

# 정적-외연적 강소성 유한요소법을 이용한 금속박판성형해석

정 동 원\* · 이 승 훈\*\*

## Analysis of the Sheet Metal Forming using the Static-Explicit Rigid-Plastic Finite Element Method

D. W. Jung and S. H. Lee

### ABSTRACT

In rigid-plastic finite element method, there is a heavy computation time and convergence problem. In this study, revised rigid-plastic finite element method will be introduced. This method is the way that restrict the convergence interval. In result, convergence problem and computation time due to large non-linearity in the existing numerical analysis method were no longer a critical problem. It is expected that various results from the numerical analysis will give very useful information for the design of tools in sheet metal forming process.

**Key Words** : Rigid-plastic finite element, Convergence, Computation time, Sheet metal forming

### 1. 서 론

많은 산업분야에서 각종 박판성형을 이용해 많은 제품을 성형하고 있다. 박판성형이란, 금속판재를 이용한 다양하고 복잡한 형상의 제품을 만드는 공정을 의미하며, 타 가공 공정에 비해 제품의 경량화, 상품성, 높은 정밀도 및 대량생산을 실현할 수 있는 장점을 가지고 있다. 우수한 박판성형품을 생산하기 위해서는 성형상의 특성을 적절히 고려한 공정설계와 이에 따르는 금형설계가 필수적이다. 박판성형공정 시변형의 복잡성과 성형한계에 대한 이해부족으로 지금까지

까지의 금형설계는 주로 시행착오법에 의존해왔다.[1]

따라서, 보다 빠르면서 좋은 품질의 제품을 생산하기 위해서는 박판성형공정에 대한 이해와 더불어 유한요소법을 이용한 해석 시뮬레이션을 이용하여 쉽고 빠르게 산업현장에서 이용할 수 있는 해석기법의 필요가 절실하다. 박판성형을 효과적으로 해석하기 위해서는 기하학적, 재료적 비선형성을 고려한 해석이 필수적이다.

이러한 요구에 발맞추기 위하여 다양한 방법을 통해서 현장에 손쉽게 적용될 수 있는 해석기법이 연구되고 있다. 여러 방법들 중 정적 내연적방법은 강소성 유한요소법을 이용한 수치적 해석기법으로 정밀도에 가까운 결과를 제공해 주지만 계산시간이 길어지고 해의 수렴성에 많은 문제점들을 보이고 있다. 이러한 점을 보완하기 위해 수렴성과 계산시간을 동시에 만족시킬 수 있는 방법이 필요하다. 현재까지 많은 다

\* 제주대학교 기계에너지생산공학부, 첨단기술연구소,  
Faculty of Mechanical, Energy & Production Eng., Research  
Institute of Advanced Technology, Cheju Nat'l Univ.

\*\* 제주대학교 대학원  
Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

른 분야에서는 많은 시도들이 이루어지고 있으며 이 분야에 대해서도 정적내연적방법, 정적외연적방법, 동적외연적방법 등을 통해서 연구되고 있다.

비선형 문제의 해법에는 증분법(incremental method), 반복법(iterative method)과 혼합법(mixed method) 등이 있다. 일반적으로 증분법은 전 성형과정을 여러단계로 나누고 각 단계의 변화를 미소하게 하여 선형적으로 변화한다고 가정하여 물리량들의 중첩에 의하여 해석하는 방법이다. 이 방법은 계산시간이 길다는 단점이 있지만 정해에 가까운 해를 구할 수 있어 비선형문제를 다룰 때 많이 사용된다. 반복법은 Newton-Raphson법을 이용해 어느 정도의 해의 오차범위를 두고 이 범위를 만족하도록 정해에 가까운 근사해를 구한다. 혼합법은 증분법과 반복법을 혼합한 방법이다. 반복법이 증분법보다는 계산시간이 빠르고 수렴성이 좋지만 그 자체만론 수렴성에 많은 문제를 보이고 있다.[2]

본 연구는 반복법을 이용한 방법을 수정해서 산업 현장에서 빠르게 적용할 수 있도록 계산시간의 단축과 수렴성을 보완하는 방법을 제안하는 것이다.

