濟州大學校 産業技術硏究所 論文集, 第7卷, 1號, pp.107~114, 1996. 6
Cheju National Univ. R.I.I.T. Jour., Vol.7, No.1, pp.107~114, 1996. 6

# 닫힌형태의 그래미언을 사용한 불안정한 SISO 시스템의 모델축소

김 호 찬*

# Model Reductions of Unstable SISO Systems Using Closed-Form Gramians

Ho-Chan Kim*

## ABSTRACT

This paper develops a simple approach to balanced model reductions for unstable linear continuous-time SISO systems. First, the controllability, observability, and cross Gramians are directly obtained from the coefficients of the transfer function using the Routh array in a closed-form. Based on these Gramians, a simple algorithm is proposed to compute a reduced order model based on balancing and truncation technique for unstable SISO systems. This algorithm is simpler and numerically more efficient in computing the Gramians than presently existing algorithms. If the unstable system can be balanced, then the proposed algorithm gives a reduced order model which has the same number of unstable poles as the original model.

**Key words** : Lyapunov matrix equation, Closed-form Gramian, Routh array, Model reduction

## I. 서 론

상태공간(state-space)에서 안정한(stable) 선형 시스템을 대상으로 MBR(minimal balanced realization) 방법이 Moore [1]에 의해 제안된 이후에, 이와 관련된 연구는 모델 축소(model reduction) 문제와 관련하여 많이 진행되어 왔다[1,2].

MBR 방법을 사용하면 가제어성(controllability) 그래미언(Gramian)과 가관측성(observability) 그래미언이 똑같은 대각(diagonal) 행렬이 되도록 상태공간 모델(model)을 구성할 수 있는데, 그래미언들의 대각 성분 값들은 양수들로써 플랜트 입출력 동작에 해당 상태들이 미치는 영향력의 크기들을 나타낸다. 따라서 대각 성분 값들 중에서 입출력에 영향을 적게 미치는 작은 상태(state)들을 소거하면 MBR을 사용한 축소차수 모델(reduced-order

* 제주대학교 전기공학과
Dept. of Electrical Eng., Cheju Nat'l Univ.

model)을 얻을 수 있다. 이때 사용되는 그래미언들은 두 개의 Lyapunov 행렬 방정식(matrix equation)의 해이며 기본적으로는 MIMO(multi-input multi-output) 시스템을 대상으로 주어진다. 따라서 자동제어 분야에서 MBR 방법에 관한 연구는 대부분 안정한 선형 MIMO 시스템에만 한정하여 적용할 수 있다. 근래에 Kenny와 Hewer [3]는 이를 확장하여 불안정하고 최소의(minimal) 선형 MIMO 시스템에서 MBR 방법을 적용할 수 있는 필요충분조건을 나타내었고 Therapos [4]는 불안정하고 비최소의(nonminimal) 선형 MIMO 시스템에 적용할 수 있는 알고리즘을 제안하였으나 이들 방법들은 많은 계산량을 필요로 한다.

한편 이산시간(discrete-time)에서는 선형 SISO (single-input single-output) 시스템을 대상으로 가제어성 그래미언과 가관측성 그래미언을 동시에 대각행렬로 만드는 간단한 방법이 발표되었다[5]. 이때 그래미언들은 두 개의 이산시간 Lyapunov 행렬 방정식을 풀므로써 구하는 대신에 주어진 전달함수(transfer function)의 계수들로부터 직접적으로 얻을 수 있다. 이 방법을 사용하면 계산량을 상당히 줄일 수 있으나 단지 이산시간에서 안정한 최소의(minimal) SISO 시스템에만 적용할 수 있다.

