

風力驅動 單相 誘導發電機의 數值解析*

左 宗 根**

A Numerical Analysis of Wind Driven Single Phase Induction Generators

Chong-Keun Jwa**

ABSTRACT

Newton Raphson algorithm using difference method for a wind driven self-excited single-phase induction generator is proposed, when the capacitor is connected to the auxiliary winding and the load to the main winding. This method requires only simple numeric calculations, comparing with other reported methods which contain monotonous and complicated algebraic manipulation. As the computed results, we find that the three difference methods can be applied to Newton Raphson algorithm. Also, the initial guess values and the step size are affected in the number of iterations. Furthermore, the central difference method is better than the forward and the backward difference method in the number of iterations.

Key words : Single-phase induction generator, Newton Raphson method, Difference method

1. 序 論

화석에너지 자원의 고갈과 환경보전에 대한 관심이 높아지면서 청정대체에너지 전원에 대한 연구가 활발하게 수행되고 있으며 이들 전원의 이용이 적극적으로 이루어 지고 있다. 이 가운데 다풍지역에서는 풍력발전 시스템을 주로 이용하

고 있으며 발전기로는 유도발전기가 그의 단순성 때문에 계통연계용뿐만아니라 독립전원용으로도 많이 사용되고 있다.

독립전원용으로 사용되는 3상유도발전기의 정상상태해석은 Murthy et al⁽¹⁾, Malik and Haque⁽²⁾ 등이 사용한 루우프임피던스법과 Quazen and McPherson⁽³⁾, Ammasaigounden et al⁽⁴⁾에 의한 절점어드미턴스법이 있다. 전자의 방법에서는 주어진 부하와 속도에서 주파수와 여자리액턴스에 대한 두 개의 비선형 방정식을 풀어, 후자의 방법에서는 공극절점에 대한

* 본 연구는 1996년도 제주대학교 발전기금 학술연구비의 지원에 의해서 수행되었음.

** 제주대학교 전기공학과

Dept. of Electrical Eng., Cheju Nat'l Univ.

어드미터스의 실수부에서 주파수를 구하고 허수부에서 여자리액턴스를 계산하여 특성해석을 하고 있다.

최근에 독립전원용 단상유도발전기에 대하여 Murthy⁽⁵⁾는 기초시스템과 이론을, Murthy et al⁽⁶⁾은 실험적 조사를 발표하였다. 또한 Rahim et al⁽⁷⁾은 주권선에 부하가 보조권선에 커패시터가 접속된 단상유도발전기를 2상대칭분 변환에 의한 등가회로를 사용하여 주파수와 여자리액턴스에 대한 두 개의 비선형 방정식을 풀어 동작특성을 해석하고 있다.

이들은 3상, 단상 모두 연립다항방정식의 형식으로 정리하여 Newton Raphson법으로 근을 구하여 해석하고 있으며, 연립다항방정식을 구성하는 과정이 복잡한 대수식을 정리하여야 하고 편미분을하여 프로그램을 작성하여야 한다. 또한 등가회로정수중에 철손을 고려한다면 직렬 커패시터에 의한 특성을 고찰하려고 하면 모든 식을 재계산하여 방정식을 구성하여야 한다.

본 연구에서는 자기여자 단상유도발전기의 특성을 능률적으로 검토하기 위해서 번거로운 대수계산을 줄일뿐만아니라 편미분을 사용하지 않고 계산하기 위한 수치해석 방법을 제시하고자 한다. 이를 위하여 등가회로정수는 Rahim⁽⁷⁾의 보고결과를 사용하였고 Newton Raphson 알고리즘을 적용하여 편미분 대신에 차분법을 사용하여 해석하고 이의 타당성을 입증하였다.

II. 解析모델과 數值解析

2.1 解析모델

단상유도기는 두 개의 고정자권선중의 하나에 적당한 커패시터가 연결될때 발전기모드로 동작될 수 있으며 부하는 커패시터에 병렬이거나 다른 권선 단자에 연결된다. 본 연구에서는 주권선에 부하가 보조권선에 커패시터가 접속된 경우에 대하여 기기정수중에서 여자리액턴스만 포화의 영향을 받으며, 철손은 무시하고, 공극 자속중에서 공간고조파는 무시하여 해석한다.

