness, the new controller parameterization is suggested and characterized by three combined LMI's.

**Key words** : Lipschitz nonlinear system, Quadratic stability, Linear matrix inequality,  
Affine convex optimization

### 1. 서론

선형 시스템에서의 Youla-변수화는 여러 형태의 강인성 제어문제와 최적제어문제의 해를 제시하고 있다. Yoular-변수화에서 입-출력 안정인 제어기는 선형 인수 변환 형태로 표현되며 선형 시스템에서의 입출력 안정도와 상태공간 안정도의 연관성에 의해 상

태 공간에서의 해는 소인수분해 방법으로 구할 수 있다<sup>1),2)</sup>. 즉, 내부 안정인 제어기는 내부 안정인 시스템의 선형 소인수 변환으로 특성화 된다. 그러나 비선형 시스템에 대해서는 몇몇 특수한 경우에만 이와 유사한 제어기 변수화가 가능하며<sup>3),4),5)</sup> 일반적인 경우에 제어기 변수화가 가능한지에 대한 명확한 결론을 내릴 수는 없다<sup>2),3)</sup>.

선형 시스템에 대한  $H_{\infty}$  제어 문제는 페루프를 안정화하며  $L_2$ 이득을 가능한 작게하는 제어기를 구하는 문제로 Doyle<sup>6)</sup> 등은 일반적인 선형 시스템에서의

\* 제주대학교 통신공학과  
Dept. Telecommunication Eng., Cheju Nat'l Univ.

해를 구하였고 Doyle과 Francis<sup>7,8)</sup> 등은 상태공간에서의 해를 구하였다. Liu<sup>9)</sup> 등은 Doyle의 방법을 확장하여 비선형 시스템에 대한  $H_\infty$  제어 문제를 다루었으며 제어가 존재할 충분조건과 변수화 된 제어를 구하였다. Isidori<sup>10)</sup>는 Dissipation 부등식을 이용하여 Liu와 유사한 충분조건을 제시하였다. 출력 되먹임  $H_\infty$  제어는 분리구조로서, Hamilton-Jacobi 방정식 (HJE) 또는 Hamilton-Jacobi 부등식(HJI)의 해로부터 설계되며<sup>11),12)</sup> Huang<sup>13)</sup> 등은 Taylor 급수 전개에 의한 해를 제시하였다.

선형 시스템에서의  $H_\infty$  제어에 대한 또 다른 접근 방법은 계산상의 효율성을 고려한 convex 최적화 방법으로 그 해는 선형 행렬 부등식(LMI) 표현된다.<sup>14)</sup> 비선형 시스템에 대한 이 방법의 확장성은 비선형  $H_\infty$  제어 문제의 convex성에 의하며 해는 비선형 행렬 부등식(NLMI)로 표현된다. Lu<sup>9)</sup> 등은 NLMI의 해로서 비선형 시스템에 대한  $H_\infty$  제어문제의 해를 조사하였지만 선형 시스템에서와는 다르게 NLMI의 해만으로는 제어가 존재함을 보이기에 충분하지는 않으며 단지 향후의 비 선형 시스템에 대한 제어기 설계 방향을 제시하였다.

본 논문에서는 Lipschitz 비선형 함수에 대한 제어를 설계하였다. II 장에서는 Lipschitz 비선형 시스템의 quadratic 안정도, 상태되먹임 제어기 설계문제, 관측기 설계문제 등에 대하여 서술하였으며 III 장에서는 제어기 구조와 설계에서 분리원칙에 대한 조건을 유도하였다. 그리고 모델오차 등에 의해서도 안정도 특성을 유지할 수 있도록 세 개의 행렬 부등식으로 표현되는 제어기 설계 방법을 제시하였다.

## II. Lipschitz 시스템의 제어기

이 장에서는 Lipschitz 비선형 시스템을 소개하고 quadratic 안정도를 정의한다. 그리고 상태되먹임 제어기 설계문제와 관측기 설계 문제에 대하여 기술하였다.