본 논문에서는 연속시간(continuous-time)에서 불안정하고 비최소의 선형 SISO 시스템에 적용할 수 있는 방법을 제안하고 이를 이용한 모델 축소 방법을 제안한다. 불안정한 선형 시스템에서 얻어진 그래미언의 대각성분들은 양수와 영 이외에도 음수 값을 갖는다. 제안된 방법은 얻어진 그래미언의 대각성분을 양수, 영, 그리고 음수들로 구분지어 나타내도록 하고 영과 작은 양수 값들에 해당하는 상태들을 소거하여 축소차수 모델을 얻도록 한다. 여기서 얻어진 축소차수 모델의 불안정한 극점(pole)의 수는 원래 주어진 시스템의 불안정한 극점의 수와 정확히 일치하게 된다. 본 논문의 특징으로는 크게 두가지로 나눌 수 있는데, 첫째, 연속시간에서 Lyapunov 행렬 방정식의 해인 그래미언을 닫힌형태의 유도한다. 가제어성과 가관측성 그래미언을 Routh 배열(array)을 사용하여 주어진 전달함수의 계수들로부터 유도할 수 있으므로 Lyapunov 행렬 방정식을 풀 필요가 없다. 둘째, 제안한 방법은 안정한 SISO 시스템 뿐 아니라 불안정한 SISO 시스템에도 적용할 수 있는데, 유도과정은 Therapos 방법 [4]과 유사하다. 불안정한 시스템에서 MBR 방법을 사용한 모델 축소는 교차(cross) 그래미언이 실대각(real diagonal) 행렬과 유사(similar)한 경우에만 수행할 수 있다. 따라서 전달함수 행렬 형태로 주어진 SISO 시스템에서 제안한 방법을 쉽게 사용할 수 있다.

## II. 닫힌형태의 그래미언

본 장에서는 연속시간에서 Routh 배열(array)과 Markov 매개변수들(parameters)을 사용하여 Lyapunov 행렬 방정식에서 닫힌형태의 해를 유도한다.

연속시간에서 $n$차의 선형 SISO 시스템을 다음과 같이 나타내자.

$$G(s)=\frac{q_n(s)}{p_n(s)} = \frac{b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s^1+a_n} \quad (1)$$

이를 다음과 같은 제어가능표준형(controllable canonical form)의 상태 방정식(state equation) 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+bu, \\ y &= cx, \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 행렬 $A\in R^{n\times n}$, $b\in R^{n\times l}$, $c\in R^{l\times n}$은 각각

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_n\, b_{n-1} \cdots b_1)$$

이다. Routh 배열 $R=(r_{i,j})$에서 원소 $r_{i,j}$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{lllll} r_{0,1}=1 & r_{0,2}=a_2 & r_{0,3}=a_4 & r_{0,4}=a_6 & \cdots \\ r_{1,1}=a_1 & r_{1,2}=a_3 & r_{1,3}=a_5 & r_{1,4}=a_7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ r_{i,1} & r_{i,2} & \cdots & & \end{array} \tag{3}$$

$$r_{i,j} = r_{i-2,j+1}-\frac{r_{i-2,1}}{r_{i-1,1}}r_{i-1,j+1}, \quad i = 2,\cdots,n,\ \ j=1,\cdots,\ \mathrm{int}\left(\frac{n+2-i}{2}\right) \tag{4}$$

여기서 $a_i$는 연속시간 플랜트 분모항의 계수를 나타내고, $\mathrm{int}(x)$는 $x$보다 작거나 같은 최대 정수를 나타낸다. 이때 $r_{i,1}$의 부호를 사용하여 플랜트의 극점의 위치에 관한 정보를 얻을 수 있다. 플랜트의 극점이 모두 $Re[s]<0$에 위치할 필요충분조건은 $r_{i,1}>0\ \forall i$이다[6]. 그리고 Routh 배열의 1열의 계수(leading coefficients)들이 모두 영이 아니면, 즉 $r_{i,1}\neq 0\ \forall i$일 때, Routh 배열을 사용하여 비특이(nonsingular) 행렬 $P=(p_{i,j})$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} p_{i,n+3-2j-i}=r_{i,j} & i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,\ \mathrm{int}\left(\frac{n+2-i}{2}\right), \\ p_{i,j} = 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

행렬 $P$에서 $i+j>n+1$또는 $n-i-j$가 짝수일 때 $P_{i,j}=0$이다. 따라서 행렬 $Q=(q_{i,j})$를 행렬 $P$의 역행렬이라 두면, 역치환(back-substitution) 방법에 의해 $Q$의 원소 $q_{i,j}$는 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &q_{i,n+2k+1-i} \\ &\quad = -\sum_{j=1}^{k}\frac{p_{n+1-i,i-2j}}{p_{n+1-i,i}}q_{i-2j,n+2k+1-i}, \\ &k = 1,\cdots,\ \mathrm{int}\left(\frac{n-1}{2}\right), \\ &i = 2k+1,\cdots,n \end{aligned} \tag{6}$$

여기서

$$q_{i,j}=\begin{cases} 1/p_{j,i} & i+j=n+1 \\ 0 & i+j<n+1 \text{ 또는 } i+j-n:\text{짝수} \end{cases} \tag{7}$$

이다.