불평형 2상전압 시스템은 불평형 4상 시스템의 특별한 경우로 취급될 수 있다. 불평형 2상전압 시스템은 불평형 4상 시스템에서의 영상분과 평형단상분을 고려할 필요가 없고 정상분과 역상분만 고려하려 해석할 수 있다.

2상 대칭분 변환방법에 의해 단상유도발전기에 대한 등가회로는 Fig.1과 같다.

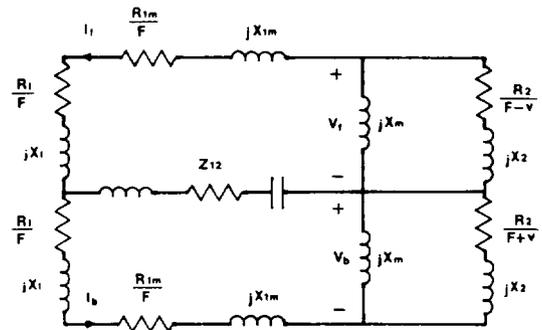


Fig.1 Equivalent circuit for single phase induction generator.

이 등가회로에서 보조권선의 영향은 주권선으로 전달되었고 독립유도 발전기는 가변주파수 운전이 많으므로 상당 리액턴스들은 단위법 동작주파수 F로 표시하였다. 또한, 단위법 회전자 속도 v도 슬립대신에 사용되었다. 등가회로에서 보인 대칭분 전압과 전류 그리고 권선의 실제 전압과 전류사이의 관계는 다음과 같다.

$$V_m = V_f + V_b \tag{1}$$

$$V_a = jkV_f - jkV_b$$

$$I_m = I_f + I_b \tag{2}$$

$$I_a = \frac{j}{k} I_f - \frac{j}{k} I_b$$

여기서 첨자 a와 m은 각각 고정자 보조권선과 주권선을, f와 b는 각각 대칭분의 정상분과 역상분을, 그리고 k는 권선비이다.

등가회로에 대한 2개의 루우프 방정식은

$$\begin{aligned} \frac{V_f}{F} &= Z_{11}I_f - Z_{12}I_b \\ \frac{V_b}{F} &= -Z_{12}I_f + Z_{22}I_b \end{aligned} \quad (3)$$

이고, 여기서 Z_{11} , Z_{12} , 그리고 Z_{22} 는 부록에 보인다.

보조권선 전압 V_a 는 0 이므로, 대칭분 전압은

$$V_f = V_b = \frac{V_m}{2} \quad (4)$$

(4)식을 (3)식에 대입하여 I_f 와 I_b 를 구하여 비를 취하면

$$\frac{I_f}{I_b} = \frac{\frac{Z_{1a}}{k^2} + Z_b}{\frac{Z_{1a}}{k^2} + Z_f} \quad (5)$$

이 되고, 부하 임피던스 $Z_L = \frac{R_f}{F} + jX_f$ 일 때

$$V_f = \frac{V_m}{2} = \frac{-Z_L(I_f + I_b)}{2} \quad (6)$$

이므로, (6)식을 (3)식의 뒷식에 대입하여 I_f 와 I_b 의 비를 구하면

$$\frac{I_f}{I_b} = \frac{Z_{12} - \frac{Z_L}{2F}}{Z_{11} + \frac{Z_L}{2F}} \quad (7)$$

이 된다. (5)식과 (7)식에서

$$\frac{Z_{1a} + k^2Z_b}{Z_{1a} + k^2Z_f} - \frac{Z_{12} - \frac{Z_L}{2F}}{Z_{11} + \frac{Z_L}{2F}} = 0 \quad (8)$$

이 얻어진다. (8)식에서 실수부와 허수부가 0 이되는 두 개의 비선형 방정식은

$$\begin{aligned} f(F, X_m) &= (C_1 + C_2X_m + C_3X_m^2)F^5 \\ &+ (C_4 + C_5X_m + C_6X_m^2)F^3 \\ &+ (C_7 + C_8X_m + C_9X_m^2)F = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} g(F, X_m) &= (D_1 + D_2X_m + D_3X_m^2)F^4 \\ &+ (D_4 + D_5X_m + D_6X_m^2)F^2 \\ &+ (D_7 + D_8X_m + D_9X_m^2) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

이고, 계수 $C_i (i=1, 2, \dots, 9)$ 와

$D_i (i=1, 2, \dots, 9)$ 은 참고문헌(7)에 주어져 있다.