### 2.1. Lipschitz 비선형 시스템<sup>14),15)</sup>

본 논문에서는 다음과 같은 동력학식을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Phi(x, u) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

여기서  $x \in R^n$ 는 상태벡터,  $u \in R^p$ 는 입력벡터, 그리고  $y \in R^q$ 는 출력벡터이다. 그리고  $A, B, C$ 는 각각의 차수를 갖는 시스템 행렬이며  $\Phi(x, u)$ 는 Lipschitz 상수  $\gamma$ 를 갖는  $x$ 에 대한 Lipschitz 함수이다.

$$\|\Phi(x_1, u) - \Phi(x_2, u)\|_p \leq \gamma \|x_1 - x_2\|_p \quad (1c)$$

여기서  $\|\cdot\|_p$ 는  $p$ -노름이다. 그리고 입력  $\|u\|_p \leq K < \infty$ 에 대하여 다음식을 만족한다고 가정한다.

$$\|\Phi(x, u)\|_p \leq \tilde{\gamma} \|x\|_p \quad (1d)$$

식 (1c)는 상태벡터의 제한된 크기 변화에 대하여  $\Phi(x, u)$ 의 변화 크기가 한정되어야 함을 나타내며 식 (1d)는 제한된 크기의 입력에 대하여  $\Phi(x, u)$ 의 크기가 제한됨을 의미한다.

주어진 시스템의 자율운동에 대한 quadratic 안정도를 서술하기 위하여 다음과 같은 영 입력에 대한 동력학 식을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Phi(x, 0) \quad (2)$$

다음의 보조정리는 시스템 (1)의 자율 운동에 대한 quadratic 안정도를 정의한다.

**보조정리 1.** 다음 식을 만족하는 양 한정 대칭 행렬  $P$ 가 존재하면 식 (2)는 quadratic 안정이다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + I & P \\ P & -\frac{1}{\tilde{\gamma}^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

**증명)** Lyapunov 함수를  $V(x) = x^T P x$ 라 하자.

$$\dot{V}(x) = x^T [A^T P + PA]x + 2x^T P \Phi(x, 0)$$

여기서  $\|\Phi(x, 0)\|_p \leq \tilde{\gamma} \|x\|_p$ 이다. 그리고

$$2x^T P \Phi(x, 0) \leq 2\tilde{\gamma} \|Px\|_p \|x\|_p \quad (4)$$

이다. 간단한 대수식  $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ 을 이용하면 식(4)

는 다음과 같다.

$$2x^T P \Phi(x, 0) \leq \tilde{\gamma}^2 x^T P P x + x^T x$$

따라서

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T [A^T P + PA + \tilde{\gamma}^2 PP + I]x \\ \dot{V}(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \\ A^T P + PA + \tilde{\gamma}^2 PP + I < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이며, 식 (5)를 행렬의 Schur 상보를 이용하여 정리하면 식 (3)와 같다. 증명끝.

기존의 Riccati 행렬 부등식으로는 최적 해를 구하는 과정을 명확하게 표현할 수 없다. 그러나 식 (3)의 선형행렬 부등식은 최적 해를 구하는 과정을 쉽게 기술할 수 있으며 P. Gahinet<sup>[13]</sup> 등에 의하여 연구가 되었다. 그리고 MATLAB의 LMI Toolbox를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

## 2.2. 상태 되먹임 제어기 설계문제

상태 되먹임 제어문제를 서술하기 위한 제어입력은

$$u(t) = -Fx(t) \quad (6)$$

이다. 이때 페루프 동력학식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + \Phi(x, -BFx) \quad (7)$$

다음의 보조정리는 상태 되먹임에 의한 가 안정성 (stabilizability)에 대한 조건을 기술한다.

**보조정리 2.** 다음 식을 만족하는 양 한정 대칭 행렬  $P$ 가 존재하면 시스템 (1a)는 quadratic 안정화 가능하다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - F^T B^T P - PBF + I & P \\ P & -\frac{1}{\tilde{\gamma}^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

**증명)** Lyapunov 함수를  $V(x) = x^T P x$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T [(A - BF)^T P + P(A - BF)]x \\ &\quad + 2x^T P \Phi(x, -BFx) \end{aligned}$$

여기서  $\|\Phi(x, -BFx)\|_p \leq \tilde{\gamma} \|x\|_p$ 이다. 그리고

$$2x^T P \Phi(x, -BFx) \leq 2\tilde{\gamma} \|Px\|_p \|x\|_p \quad (9)$$

이다. 간단한 대수식  $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ 을 이용하면 식(9)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2x^T P \Phi(x, -BFx) &\leq \tilde{\gamma}^2 x^T P P x + x^T x \\ \text{따라서} \\ \dot{V}(x) &= x^T [(A - BF)^T P + P(A - BF) \\ &\quad + \tilde{\gamma}^2 PP + I]x \\ \dot{V}(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \\ A^T P + PA - F^T B^T P - PBF \\ &\quad + \tilde{\gamma}^2 PP + I < 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)를 행렬의 Schur 상보를 이용하여 정리하면 식 (8)과 같다. 증명끝.