본 장에서의 목적은 연속시간에서 선형 SISO 시스템을 대상으로 Lyapunov 행렬 방정식의 해를 닫힌형태로 유도하는 것이다. 선형 시스템이 불안정한 경우에도, 가제어성(가관측성) 그래미언 $W_c(W_o)$와 교차 그래미언 $W_{co}$는 다음 Lyapunov 행렬 방정식의 해로 정의할 수 있다[7].

$$\begin{aligned} AW_c+W_cA^T+bb^T &= 0, \\ A^TW_o+W_oA+c^Tc &= 0, \\ AW_{co}+W_{co}A+bc &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서

$$\begin{aligned} p_n(s) &= \det|sI-A|, \\ q_n(s) &= c\,\mathrm{adj}(sI-A)b \end{aligned}$$

이다.

다음 정리에서 연속시간에서 Lyapunov 행렬 방정식의 해를 닫힌형태로 직접적으로 유도할 수 있다. 제안된 알고리즘은 Routh 배열의 1열의 계수들이 모두 0이 아니면 불안정한 비최소 SISO 시스템에도 적용할 수 있는데, 주어진 가정은 그래미언이 존재하기 위한 조건이다.

다음 정리의 증명을 간단하게 하기 위해 다음의 보조정리를 살펴보자.

**보조정리 2.1**[8] 다음의 관계를 만족하는 행렬 $M=(m_{i,j})$은

$$A^TM=MA,\quad c^T=Mb \tag{9}$$

유일하고 다항식 $p_n(s)$ 과 $q_n(s)$으로 이루어진 Bezoutian 행렬이 된다. 이때 $M$의 $(i,j)$번째항 $m_{i,j}$는 다항식 $(p_n(x)q_n(y)-q_n(x)p_n(y))/(x-y)$에서 $x^{i-1}y^{j-1}$항의 계수로써 다음과 같이 쉽게 나타낼

수 있다.

$$m_{i,j} = \sum_{k \ge 1} (a_{n-i+1-k} b_{n-j+k} - b_{n-i+1-k} a_{n-j+k}) \tag{10}$$

다음 정리에서는 연속시간 Lyapunov 행렬 방정식의 닫힌형태의 해를 유도한다.

**정리 2.1** : Routh 배열의 1열의 계수들이 모두 0이 아니면, 상태공간 모델($A$, $b$, $c$)이 주어졌을 때 다음의 Lyapunov 행렬 방정식을 만족시키는 가제어성(가관측성) 그래미언 $W_c(W_o)$과 교차 그래미언 $W_{co}$은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ W_c &= (P^T DP)^{-1}, \\ \text{(ii)}\ W_o &= M(P^T DP)^{-1} M, \\ \text{(iii)}\ W_{co} &= (P^T DP)^{-1} M. \end{aligned} \tag{11}$$

여기서

$D = \frac{1}{2} \operatorname{diag}\{\frac{r_{1,1}}{r_{0,1}}, \frac{r_{2,1}}{r_{1,1}}, \cdots, \frac{r_{n,1}}{r_{n-1,1}}\}$이다.

**증명(Outline)** : 제어가능표준형에서 $n \times n$ 가제어성 행렬을 $\Omega_c = (b\ Ab \cdots A^{n-1}b)$라고 두고 $n \times n$ 가관측성 행렬 $\Omega_0 = (c^T (cA)^T \cdots (cA^{n-1})^T)^T$을 라고 정의하면, (9, 정리 2)에서 $U = \Omega_c^{-1}$[8]로부터 $\Omega_c U = I_n$의 관계를 얻을 수 있다. 그리고 보조정리 2.1의 의해서 다음 관계식이

$$\begin{aligned} \Omega_o^T &= (c^T\ (cA)^T \cdots (cA^{n-1})^T) \\ &= (Mb\ \ A^T Mb \cdots A^{(n-1)T} Mb) \\ &= M(b\ Ab \cdots A^{n-1} b) \\ &= M\Omega_c. \end{aligned} \tag{12}$$

성립한다. 따라서 $\Omega_o^T U = M$ 이 성립하고, 이 결과를 (9, 정리 2)에 적용하면 쉽게 위의 결과가 얻어진다.