한편 본 연구에 의한 (8)식의 실수부와 허수부는

$$\begin{aligned} f(F, X_m) \\ = A'C - BD' - EG + FH = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g(F, X_m) \\ = A'D + BC - EH - FG' = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

이며, $A', B', C', D', E', F', G'$, 그리고 H' 는 부록에 보인다.

2.2 數値解析

2변수의 비선형 연립방정식 (11), (12)식을 Newton Raphson법으로 풀기 위하여 n 회재근의 추측치를 F^n , X_m^n 으로 하고, Taylor 급수로 전개하여 2차 이상의 항을 무시하면,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^n}{\partial F^n} & \frac{\partial f^n}{\partial X_m^n} \\ \frac{\partial g^n}{\partial F^n} & \frac{\partial g^n}{\partial X_m^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta F^n \\ \delta X_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f^n \\ -g^n \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 되고, 여기서 $f(F^n, X_m^n)$, $g(F^n, X_m^n)$ 을 각각 f^n , g^n 로 표기하였다.

(13)식에서 δF^n 과 δX_m^n 을 구하면,

$$\delta F^n = \frac{-f^n \frac{\partial g^n}{\partial X_m^n} + g^n \frac{\partial f^n}{\partial X_m^n}}{\frac{\partial f^n}{\partial F^n} \frac{\partial g^n}{\partial X_m^n} - \frac{\partial f^n}{\partial X_m^n} \frac{\partial g^n}{\partial F^n}} \quad (14)$$

$$\delta X_m^n = \frac{-g^n \frac{\partial f^n}{\partial F^n} + f^n \frac{\partial g^n}{\partial F^n}}{\frac{\partial f^n}{\partial F^n} \frac{\partial g^n}{\partial X_m^n} - \frac{\partial f^n}{\partial X_m^n} \frac{\partial g^n}{\partial F^n}} \quad (15)$$

이 된다. $n+1$ 회계의 반복에 의해 얻어진 근사치 F^{n+1} , X_m^{n+1} 은 다음식으로 구해진다.

$$F^{n+1} = F^n + \delta F^n \quad (16)$$

$$X_m^{n+1} = X_m^n + \delta X_m^n \quad (17)$$

본 연구에서는 (14), (15)식에 포함된 편미분 계수를 수치미분에 의해서 구한다. 수치미분은 다음과 같이 전진차분(forward difference), 후퇴차분(backward difference), 그리고 중앙차분(central difference)의 세가지 방법에 의하여 구하고 그결과를 비교하고자 한다.

전진차분법

$$f_F' = \frac{\partial f}{\partial F} = \frac{f(F+h, X_m) - f(F, X_m)}{h}$$

$$f_{X_m}' = \frac{\partial f}{\partial X_m} = \frac{f(F, X_m+h) - f(F, X_m)}{h} \quad (18)$$

후퇴차분법

$$f_F' = \frac{\partial f}{\partial F} = \frac{g(F, X_m) - g(F-h, X_m)}{h}$$

$$g_{X_m}' = \frac{\partial g}{\partial X_m} = \frac{g(F, X_m) - g(F, X_m-h)}{h}$$

중앙차분법

$$f_F' = \frac{f(F+h, X_m) - f(F-h, X_m)}{2h}$$

$$g_{X_m}' = \frac{g(F, X_m+h) - g(F, X_m-h)}{2h} \quad (20)$$

이상의 방법중에서 이산화 오차는 전진차분과 후퇴차분법에서 h 에 비례하고 중앙차분법에서 h^2 에 비례하므로 h 의 선정이 중요하고 이의 최적치 선정방법은 참고문헌(8)에 기술되어 있다.