## II. 이론 해석

### 2.1 수정된 접선 강성법

평면변형 강소성유한요소법을 이용하여 박판성형을 해석할 때 기존에는 비선형 방정식을 Newton-Raphson 방법으로 Fig. 1에서처럼 축차(iteration)를 통해 원하는 해를 수렴시켜왔다.

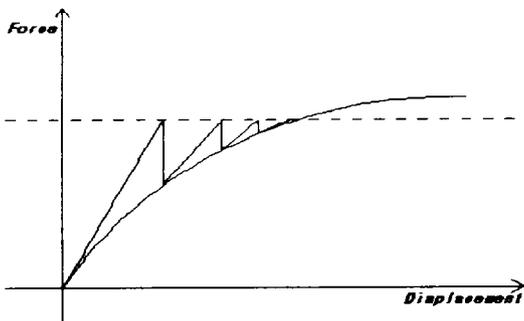


Fig. 1. Newton-Raphson method.

이 방법으로 해를 구할 때 해석하려는 형상이 복잡해질수록 해를 수렴시키는데 많은 어려움이 따른다. Fig. 2와 같은 접선을 이용하여 축차(iteration)없이 접선을 따라가면서 해를 구할 수 있도록 Fig. 3에서처럼 수렴구간(punch stroke)을 작게 조정하는 방법을 통해 정밀해에 가까운 해를 얻음으로써 수렴성 문제해결을 시도했다.

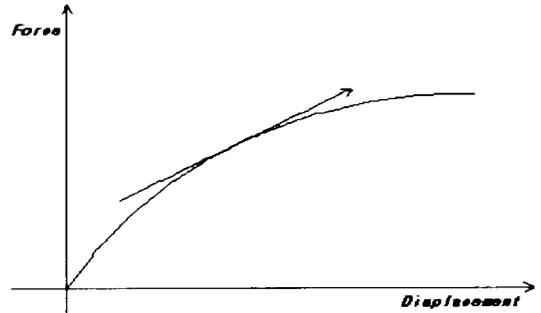


Fig. 2. Tangent vector.

본 연구에서 축차(iteration)에 의한 수렴없이 해를 구하면 해의 오차가 많이 발생될 것으로 보이나 Fig. 3과 같이 수렴구간(punch stroke)을 조정함으로써 어느 정도의 오차범위를 줄일 수 있다.

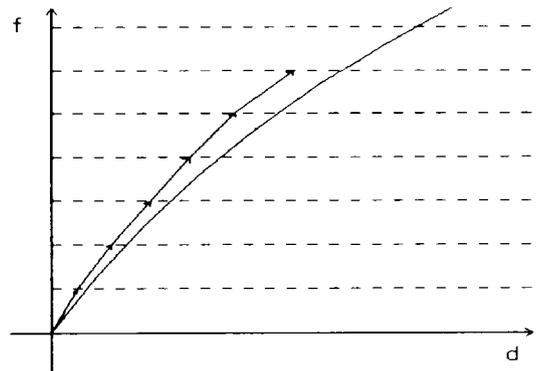


Fig. 3. Restricted-iteration method.

### 2.2. 평면 변형도 강소성 유한요소법

기하학적, 재료적 비선형성을 고려하여 박판성형을 해석하는 것이 효과적이다. 위와 같은 점을 고려하여

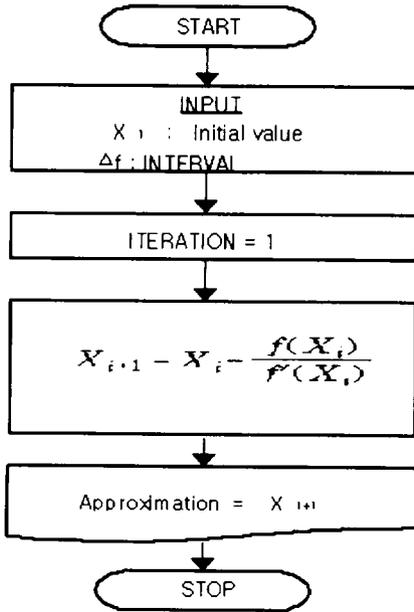


Fig. 4. Flow diagram.