**주 2.1** : (5)에서 행렬 $P$와 (10)에서 Bezoutian 행렬 $M$의 계산에서는 각각 약 $n^2/3$와 $n^3/3$플롭스(flops)를 필요로 하게된다. (5)에서 $i+j > n+1$와 $n-i-j$ : 짝수에서는 $p_{i,j}=0$이므로 (6)에서 $Q=P^{-1}$와 (11)에서 $(P^T DP)^{-1}$는 역행렬을 직접 계산할 필요가 없고 계산에는 각각 약 $n^3/12$와 $n^3/144$ 플롭스를 필요로 하게된다. 따라서 제안된 방법을 사용하면 $W_c$의 계산에는 $n^3/12$ 플롭스가 $W_o$의 계산에는 $11n^3/12$ 프롭스가 필요한 반면, MIMO 시스템에서 사용된 기존의 방법 [10]을 사용하면 모두 $17n^3$플롭스가 필요하게 된다.

## III. 축소차수 모델

본 장에서는 불안정한 선형 SISO 시스템을 대상으로 축소차수 모델을 구할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 Therapos 방법 [4]과 두가지 면에서 다르다. 첫째, Lyapunov 행렬 방정식으로부터 그래미언을 구하지 않고 전달함수의 계수들로부터 직접 구한다. 둘째, 가제어성 그래미언과 가관측성 그래미언을 계산하는 대신에 교차 그래미언만을 이용하여 구한다. 안정한 플랜트인 경우에는 항상 평형된 상태공간 모델이 존재하지만 불안정한 플랜트인 경우에는 교차 그래미언 $W_{co}$가 실대각(real diagonal) 행렬과 유사(similar)한 경우에만 MBR 방법을 사용한 모델 축소 알고리즘을 적용할 수 있다 [3]. 다음 정리는 연속시간에서 평형된(balanced) 상태공간 모델을 얻을 수 있는 조건을 나타낸다.

**정리 3.1** : $r_{i,1} \neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)인 조건하에서, 상태공간 모델($A$, $b$, $c$)와 행렬 $P$와 $M$이 주어졌을 때, 다음의 세 가지 조건은 서로 같은 것으로써 하나는 나머지 두 개를 의미한다.

1) 상태공간 모델 ($A$, $b$, $c$)을 평형하게 변환시킬 수 있는 변환행렬 $T \in R^{n \times n}$가 존재한다.
2) 교차 그래미언 $W_{co}$가 실대각 행렬과 유사하다.
3) 행렬 $P^T DP$와 $M$이 변환행렬 $T$에 의해 동

시에 대각화될 수 있다.

**증명** : $r_{i,1} \neq 0$ $i=1,\cdots,n$인 조건하에서, 가제어성 그래미언 $W_c$는 정칙(nonsingular)이다. 우선 1)이 성립한다고 가정하면, 정칙 변환행렬 $T$에 의해 $T^{-1}W_cT^{-T} = T^{-1}(P^TDP)^{-1}T^{-T}$와 $T^TW_oT = T^TM(P^TDP)^{-1}MT$은 대각이고 실수이다 [3]. 교차 그래미언 $W_{co}$는 $W_{co}^2 = W_cW_o$을 만족하므로, $T^{-1}W_{co}T$은 역시 대각이다. 따라서 $W_{co}$는 실대각 행렬에 유사하므로, 1)은 2)를 의미한다.

2)가 성립한다고 가정하면 $W_{co} = (P^TDP)^{-1}M$이 실대각행렬에 유사하므로, 행렬 $P^TDP$와 $M$은 정칙행렬에 의해 동시에 대각화될 수 있다 [3]. 따라서 2)는 3)을 의미한다.

마지막으로 3)이 성립한다고 가정하면, $T^T(P^TDP)T = D_P$와 $T^TMT = D_m$이 모두 대각이 되도록하는 정칙행렬 $T$가 존재한다. 그리고 행렬 $P^TDP$가 정칙이므로 $T^{-1}(P^TDP)^{-1}T^{-T} = D_P^{-1}$와 $T^TM(P^TDP)^{-1}MT = D_mD_P^{-1}D_m$ 역시 대각이 된다. 여기서 $\hat{T}= T|D_m|^{-1/2}$, $|D_m|^{1/2} = \mathrm{diag}\{|d_m(1,1)|^{1/2},\cdots,|d_m(n,n)|^{1/2}\}$ 라 두면 $\hat{T}^{-1}W_c\hat{T}^{-T} = \hat{T}^TW_o\hat{T} = |D_m|^{1/2}D_p^{-1}|D_m|^{1/2}$ 이 성립하므로, 3)은 1)을 의미한다.