III. 事例研究 및 檢討

각종 차분법을 사용한 Newton Raphson 알고리즘에 의한 해석법을 검토하고 step size와 초기치선정을 고찰하기 위하여 다음식의 예제를 사용하였다.

$$f(F, X_m) = 2F^2 - 3FX_m + X_m^2$$

$$g(F, X_m) = 5F^2 - X_m^2 - 16$$

이 연립방정식의 근은 다음과 같다.

$$F = \pm 2 \quad F = \pm 4$$

$$X_m = \pm 2 \quad X_m = \pm 8 \quad (\text{복호동순})$$

위의 식을 전진차분, 중앙차분, 그리고 후퇴차분법을 사용한 Newton Raphson법의 타당성을 검토하기 위하여 step size와 초기치 변화에 대한 결과를 Table 1과 2에 보였다.

이들 결과에서 보듯이 전진차분법이나 후퇴차분법에서는 step size가 클 때 반복계산 회수가 많으며 전진차분법에서는 추측한 근에 접근한 초기치를 주더라도 다른근이 얻어짐을 알 수 있다. 또한, step size는 0.001 전후가 적절하고 초기치는 추측한 근에 접근할수록 반복계산 회수가 적어지고 중앙차분법이 step size에 거의 무관하게 반복계산 회수가 같음을 알 수 있다.

Table 1 Computed Results for Example Problem: initial guess values : $F=1$, $X_m=1$, acceptable error interval in F and X_m : 10^{-6}

Step size	Newton Raphson method by								
	Backward difference			Central difference			Forward difference		
	No. of iterations	F	X_m	No. of iterations	F	X_m	No. of iterations	F	X_m
1.0	22	2.0	2.0	4	2.0	2.0	53	4.0	8.0
0.5	14	2.0	1.9	4	2.0	2.0	17	-2.0	-2.0
0.1	7	2.0	2.0	4	2.0	2.0	7	2.0	2.0
0.05	6	2.0	2.0	4	2.0	2.0	6	2.0	2.0
0.01	5	2.0	2.0	4	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.005	5	2.0	2.0	4	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.001	5	2.0	2.0	4	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.0005	5	2.0	2.0	4	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.0001	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.00005	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0
0.00001	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0	5	2.0	2.0

Table 2 Computed Results for Example Problem: initial guess values : $F=1.8$, $X_m=1.8$, acceptable error interval in F and X_m : 10^{-6}

Step size	Newton Raphson method by								
	Backward difference			Central difference			Forward difference		
	No. of iterations	F	X_m	No. of iterations	F	X_m	No. of iterations	F	X_m
1.0	18	2.0	2.0	3	2.0	2.0	49	4.0	8.0
0.1	6	2.0	2.0	3	2.0	2.0	6	2.0	2.0
0.01	4	2.0	2.0	3	2.0	2.0	4	2.0	2.0
0.001	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0
0.0001	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0
0.00001	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0	3	2.0	2.0

Table 3 Computed Results Using Rahim's Data: initial guess value : $F=1$, $X_m=80$, acceptable error interval : 10^{-6} , step size : 0.001, parameters : $v=1$, $R_1=97.05$, $X_1=0$, $X_c=75.78$, $k=1.83$

Number of iterations	Newton Raphson method by					
	Backward difference		Central difference		Forward difference	
	F	X_m	F	X_m	F	X_m
1	0.996506	31.372089	0.996510	31.229191	0.996514	31.087719
2	0.976570	34.322628	0.976354	34.231369	0.976124	34.154583
3	0.980886	35.520657	0.980910	35.541431	0.980930	35.562679
4	0.980596	35.666866	0.980597	35.664501	0.980599	35.662041
5	0.980599	35.665066	0.980599	35.665085	0.980599	35.665089

Table 4 Computed Results Using Rahim's Data: initial guess value : $F=0.98$, $X_m=80$, acceptable error interval : 10^{-6} , step size : 0.001, parameters : $v=1$, $R_1=97.05$, $X_1=0$, $X_c=75.78$, $k=1.83$

Number of iterations	Newton Raphson method by					
	Backward difference		Central difference		Forward difference	
	F	Xm	F	Xm	F	Xm
1	0.974490	32.223080	0.974579	32.038448	0.974667	31.864697
2	0.981562	35.378269	0.981569	35.421272	0.981566	35.472988
3	0.980584	35.666122	0.980589	35.658401	0.980594	35.650604
4	0.980599	35.664970	0.980599	35.665089	0.980599	35.665123
5	0.980599	35.665089				