다음의 보조정리는 보조정리 1과 동가이며 상태 되먹임 제어기의 해를 준다.

**보조정리 3.** 다음의 LMI는 식 (8)과 동가이다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & P \\ P & -\frac{1}{\tilde{\gamma}^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

이때 상태 되먹임 제어이득  $F$ 는

$$F = \frac{1}{2} B^+ P^{-1} \quad (12)$$

이다.

**증명)** 식 (10)의 Riccati 부등식은 다음과 같이 나누어 쓸 수 있다.

$$A^T P + PA + \tilde{\gamma}^2 PP < 0 \quad (13)$$

$$-F^T B^T P - PBF + I = 0 \quad (14)$$

식 (14)를 만족하는  $F$ 는 식 (12)와 같으며 식 (13)을 행렬의 Schur 상보를 이용하여 정리하면 식 (11)과 같다. 증명 끝.

### 2.3. 관측기 설계 문제

식 (1)의 시스템에 대한 관측기 동력학 식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_e = Ax_e + Bu + \phi(x_e, u) + L(y - Cx_e) \quad (15)$$

관측오차  $e(t) = x(t) - x_e(t)$ 에 대한 동력학식은

$$\dot{e} = (A - LC)e + \phi(x, u) - \phi(x_e, u) \quad (16)$$

이다. 다음 보조정리는 주어진 시스템의 가관측성 (observability)에 대하여 기술한다.

**보조정리 4.** 다음 식을 만족하는 양 한정 행렬  $Q$  가 존재하면 시스템 (1)은 관측가능이다.

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T Q + Q(A - LC) + I & Q \\ Q & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

증명: Lyapunov 함수  $V(e) = e^T Q e$ 라 하자. 이때  $\dot{V}(e)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T [(A - LC)^T Q + Q(A - LC)]e \\ &\quad + 2e^T Q [\phi(x, u) - \phi(x_e, u)] \end{aligned}$$

여기서

$2e^T Q [\phi(x, u) - \phi(x_e, u)] \leq 2\gamma \|Qe\|_2 \|e\|_2$  이며 간단한 대수관계  $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ 에 의해 정리하면

$$2e^T Q [\phi(x, u) - \phi(x_e, u)] \leq \gamma^2 e^T Q Q e + e^T e$$

이다. 따라서  $\dot{V}(e)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T [(A - LC)^T Q + Q(A - LC) \\ &\quad + \gamma^2 Q Q + I]e \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) < 0 &\Leftrightarrow (A - LC)^T Q + Q(A - LC) \\ &\quad + \gamma^2 Q Q + I < 0 \end{aligned}$$

이며, 이때 Riccati 부등식은 다음과 같다.

$$A^T Q + QA - (QLC)^T - QLC + \gamma^2 Q Q + I < 0 \quad (18)$$

식 (18)를 행렬의 Schur 상보로 표시하면 다음과 같

다.

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA - (QLC)^T - QLC + I & Q \\ Q & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

증명끝.

다음의 보조 정리는 관측기의 해를 기술한다.

**보조정리 5.** 다음의 LMI는 식 (19)와 동가이다.

$$\begin{bmatrix} A^T Q + QA & Q \\ Q & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

그리고 관측기 이득 행렬  $L$ 은

$$L = \frac{1}{2} Q C^+ \quad (21)$$

이다.

증명) 보조정리 2와 동일한 방법으로 증명된다.

### III. 제어기 설계

이 장에서는 제어기의 구조에 대하여 서술하고 선형 시스템에서 잘 알려진 제어기 분리원칙을 Lipschitz 비선형 시스템에 적용할 수 있도록 확장한다. 그리고 제어기 설계 과정에 대하여 설명한다.