본 논문에서는 Routh 배열의 첫 번째 열의 계수 $r_{i,1}(i=1,2,\cdots,n)$이 0이 아니고 불안정한 비최소의 SISO 시스템이 평형될 수 있다고 가정한다. 이때 교차 그래미언이 실대각 행렬에 유사하다. (2)에서 주어진 시스템 $(A, b, c)$이 $\alpha$개의 불안정한 극점을 갖고 불안정한 극점과 영점 간의 소거가 없는 경우에, 시스템은 Therapos [4]에 의해 제안된 방법에 의해 평형된다. 주어진 시스템 $(A, b, c)$의 비최소 $k$상태를 소거하고 평형되게하여 얻은 최소의 평형된 상태공간 모델 $(\hat{A}, \hat{b}, \hat{c})$, $\hat{A} \in R^{m\times m}$ $(m := n-k)$ 이 주어진 경우에 모델은 다음의 Lyapunov 행렬 방정식을 만족한다.

$$\hat{A}\Sigma + \Sigma\hat{A}^T + \hat{b}\hat{b}^T = 0, \tag{13}$$
$$\hat{A}^T\Sigma + \Sigma\hat{A} + \hat{c}^T\hat{c} = 0$$

여기서 $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m$ 이고 $\pi(\Sigma) = \alpha$ 이다. 최소의 모델 $(\hat{A}, \hat{b}, \hat{c})$로부터 $m-r-\alpha > 0$ 상태를 소거하여 축소차수 모델을 구하자. 이때 행렬 $\Sigma$를 다음과 같이 나누어 나타내면

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

여기서 $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1,\cdots \sigma_1\}$, $\Sigma_2 = \mathrm{diag}\{\sigma_{r+1},\cdots \sigma_{m-\alpha}\}$, 이고 $\Sigma_3 = \mathrm{diag}\{-\sigma_{m-\alpha+1},\cdots -\sigma_m\}$이다. 마찬가지로 행렬 $\hat{A}, \hat{b}, \hat{c}$ 를 다음과 같이 부분적으로 분해(partition)하면

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \ \hat{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{15}$$
$$\hat{c} = (c_1 \ \ c_2 \ \ c_3)$$

이 된다. 표현을 간단히 나타내게 하기 위해

$$\widehat{A_{11}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{A_{12}} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{32} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{A_{21}} = (A_{21} \ \ A_{23}), \qquad \widehat{b_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{c_1} = (c_1 \ \ c_3), \quad \text{그리고} \quad \widehat{\Sigma_1} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & -\Sigma_3 \end{pmatrix}$$

라 놓자. 이 경우에 작은 양수 값의 그래미언에 해당하는 상태를 소거하여 얻은 축소차수 모델은 다음과 같다.

$$G_r(s) = \hat{c}_1(sI_{r+\alpha} - \hat{A}_{11})^{-1}\hat{b}_1$$

여기서 행렬 $A_{11}$과 $A_{33}$의 크기는 각각 $r\times r$과 $\alpha \times \alpha$이다.

**주 3.2** : $r_{i,1} \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 인 조건하에서 상태공간 모델 $(A, b, c)$ 이 평형될 수 있다고 가정할 때, $\sigma_r^2 \neq \sigma_{r+1}^2$, $\sigma_{m-\alpha}^2 \neq \sigma_{m-\alpha+1}^2$인 경우에는 축소차수 모델 $G_r(s)$ 과 원래 플랜트 $G(s)$ 는 같은 수의 불안정한 극점의 수를 갖는다.

Routh 배열의 첫 번째 열의 계수 $r_{i,1}(i=1,2,\cdots,n)$이 0이 아니고 $T^{-1}W_{co}T$가 상삼각(upper triangular) 행렬이 되도록 해주는 유사변환(similarity transformation) 행렬 $T$가 존재한다고 가정하면, 전달함수 행렬 $G(s)$가 주어졌을 때 축소차수 모델 $G_r(s)$을 구하는 추정 알고리즘은 다음과 같다.