정완진[3] 등은 Hill의 신이방성이론[4,5]을 따르는 재료에 대하여 강소성유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 정완진 등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형 문제 경우에 한하여 적용하였다. 강소성 유한요소법의 변분식은 다음과 같이 나타난다.[6]

$$\int_{A^0} \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) r^0 dA^0 - \int_{S^r} t \cdot \delta u dS^r = 0 \quad (1)$$

유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$Q(\tilde{U}) = P(\tilde{U}) + F \quad (2)$$

여기서  $P(\tilde{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고  $f$ 는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식(1)의 첫째항에 해당하는  $Q(\tilde{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\tilde{U}) = \sum_e \int_{A^{e0}} \bar{\sigma}^e g^1 \frac{\partial(\Delta \bar{\epsilon})}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_1} K_1 t^e dA^e \quad (3)$$

식(2)는 비선형 방정식이므로 식(4)와 같이 선형화하여 뉴턴 랩슨방법으로 해를 구한다.[6]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial U} [Q(\tilde{U}) - P(\tilde{U})] |_{\tilde{U}=\tilde{U}_{(i-1)}} \cdot \Delta \tilde{U}_{(i)} & \quad (4) \\ & = F - Q(\tilde{U}_{(i-1)}) + P(\tilde{U}_{(i-1)}) \end{aligned}$$

본 연구에서 특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발사하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakad 등[7]이 사용한 방법을 채택하여 변형률 증분을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$\bar{d\epsilon} = \sqrt{d\epsilon_o^2 + d\epsilon_o^2} \quad (5)$$

이때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_o}{\sqrt{d\epsilon_o^2 + d\epsilon_o^2}} \bar{d\epsilon} \quad (6)$$

### 2.3. 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리 방법

요소단위로 박막요소에 대한 유한요소법의 접촉문제를 고려하게 되면 요소내에서 수직응력을 구할 수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다.

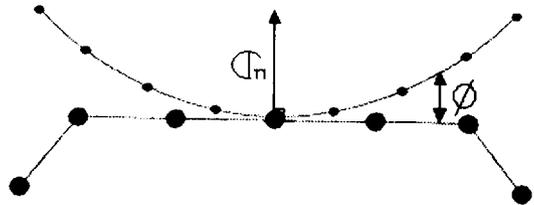


Fig. 5. Contact condition between two bodies.

Fig. 5와 같이 두 물체가 접촉할 때 접촉조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (7.a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (7.b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (7.c)$$

본 연구에서는 경사좌표계를 사용하여 2차원형상의 금형에 의한 박판성형 해석 시 접촉조건을 만족시켰다. 2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수로 나타낼 수 있다.

$$r(u) = X^S(u)e_x + Y^S(u)e_y \quad (8)$$

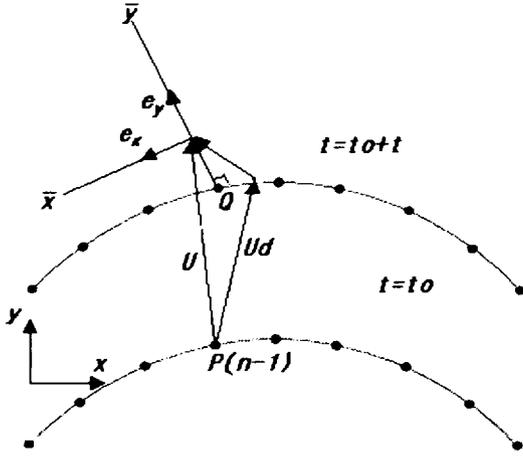


Fig. 6. Treatment of skew boundary condition.