#### 3.1. 제어기 구조

본 논문에서 사용하는 제어구조는 관측기를 이용한 상태 피드백 제어구조로 그림 1에 페루프구조를, 그림 2에 제어기 구조를 보였다. 그림 1에서 보이는 바와 같이 페루프 구조는 출력피드백 형태이다. 제어기 동력학식은 제어기 상태벡터를  $x_e$ 라 하면

$$\dot{x}_e = Ax_e + Bu + \phi(x_e, u) + L(y - Cx_e) \quad (22a)$$

$$u = -Fx_e \quad (22b)$$

이다. 페루프 동력학식을 구하기 위하여  $x_K = \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}$

라면 페루프 동력학식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_K &= \begin{bmatrix} A & -BF \\ LC & A-LC-BF \end{bmatrix} x_K \\
 &+ \begin{bmatrix} \Phi(x, -BFx_e) \\ \Phi(x_e, -BFx_e) \end{bmatrix} \\
 &:= A_c x_K + \hat{\Phi}(x, x_e)
 \end{aligned} \tag{23}$$

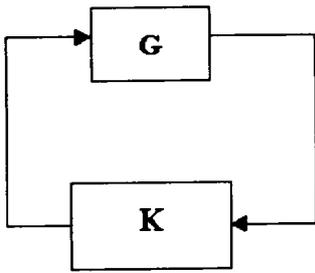


Fig. 1 Closed loop structure

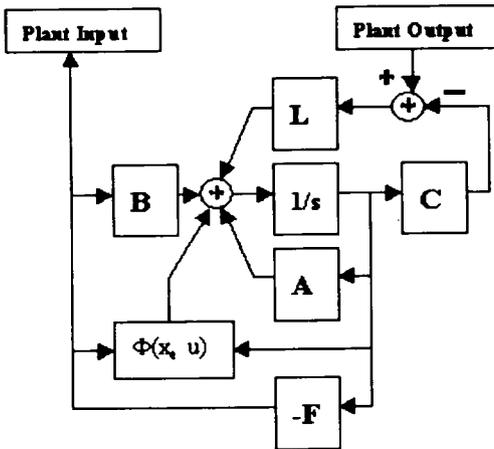


Fig. 2 Controller structure

### 3.2. 제어기 분리원칙

선형 시스템의 경우 관측기를 이용한 상태 되먹임 제어는 관측기와 상태 되먹임 제어가 분리되어 설계될 수 있다는 제어기 분리원칙(separation principle)에 의하여 설계되지만 일반적인 비선형 시스템에는 적용되지 않는다. Vidyasagar<sup>16)</sup>은 선형시스템에서의

결과와 비선형 함수의 특징을 이용하여 비선형 시스템에서도 분리원칙이 적용될 수 있는 조건을 유도하였다.

다음 보조 정리는 본 논문에서 고려하는 Lipschitz 비선형 시스템에서의 제어기 분리원칙에 대한 결과이다.

**보조정리 6.** 함수  $\Phi(x, -BFx)$ ,  $\Phi(x, x_e)$ ,  $\Phi(x_e, -BFx_e)$ 가 모두  $x$ 에 대하여 전역 Lipschitz 이면 식(1)로 주어진 시스템에 대한 제어규칙이 전역 quadratic 안정인 관측기의 상태값으로 바뀌어도 전역 quadratic 안정도는 변하지 않는다.

**증명)** 식 (1)의 시스템은 식 (11)을 만족하는 제어입력  $u = -Fx$ 에 대하여 전역 quadratic 안정이며 식 (20)를 만족하는 관측기는 전역 quadratic 안정이다. 그리고 페루프 동력학식, 즉 식 (23)에서

$$A_c = \begin{bmatrix} A & -BF \\ LC & A-LC-BF-LC \end{bmatrix}, \quad x_c = \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}$$

Lyapunov 함수를  $V(x_K) = x_K^T W x_K$ 로 선택하면

$$\dot{V}(x_K) = x_K^T (A_c^T W + W A_c) x_K + 2x_K^T \hat{\Phi}(x, x_e) \tag{24}$$

이다. 여기서  $\|\hat{\Phi}(x, x_e)\|_p \leq \hat{\gamma} \|x_K\|_p$ 이다. 그리고

$$2x_K^T W \hat{\Phi}(x, x_e) \leq 2\hat{\gamma} \|W x_K\|_p \|x_K\|_p \tag{25}$$

이다. 간단한 대수식  $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$ 을 이용하면 식 (25)는 다음과 같다.