스텝 1 : 전달함수 행렬 $G(s)$로 부터 행렬 $P$와 $D$를 (5)와 (11)에서 구하고, Bezoutian 행렬 $M$를 (10)에서 계산한다. 행렬 $P$를 통하여 시스템의 안정도를 판별할 수 있다.

스텝 2 : $P^TK=M$로부터 $K$를 구하고 $DPW_{co}=K$의 관계식에서 $W_{co}=(P^TDP)^{-1}M$를 계산할 수 있다. (5)에서 $i+j>n+1$와 $n-i-j$ : 짝수에서는 $P_{i,j}=0$이므로 $W_{co}$는 역행렬을 이용하지 않고 계산할 수 있다.

스텝 3 : 행렬 $W_{co}$의 RSFD(real Schur form decomposition)를 계산한다.

$$Q^TW_{co}Q=\overline{W}=\begin{pmatrix} \overline{W}_{11} & \overline{W}_{12} \\ 0 & \overline{W}_{22} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

여기서$W_{co}$의 고유값은 $\overline{W}$의 대각선에 나타난다. $\overline{W}_{11}=(w_{11}(i,j))\in R^{m\times m}$, $W_{22}=(w_{22}(i,j))\in R^{k\times k}$는 모두 상삼각 행렬인데, $\{W_{11}(i,i)\neq 0, j=1,\cdots,m\}$ 그리고 $\{W_{22}(i,i)=0,\ j=1,\cdots,k\}$인 $m(:=n-k)=rank(W_{co})$을 택한다. 상삼각 행렬로 나타낼 수 없는 불안정한 모델에 대해서는 평형된 상태공간 모델이 존재하지 않는다[4].

스텝 4 : 다음의 Sylvester 방정식을 풀어 행렬 $\overline{Z}$를 구한다.

$$W_{11}\overline{Z}-\overline{Z}W_{22}+W_{12}=0 \qquad (17)$$

행렬 $\overline{W}_{11}$과 $\overline{W}_{22}$이 모두 상삼각 행렬이므로, (17)를 계산할 때 계산량은 $mnk/2$ 플롭스이다[11].

행렬 $\overline{X}$를 다음과 같이 정의하면

$$\overline{X}=\begin{pmatrix} I_m & \overline{Z} \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

$\overline{X}^{-1}\overline{W}\overline{X}=\mathrm{diag}\{\overline{W}_{11},\overline{W}_{22}\}$의 관계식이 성립 한다. 이때 고유값(eigenvalue) $\lambda_i=W_{11}(i,i)$과 관계식 $\overline{W}_{11}y_{1,i}=\lambda_i y_{1,i},\ i=1,\cdots,m$로부터 고유벡터(eigenvector) $y_{1,i}\in R^{m\times 1}$를 계산한다. 마찬가지로 $\overline{W}_{22}y_{2,i}=0,\ i=1,\cdots,k$로부터 고유벡터(eigenvector) $y_{2,i}\in R^{k\times 1}$를 계산한다. 고유값 행렬과 고유벡터 행렬을 각각 $\Lambda_1=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$, $\overline{Y}_1=[y_{1,i}\ \cdots\ y_{1,m}]$, 과 $\overline{Y}_2=[y_{2,1}\ \cdots\ y_{2,k}]$라 두면 다음 관계식이 성립한다.

$$\overline{Y}^{-1}\overline{X}^{-1}\overline{W}\overline{X}\,\overline{Y}=\begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

여기서 $\overline{Y}=\mathrm{diag}\{\overline{Y}_1,\overline{Y}_2\}$이고 $0_{k\times k}$는 영 행렬이다. 행렬 $T=Q\overline{X}\,\overline{Y}$는 평형 변환(balancing transformation)이므로 정리 3.1로부터 다음의 대각 행렬 $D_m$와 $D_p$을 얻을 수 있다.

$$T^TMT=D_m=\begin{pmatrix} D_{m1} & 0 \\ 0 & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

$$T^T(P^TDP)T=D_p=\begin{pmatrix} D_{p1} & 0 \\ 0 & D_{p2} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

여기서 $D_{m1}=\mathrm{diag}\{d_{m1}(1,1),\cdots,d_{m1}(m,m)\}$이고 $D_{p1}$는 모두 $m\times m$ 대각 행렬이다. (16)에서 직교 행렬(orthogonal transformation) $Q$를 $Q=[Q_1\ Q_2]$, $Q_1\in R^{n\times m}$로 분해하면 (16) - (20)에서 변환 행렬 $T$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T=(Q_1\overline{Y}_1\quad (Q_1\overline{Z}+Q_2)\overline{Y}_2),$$
$$T^{-1}=\begin{pmatrix} \overline{Y_1^{-1}}(Q_1^T-\overline{Z}Q_2^T) \\ \overline{Y_2^{-1}}Q_2^T \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