Fig. 6에서 접촉면상의 접촉점 P에 가장 가까운 점 Q는 P와 Q사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다.[6]

$$|QP|^2 = (X(P) - X^S(u))^2 + (Y(P) - Y^S(u))^2 \quad (9)$$

Fig. 2와 같이 금형표면위의 점 Q에서의 금형바깥 방향의 수직벡터의 방향을  $e_y$ , 점 P의 편치에 대한 상대변위  $U_r$ 이  $e_y$ 에 수직인 성분벡터의 방향을  $e_x$ 로 한다.  $e_x, e_y$ 는 다음과 같다.

$$e_x = \frac{U_r - (U_r \cdot e_y)e_y}{|U_r - (U_r \cdot e_y)e_y|} \quad (10)$$

$$e_y = \frac{n(Q)}{|n(Q)|}$$

여기서  $U_r$ 은 점 P의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다. 변환행렬 T는 다음과 같다.[6]

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (11)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(12)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식을 원래의 직교좌표계 (X, Y)로부터

경사좌표계 ( $\bar{X}, \bar{Y}$ )로 변환한다.

$$\bar{K} \Delta U = \bar{R} \quad (13)$$

여기서,  $\bar{K} = T^T K T$ ,  $\bar{R} = T^T R$ 이다.

coulomb 마찰조건을 만족시키기 위해 마찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.[6]

$$(F_s)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k U_x) \quad (14)$$

$$U_x = U_r - (U_r \cdot e_y)e_y \quad (15)$$

여기서 k는 매우 큰 상수이다. 식 (14)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환후에 계산되었다. 접촉조건중에서 식(7.c)를 만족하기 위해서는 접촉절점과 금형사이에 작용하는 절점력이 압축력이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면 (접촉 → 비접촉) 상태전환을 하여 반복계산한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.[8]

$$P_y = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{yy}) - R_y \quad (16)$$

만일  $P_y$ 가 음이면 (접촉 → 비접촉) 절점의 접촉 상태를 변경하고 변위벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다.

### III. 결과 및 고찰

#### 3.1 성형공정 해석적용

본 논문에서 제시된 방법을 이용해 산업현장에서 적용되는 냉장고 손잡이 부분의 모델에 적용시켰다. 수렴구간(punch stroke)을 0.2, 0.4, 0.5, 1.0mm로 조정하면서 축차(iteration)없이 해를 구했다.

수식화 된 결과에 따라 평면변형 유한요소 해석 프로그램을 작성하여 성형품의 각 단면들을 성형단계에 따라 2차원 해석하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

$$\text{용력-변형률 곡선} : \bar{\sigma} = 52.985 (0.2 + \bar{\epsilon})^{0.2}$$

수직 이방성 계수 :  $R = 2.00$   
 재료 두께 :  $t = 0.45\text{mm}$   
 Coulomb 마찰계수 :  $\mu = 0.2$   
 구속력(Binding Force) :  $15\text{kgf/mm}$ (오른쪽),  
 $15\text{kgf/mm}$ (왼쪽)

성형한계 :  
 Maximum allowable punch stroke =  $22\text{mm}$

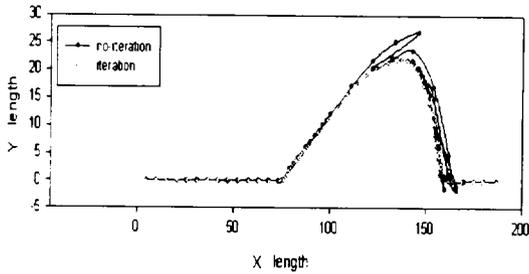


Fig. 7. Comparison of iteration with no-iteration at stroke 0.2mm.

수렴구간(punch stroke)이  $0.2\text{mm}$ 인 경우에는 짧은 구간에서 축차(iteration)없이 얻어진 결과들이 조합되면서 축차(iteration)을 통해서 구한 결과와 많은 차이를 보이고 있다. 입력값으로 준 성형허용구간(maximum stroke)를 초과함으로써 결과가 수렴되지 않고 발산되는 경향을 보이고 있다.