Table 5 Computed Results Using Rahim's Data: acceptable error interval : 10^{-6} , parameters : $v=1$, $R_1=97.05$, $X_1=0$, $X_c=75.78$, $k=1.83$

Step size	Newton Raphson method by central difference					
	Initial guess values $F=0.98$, $X_m=80$			Initial guess values $F=1$, $X_m=80$		
	No. of iterations	F	Xm	No. of iterations	F	Xm
0.01	5	0.980599	35.665081	6	0.980599	35.665085
0.001	4	0.980599	35.665089	5	0.980599	35.665085
0.0001	4	0.980599	35.665173	5	0.980599	35.665085

본 연구에 적용한 단상유도기⁽⁷⁾는 정격전압 220V, 출력 1.5KW, 주파수 60Hz, 4극기이고, 주권선축으로 환산한 기기정수(단위:Ω)들은 $R_{1m}=1.47$, $R_2=2.57$, $X_{1m}=X_2=4.15$, $R_{1a}=7.85$, $R_2=5.81$, $X_{1a}=X_2=13.97$ 이다. 이 기기의 보조권선 단자에 $35\mu F$ 의 커패시터가 접속되고, 부하저항 $R_1=97.05\Omega$ 이 주권선 단자에 연결되어 1800RPM의 속도로 회전할 때 (11), (12)식에서 단위법으로 표시한 주파수와 여자리액턴스를 차분법을 사용한 Newton Raphson법에 의하여 구한다.

Table 3은 step size를 0.001로 하고 허용 오차를 10^{-6} , 그리고 초기치를 $F_0=1pu$, $X_{m0}=80.0\Omega$ 으로 하였을 때 각 차분법에 의한 계산결과이다.

Table 4는 step size를 0.001로 하고 허용

오차를 10^{-6} , 그리고 초기치를 $F_0=0.98pu$, $X_{m0}=80.0\Omega$ 으로 할 때의 계산결과이다.

Table 5는 중앙차분법을 사용하였을 때 허용 오차 10^{-6} 으로 하고 초기치와 step size를 변화시켰을때의 계산결과를 보인다.

위의 결과에서 보는 바와 같이 모든 차분법이 Newton Raphson법에 적용될 수 있음을 알 수 있고 step size의 선택과 초기치의 선택이 반복계산회수에 직접적인 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 초기치로는 단위법주파수 F를 단위법속도 v를 기준하여 결정하였고 여자리액턴스는 미포화여자리액턴스치를 사용하여 계산하고 step size 변화에 따르는 계산결과도 검토하였다. 그 결과 step size는 0.001 전후가 적당하고 초기치로는 결과치와 근사할수록 반복계산회수가 적으며 중앙차분법이 전진차

분법이나 후퇴차분법보다 반복수렴회수면에서 우수함을 알 수 있다.

IV. 結 論

풍력구동 자기여자 단상유도 발전기의 정상상태 해석을 위하여 각종 차분법을 사용한 Newton Raphson법의 알고리즘으로 단자커패시터가 보조권선에 부하저항이 주권선에 접속된 경우, 정격속도로 회전할 때 주파수와 여자리액턴스를 다항방정식으로 정리하지 않고 특성방정식자체의 실수부와 허수부에 대한 방정식으로 해석하였다.

이 결과 모든 차분법이 Newton Raphson법에 적용될 수 있음을 알 수 있었고 초기치의 선택과 step size 선택이 반복 수렴회수에 영향을 미치고 있음을 확인하였다.

검토결과 step size는 0.001 전후가 적당하고 초기치로는 결과치와 근사한 값일수록 반복 계산 회수가 적으며 중앙차분법이 전진차분법이나 후퇴차분법보다 반복수렴회수면에서 우수함을 알 수 있었다.

參考文獻

- 1) Murthy, S. S., Malik, O. P. and Tandon, A. K., 1982, Analysis of self-excited induction generators, *IEE PROC.*, Vol. 129, pt C, No.6, pp.260-265
- 2) Malik, N. H. and Haque, S. E., 1986, Steady state analysis and performance of an isolated self-excited induction generator, *IEEE Trans. E. C.*, Vol. EC-1, No.3, pp.134-140
- 3) Quazene, L. and McPherson, G., 1983, Analysis of the isolated induction generator, *IEEE Trans. P.A.S.*, Vol. PAS-102, No. 8, pp.