이를 (19)와 (20)에 대입하면 대각 행렬 $D_{m1}$와 $D_{p1}$는

$$D_{m1} = (Q_1 \ \overline{Y}_1)^T M(Q_1 \ \overline{Y}_1),$$
$$D_{p1} = (Q_1 \ \overline{Y}_1)^T (P^T DP)(Q_1 \ \overline{Y}_1)$$

이 된다. 변환 행렬을 $T_{bal} = Q_1 \overline{Y}_1 |D_{m1}|^{-1/2}$ 와 가상 역행렬을 $T_{bal}^+ = |D_{m1}|^{1/2} \overline{Y_1^{-1}} (Q_1^T - \overline{Z} Q_2^T)$, $|D_{m1}|^{1/2} = \mathrm{diag}\{|d_{m1}(1,1)|^{1/2}, \cdots, |d_{m1}(m,m)|^{1/2}\}$ 라 두면 (16)과 (20)에서

$$T_{bal}^+ W_c T_{bal}^{+T} = |D_{m1}|^{1/2} D_{p1}^{-1} |D_{m1}|^{1/2} \quad (22)$$

이 성립한다. 그리고

$$\begin{aligned} T_{bal}^T W_o T_{bal} &= |D_{m1}|^{-1/2} D_{m1} D_{p1}^{-1} D_{m1} |D_{m1}|^{-1/2} \\ &= |D_{m1}|^{-1/2} |D_{m1}| D_{p1}^{-1} |D_{m1}| |D_{m1}|^{-1/2} \\ &= |D_{m1}|^{1/2} D_{p1}^{-1} |D_{m1}|^{1/2} \end{aligned} \quad (23)$$

이다. 여기서 대각 행렬은 교환법칙과 $|D_{m1}|^2 = D_{m1}^2$의 성질을 만족한다. 따라서 (22)와 (23)으로 부터 $T_{bal}^+ W_c T_{bal}^{+T} = T_{bal}^T W_o T_{bal} = |D_{m1}|^{1/2} D_{p1}^{-1} |D_{m1}|^{1/2}$이 성립함을 알 수 있다.

스텝 5 : 평형 변환 $T_{bal} = Q_1 \overline{Y}_1 |D_{m1}|^{-1/2}$ 와 $T_{bal}^+ = |D_{m1}|^{1/2} \overline{Y_1^{-1}} (Q_1^T - \overline{Z} Q_2^T)$ 를 계산한다. 이때 내부적으로(internally) 평형된 최소의 모델 $(A_{bal}, b_{bal}, c_{bal})$ 은 다음과 같이 얻어진다.

$$A_{bal} = T_{bal}^+ A T_{bal}, \quad b_{bal} = T_{bal}^+ b, \quad c_{bal} = c T_{bal}.$$

이때 $T_{bal}^+$는 $T_{bal}^+ T_{bal} = I_m$ 의 특성을 가진다.

(3)에서 대각 성분의 배열의 순서를 바꾸기 위해 다음 관계를 만족하는 행렬 $J$를 곱한다.

$$J^T |D_{m1}|^{1/2} D_{p1}^{-1} |D_{m1}|^{1/2} J = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

여기서 $J = [e_{s1} \ \cdots \ e_{sm}]$ 인데 $(s_1, \cdots, s_m)$는 $(1, \cdots, m)$의 순열(permutation)이므로 $J^T J = I_m$ 이다. 이때 상태공간 모델 $(\hat{A}_{bal}, \hat{b}_{bal}, \hat{c}_{bal})$ 을 다음과 같이 두면

$$\hat{A}_{bal} = J^T A_{bal} J, \quad \hat{b}_{bal} = J^T b_{bal}, \quad \hat{c}_{bal} = c_{bal} J,$$
$$\hat{c}_{bal}(sI_m - \hat{A}_{bal})^{-1} \hat{b}_{bal} = c_{bal}(sI_m - A_{bal})^{-1} b_{bal}$$

의 관계가 성립한다.