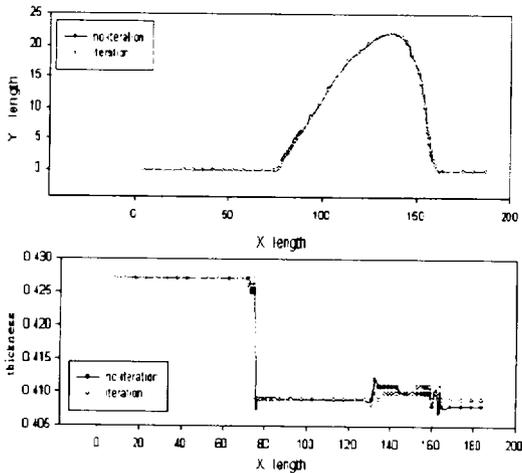


Fig. 8. Comparison of iteration with no-iteration at stroke 0.4mm.

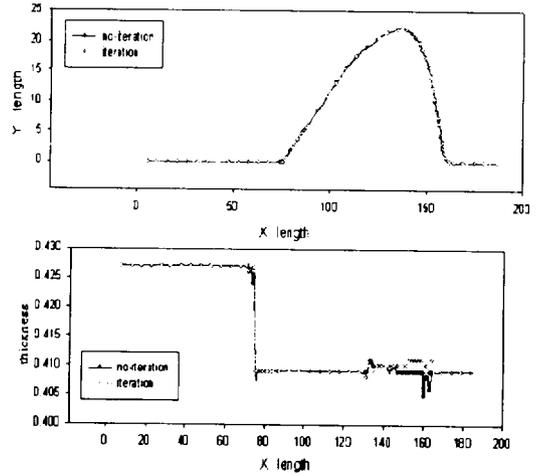


Fig. 9. Comparison of iteration with no-iteration at stroke 0.5mm.

반면에, 수렴구간(stroke interval)을  $0.4, 0.5\text{mm}$ 로 조정해서 시뮬레이션한 결과는 축차(iteration)를 통한 결과와의 두께 최대차이가  $0.0016, 0.0032$ 로 거의 차이가 없음을 Fig. 8, 9에서 보여주고 있다. 축차(iteration)를 통해서 결과를 도출할 때 stroke가  $0.4\text{mm}$ 일때는 총 iteration수가 976이고,  $0.5\text{mm}$ 일때는 973회였다. no-iteration인 경우엔 1 step에 1 iteration을 수행하므로  $0.4\text{mm}$ 일때는 55회  $0.5\text{mm}$ 일때는 44회였다. 즉, 계산시간 또한 단축됨을 알 수 있다.

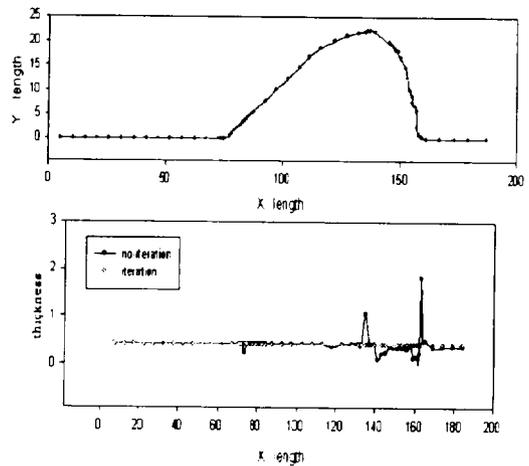


Fig. 10. Comparison of iteration with no-iteration at stroke 1.0 mm.

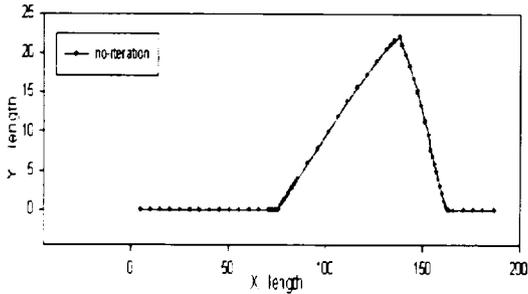


Fig. 11. Shape curve at stroke 11mm.