- 2793-2798
- 4) Ammasaigouden, N., Subbiah, M. and Krishnamurthy, M. R., 1986, Wind-driven self-excited pole- changing induction generators, *IEE PROC.*, Vol. 133, pt B, No.5, pp. 315-321
- 5) Murthy, S. S., 1993, A novel self-excited self-regulated single phase induction generator, Part-I : Basic system and theory, *IEEE Trans. E. C.*, Vol. 8, No. 3, pp. 377-382
- 6) Murthy, S. S., Rai, H. C. and Tandon, A. K., 1993, A novel self-excited self-regulated single phase induction generator, Part-II : Experimental investigation, *IEEE Trans. E. C.*, Vol. 8, No.3, pp. 383-388
- 7) Rahim, Y. H. A., Alolah, A. I. and Al-Mudaiheem, R. I., 1993, Performance of single phase induction generators, *IEEE Trans. E. C.*, Vol. 8, No. 3, pp. 389-395
- 8) Conte, S. D. and Carl de Boor, 1980, Elementary numerical analysis - An algorithmic approach, 3rd ed., McGraw-Hill

附 錄

기 호	첨 자
V : 전압 (V)	$1a$: 보조권선 성분
I : 전류 (A)	$1m$: 주권선 성분
X : 리액턴스 (Ω)	c : 커패시턴스 성분
R : 저항 (Ω)	m : 여자 성분
Z : 임피던스 (Ω)	2 : 부하측으로 환산한 회전자 성분
F : 단위법 주파수 (pu)	f : 정상분
v : 단위법 회전수 (pu)	b : 역상분
k : 권선비	l : 부하성분

식 (3)의 계수.

$$Z_{11} = \frac{Z_{1m}}{2} + \frac{Z_{1a}}{2k^2} + Z_f$$

$$Z_{22} = \frac{Z_{1m}}{2} + \frac{Z_{1a}}{2k^2} + Z_b$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_{1a}}{k^2} - Z_{1m} \right)$$

$$Z_{1m} = \frac{R_{1m}}{F} + jX_{1m}$$

$$Z_{1a} = \frac{R_{1a}}{F} + jX_{1a} - \frac{jX_c}{F^2}$$

$$Z_f = \frac{jX_m \left(\frac{R_2}{F-v} + jX_2 \right)}{\frac{R_2}{F-v} + j(X_m + X_2)}$$

$$Z_b = \frac{jX_m \left(\frac{R_2}{F+v} + jX_2 \right)}{\frac{R_2}{F+v} + j(X_m + X_2)}$$

식 (11), (12)의 계수.

$$A' = \frac{R_{1a}}{F} + \frac{k^2 R_2 X_m^2 (F+v)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F+v)^2}$$

$$B' = \frac{F^2 X_{1a} - X_c}{F^2}$$

$$+ \frac{k^2 X_m (R_2^2 + X_2 (X_m + X_2) (F+v)^2)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F+v)^2}$$

$$C' = \frac{F(k^2 R_{1m} + R_{1a}) + k^2 R}{k^2 F^2}$$

$$+ \frac{2R_2 X_m^2 (F-v)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F-v)^2}$$

$$D' = \frac{F^2 (X_{1a} - k^2 X_{1m}) - k^2 F X - X_c}{k^2 F^2}$$

$$+ \frac{2X_m (R_2^2 + X_2 (X_m + X_2) (F-v)^2)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F-v)^2}$$

$$E' = \frac{R_{1a}}{F} + \frac{k^2 R_2 X_m^2 (F-v)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F-v)^2}$$

$$F' = \frac{F^2 X_{1a} - X_c}{F^2}$$

$$+ \frac{k^2 X_m (R_2^2 + X_2 (X_m + X_2) (F-v)^2)}{R_2^2 + (X_m + X_2)^2 (F-v)^2}$$

$$G' = \frac{F(R_{1a} - k^2 R_{1m}) - k^2 R}{k^2 F^2}$$

$$H' = \frac{F^2 (X_{1a} - k^2 X_{1m}) - k^2 F X - X_c}{k^2 F^2}$$