스텝 6 : 행렬 $\hat{A}_{bal}$, $\hat{b}_{bal}$, 그리고 $\hat{c}_{bal}$ 을 다음과 같이 두면

$$\hat{A}_{bal} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_{bal} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad (24)$$
$$\hat{c}_{bal} = (\ \hat{c}_1 \quad c_2)$$

(24)로부터 축소차수 모델 $G_r(s)$는 다음과 같다.

$$G_r(s) = \hat{c}_1 (sI_{r+\alpha} - \hat{A}_{11})^{-1} \hat{b}_1.$$

주 3.3 : 제안된 방법을 사용한 모델 축소 방법의 계산량은 약 20-25$n^3$플롭스이고 Therapos 방법 [4]의 계산량은 약 40-50$n^3$플롭스이다. 기존의 방법들은 MIMO 시스템에서 활용되는 것인데, SISO 시스템에서는 본 논문에서 제안한 방법을 사용하면 계산량도 줄어들고 간단하게 사용할 수 있다.

주 3.4 : 주어진 SISO 플랜트가 안정한 경우에는 $r_{i,1} > 0$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ 이므로, 변환행렬 $T_{bal}$를 구하기 위해 $(D^{1/2}P)^{-T} M (D^{1/2}P)^{-1} y = \lambda y$, $y = D^{1/2} P x$ 의 대칭의 고유값/고유벡터 알고리즘을 사용할 수 있다. 이 경우에는 고유값/고유벡터 알고리즘의 계산량이 5$n^3$플롭스로 줄어들게 되고, 전체 모델 축소 방법의 계산량은 약 10-15$n^3$플롭스가 된다.

주 3.5 : 주어진 시스템의 안정도는 교차 그래미언 $W_{co}$을 구할 때 Routh 배열로부터 알 수 있다. 따라서 대칭의 고유값/고유벡터 알고리즘을 사용할 수 있는 지를 미리 알 수 있다.

## IV. 결 론

본 논문에서는 닫힌형태의 그래미언을 사용한

불안정한 SISO 시스템의 모델 축소에 관한 알고리즘을 제안하였다. 제안한 알고리즘은 그래미언을 Lyapunov 행렬 방정식을 풀지 않고 전달함수 행렬의 계수들로부터 직접 구할 수 있으므로 기존의 MIMO 시스템에서 사용되는 방법에 비해 SISO 시스템에서는 간단한 알고리즘을 사용할 수 있다. 이때 그래미언은 Hankel 행렬과 Routh 배열에 의해 표시할 수 있었다. 제안한 모델 축소 방법은 안정한 시스템 뿐 아니라 불안정한 시스템에도 적용할 수 있다. 이때 얻어지는 축소차수 모델의 불안정한 극점의 수는 원래 주어진 시스템의 불안정한 극점의 수와 정확히 일치한다.

## 참 고 문 헌


1. Moore, B. C., 1981, "Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, and model reduction," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 2, pp. 17-32.
2. Glover, K., 1983, "All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their $L_\infty$ -error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1151-1193.
3. Kenney, C. and Hewer, G., 1987, "Necessary and sufficient conditions for balancing unstable systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 2, pp. 157-160.
4. Therapos, C. P., 1989, "Balancing transformations for unstable nonminimal linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-34, no. 4, pp. 455-457.
5. Therapos, C. P., 1985, "Internally balanced minimal realization of discrete SISO systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 3, pp. 297-299.
6. Gantmacher, F. R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea.
7. Xiao, C.-S., Feng, Z.-M., and Shan, X.-M., 1992, "On the solution of the continuous - time Lyapunov matrix equation in two canonical forms," *IEE Proceeding -D*, vol. 139, no. 3, pp. 286-290.
8. Barnett, S., 1983, *Polynomials and Linear Control Systems*. Marcel Dekker Inc.
9. Kim, H.-C. and Choi, C.-H., 1994, "Closed-form Solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation," *IEE Proceeding-D*, vol. 141, no. 5, pp. 350-356.
10. Lancaster, P. and Tismenetsky, M., 1983, *The Theory of Matrices with application*. Academic Press, Inc.
11. Golub, G. H. and Loan, C. F. V., 1983, *Matrix computation*. The Johns Hopkins University Press.
12. Laub, A. J., Heath, M. T., Paige C. C., and Ward, R. C., 1987, "Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-32, no. 2, pp. 115-122.