$$2x_K^T W \hat{\Phi}(x, x_e) \leq \hat{\gamma}^2 x_K^T W W x_K + x_K^T x_K$$

따라서

$$\dot{V}(x_K) = x_K^T [A_c^T W + W A_c + \hat{\gamma}^2 W W + I] x_K$$

$$\dot{V}(x_K) < 0$$

⇔

$$A_c^T W + W A_c + \hat{\gamma}^2 W W + I < 0 \tag{26}$$

식 (26)를 행렬의 Schur 상보를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_c^T W + W A_c + I & W \\ W & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

여기서  $W = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}$  라면 식 (27)은 식 (28)과 같다. (본문하단 참조)  
이다. 그리고 식 (28)의 좌변을  $G$ 라 하면  $G$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G := R + UKV^T + VKU^T \quad (29)$$

여기서  $[U \ U_\perp], [V \ V_\perp]$ 는 모두 full column rank이며  $U_\perp^T U = 0, V_\perp^T V = 0$ 인 행렬이다. 여기서  $U_\perp, V_\perp$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$U_\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

따라서 식 (29)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \Rightarrow U_\perp^T R U_\perp < 0 \quad (31a)$$

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \Rightarrow V_\perp^T R V_\perp < 0 \quad (31b)$$

그리고 식 (29)에서  $R$ 은 다음과 같다.

$$R = \begin{bmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & A^T X_{12} + X_{12} A & X_{11} & X_{12} \\ A^T X_{12}^T + X_{12}^T A & A^T X_{22} + X_{22} A & X_{12}^T & X_{22} \\ X_{11} & X_{12} & \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ X_{12}^T & X_{22} & 0 & \frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} \quad (32)$$

식 (31a)와 식 (32)로부터

$$\begin{bmatrix} A^T X_{11} + X_{11} A & X_{11} \\ X_{11} & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

임을 알 수 있다. 관측기에 대한 선형 행렬 부등식을 구하기 위하여

$$\tilde{W} = W^{-1} = \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{bmatrix}$$

라 하면 다음 선형행렬 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_{11} & \gamma^{-1} I \\ \gamma^{-1} I & Y_{11} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (34)$$

그리고 식 (31b)과 (32)로부터

$$\begin{bmatrix} A^T X_{22} + X_{22} A & X_{22} \\ X_{22} & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

이다.

Schur 상보를 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$A^T X_{22} + X_{22} A^T + \gamma^2 X_{22} X_{22} < 0 \quad (36)$$

그리고  $Y_{11} = \frac{1}{\gamma^2} X_{22}$ 를 식 (33) 좌 우에 곱하면 다음과 같다.

$$Y_{11} A^T + A Y_{11} + \gamma^2 Y_{11} Y_{11} < 0$$

윗 식을 행렬 부등식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} A^T + A Y_{11} & Y_{11} \\ Y_{11} & -\frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

따라서 제어기는 관측기와 상태 되먹임 제어기가 분리되어 설계될 수 있다. 증명끝.

### 3.3. 제어기 설계

위에서 기술한 바와 같이 상태 되먹임 제어기와 관측기는 분리되어 설계되며 각각의 설계는 선형행렬 부등식을 푸는 문제로 귀착됨을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{bmatrix} A^T X_{11} + (LC)^T X_{12}^T + X_{11} A + X_{12} LC + I & A^T X_{12} + (LC)^T X_{22} - X_{11} BF + X_{12} (A - BF - LC) & X_{11} & X_{12} \\ -(BF)^T X_{12} + (A - BF - LC)^T X_{12} + X_{12}^T A + X_{22} LC & -(BF)^T X_{11} + (A - BF - LC)^T X_{22} - X_{12}^T BF + X_{22} (A - BF - LC) + I & X_{12}^T & X_{22} \\ X_{11} & X_{12} & \frac{1}{\gamma^2} I & 0 \\ X_{12}^T & X_{22} & 0 & \frac{1}{\gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

제어기 설계 문제는 식 (33)과 식 (37)의 선형 행렬 부등식을 각각 만족하는 상태 되먹임 제어이득  $F$ 와 관측기 이득  $L$ 을 구하는 문제이다.

다음의 정리는 이 문제점을 보완하기 위한 관측기와 상태 되먹임 제어기에 대한 해를 주며 이때  $\tilde{y}$ 와  $\gamma$ 를 제어기와 관측기가 안정이기 위한 Lipschitz함수의 한계 값이다.

정리 1. 시스템 (1)에 대하여 식 (33)과 식 (34), 식 (37)의 LMI를 만족하는  $X_{11} = X_{11}^T > 0$ ,  $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ 가 존재하면 폐루프 시스템은 quadratic 안정이다. 이때 제어 이득 행렬  $F$ 와 관측기 이득행렬  $L$ 은 각각 식 (12)와 식 (21)과 같다.