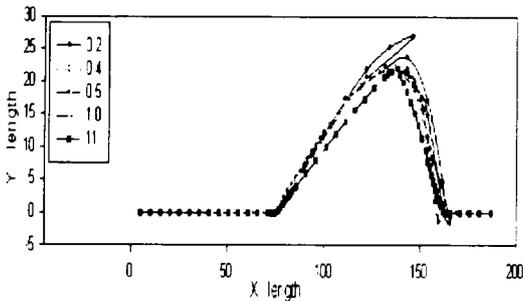


Fig. 12. Shape curve according to the stroke.

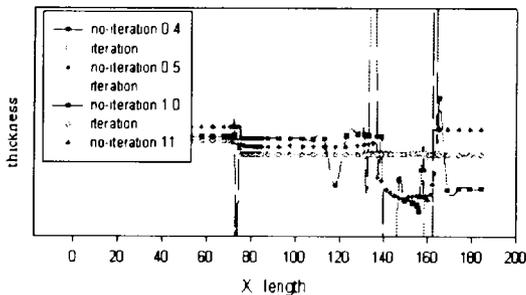


Fig. 13. Thickness curve according to the stroke.

또한, Fig. 8, 9에서와 같이 수렴구간을 크게 조정했을 때는 성형곡선이 기울기가 작고 구간이 길기 때문에 원만하지 못한 성형곡선을 보여주고 있다. 그리고 두께곡선 역시 매우 큰 범위의 오차를 보이고 있다.

Fig. 12는 no-iteration인 성형곡선을 각 stroke마다 비교한 결과를 나타내고 있으며, 이로부터 수렴구간의 간격의 조정이 성형곡선 형성에 큰 영향을 미침을 알 수 있다. 또한 Fig. 13에서 보여지는 축차(iteration)와 non-iteration인 경우의 두께결과를 비교해보면 적정

한 수렴구간의 선택으로부터 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

본 연구에서는 수렴성과 계산시간의 단축을 위해서 축차(iteration)를 제한하는 방법을 사용하여 유한요소 프로그램을 구성하고 성형공정에 적용시켜보았고, 다음과 같은 결론들을 얻을 수 있었다.

1. 수렴의 문제 때문에 rigid treatment값을 조정하면서 해석할 필요가 없다.

2. 수렴구간을 적절히 조절 하면 축차(iteration)를 통해 얻어진 결과와 비슷한 결과를 얻을 수 있고 많은 시간이 단축된다.

이 방법은 빠른 시간 내에 그리고 수렴성에 대한 문제없이 원활하게 성형공정을 해석할 수 있다는 실용적인 장점을 가지고 있다. 따라서 금형 설계 단계에서 시뮬레이션 변수와 금형형상을 바꾸어 줌으로써 최적의 금형 설계조건과 공정변수를 예측하는데 유용하다

## 참고 문헌

- 1) 양동열, 정완진, 송인섭, 전기찬, 유동진, 이정우, 1991. "강소성 유한 요소법을 이용한 자동차 판넬 성형 공정의 평면 변형 해석", 대한기계학회 논문집 제15권 1호, pp. 169-178
- 2) 임상진, 팽병만, 이주영, "유한요소법입문", 서울, 동명사, 2001
- 3) W.J. Chung, Y.J. Kim and D.Y. Yang, 1989. Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms using Hill's New Yield Criterion, Int.J. Mech. Sci., Vol.31, pp.193-207.
- 4) R. Hill, 1979. Theoretical of textured aggregates, Math Proc. Camb. phil. Soc., Vol.85, pp.179-191.
- 5) R. Hill, Mathematical Theory of plasticity, Oxford University Press.
- 6) 정동원, 송인섭, 양동열, 이장희, 1992. 유한요소법을 이용한 박판성형의 단면해석과 자동차 금형설

- 제에의 응용. 대한기계학회 춘계학술대회 논문집  
(1). pp.380-383.
- 7) K. Osakada, J. Nakano and K. Mori. 1982. Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulations for finite deformation. Int.J. Mech. Sci.. Vol.24. pp.459-468