증명) 제어기 분리원칙과 상태 되먹임 제어기, 관측기 설계과정으로부터 해석적으로 증명할 수 있다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 Lipschitz 비선형 항을 포함하는 시스템에 대한 제어기 설계문제를 다루었다. 주어진 시스템에 대한 quadratic 안정 조건을 선형행렬 부등식으로 형식화하고 quadratic 안정이기 위한 Lipschitz 함수의 한계 값을 구하였다. 제어기는 관측기를 이용한 상태 되먹임 제어기 형태를 고려하였고 관측기와 상태 되먹임 제어기가 분리되어 설계될 수 있음을 보였다. 관측기와 상태 되먹임 제어기 설계문제는 선형행렬 부등식을 푸는 문제로 변환될 수 있으며 quadratic 안정이기 위한 Lipschitz 함수의 한계 값은 affine 최적화 문제의 해로부터 구할 수 있음을 보였다. 그리고 분리원칙으로 설계되는 제어기가 모델오차에 대하여 안정도를 유지되지 않는 문제점을 보완하기 위하여 세 개의 선형 행렬 부등식을 이용한 제어기를 구현하였다.

#### 참고문헌

- 1) Youla, D.C., H.A. Jabr and J.J., Bongiorno, 1976, Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers: The Multivariable Case, IEEE Trans. A.C., Vol. AC -21, pp. 319-338
- 2) Desoer, C.A., R.W. Liu, J. Murray and R. Saek, 1980, Feedback System Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis, IEEE Trans. A.C., Vol. AC-25, pp. 399-412
- 3) Desoer, C.A. and C.A. Lin, 1984, Nonlinear Unity-Feedback Systems and Q-Parameterization, Int. J. Control, Vol. 40, pp. 37-51
- 4) Verma, M.S., 1988, Coprime Fractional Representations and Stability of Nonlinear Feedback Systems, Int. J. Control, Vol.-48, pp. 897-918
- 5) Verma, M.S. and L.R. Hunt, 1993, Right Coprime Factorizations and Stabilization for Nonlinear Systems, IEEE Trans. A.C. Vol. 38, pp. 222-231.
- 6) Doyle, J.C., 1984, Lecture Notes in Advanced in Multivariable Control. ONR/Honeywell Workshop. Minneapolis, MN.
- 7) Doyle J.C., K. Glover, P. Khargoneker, and B. Francis, 1989, State Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, IEEE Trans. A.C., Vol. AC-34, pp. 831-847
- 8) Doyle J.C. and C. Chu, 1985, Matrix Interpolation and  $H_\infty$ -Performance Bounds, Proc. 1985 ACC, Boston, MA, pp. 129-134
- 9) Lu, W.M. and J.C. Doyle, 1993,  $H_\infty$ -Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization, Caltech CDS Tech. Report., No. CIT-CDS 93-020
- 10) Isidori, A., 1992, Dissipation Inequalities in Nonlinear  $H_\infty$ -Control, Proc. 31st IEEE CDC, Tucson, AZ., pp. 3265-3270.
- 11) Isidori, A. and A. Astolfi, 1992, Distance Attenuation and  $H_\infty$  Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems, IEEE Trans.

1) Youla, D.C., H.A. Jabr and J.J., Bongiorno, 1976,

- A.C., Vol. AC-37, pp. 1283-1293
- 12) Huang, Y. and C.F. Lin, 1995. A Numerical Approach to Computing Nonlinear  $H_\infty$ -Control Laws. J. of Guidance.
  - 13) Gahinet, P., A. Nemirovskii, A.J. Laub, and M. Chilali. 1994. The LMI Control Toolbox, MathWorks.
  - 14) Rajesh Rajamani and Youngman Cho, 1995, Observer Design for Nonlinear Systems: Stability and Convergence, 34th Proc. CDC, New-Orleance, LA, pp. 93-94
  - 15) Rajesh Rajamani, 1998, Observers for Nonlinear Systems, IEEE Trans. A.C., Vol. AC-43, No. 3, pp. 397-401
  - 16) Vidyasagar, M., 1980, On the Stabilization of Nonlinear Systems Using State Detection, IEEE A.C., Vol. 25, No. 3, pp. 504-590.