

# 일반화된 역행렬을 사용한 실시간 시스템 인식에 대한 연구

문 효 준\* · 은 희 창\*\* · 서 일 교\*\*

## A Study on Real-Time System Identification Using Generalized Inverse Matrix

Hyo-Jun Mun\* · Hee-Chang Eun\*\* · Ill-Gyo Suh\*\*

### ABSTRACT

This study provided an analytical method for real-time system identification by utilizing fundamental linear algebra and minimizing a quadratic form of the differences in physical properties calculated from the initially given properties and the next expected properties. The validity of the proposed method depends on the selected weighting matrix. Although it was observed that the proposed method gives reasonable values by the proper selection of the weighting matrix, the deficiency of this method like the proper selection of weighting matrix with time needs to be improved.

**Key words** : Generalized inverse, Weighting matrix, System identification, Minimization

### 1. 서 론

구조물은 외부의 환경과 접하고 있으므로, 지진이나 각종 외부 하중에 의해 부재는 손상된다. 국부적인 부재의 손상에 의한 내력의 저하는 구조물 전체의 파괴와 연관될 수 있으므로 손상 부위를 사전에 파악하여 적절한 보수 및 보강에 의해 내력을 회복시킴으로서 구조물의 적절한 유지관리가 행해질 수 있을 것이다. 이러한 측면에서 최근에는 구조물들에 대한 손상 부위를 추적하는 시스템 인식(system identifica-

tion)에 대한 역할의 중요성이 대두되고 있다.

구조물이나 기계적 장치의 물리적인 현상을 설명하는 방정식의 수는 결정하고자 하는 미지수 보다 일반적으로 작으므로 일반화된 역행렬을 사용하거나 최적화의 과정으로 가중 행렬을 사용하여 물리적인 현상을 묘사하게 된다. 즉, 자연 현상들을 명확히 설명할 수 있는 방정식의 수가 작기 때문이다. 따라서, 진동의 최적 제어(optimum control)에서나 신경망(neural network), 혹은 퍼지 제어(fuzzy control) 등에는 가중 행렬의 결정이 그 알고리즘의 효율성과 깊은 관련이 있다.

구조물의 유지관리 측면에서 계측 시스템의 도입은 구조물의 내구성을 증진시키고 육안에 의한 구조물의 손상 부위를 발견하는 대신에 계측 장비들에 의한 손상 부위의 추적과 보수 및 보강 등이 적절히 행해질

\* 제주대학교 대학원

Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

\*\* 제주대학교 건축학부

Dept. of Architectural Eng., Cheju Nat'l Univ.

것이다. 특히 최근의 건축물들은 초고층화 및 장경간화하는 추세에 있으므로 계측 장비의 도입은 필수적이며, 이와 동시에 시스템의 인식(system identification)에 대한 중요성이 점차 커지고 있다.

따라서, 최근에 들어서는 시스템 인식에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며, 대부분의 방법들은 Kalman Filter 이론<sup>3),4)</sup>을 근거로 하고 있다. Masri et al.<sup>1),2)</sup>은 비선형의 구조물들에 대한 물성치를 일반화된 역행렬법을 사용하여 결정하였다.

본 연구에서는 동적 외부 하중이 작용하는 동안 발생하는 시스템의 물리적인 특성을 결정하는 방법으로, 건축물의 손상에 의한 예측된 물성치와 최초 건축물로부터 계산된 물성치와의 오차에 의한 목적 함수를 최소화함으로써 실시간 건축물의 물성치를 인식하게 된다. 제시된 방법은 가중행렬에 영향을 받으며, 적절한 가중행렬의 선택만에 의해 합리적인 시스템 인식이 행해지므로 이에 대한 보다 섬세한 가중 행렬의 선택이 필요한 것이다. 이들을 적용 예를 통하여 살펴보면, 향후 연구 방향이 제시될 것이다.

## II. 시스템 인식법

건축물은 외력의 작용하에 손상을 입으면 이에 따라 구조물의 강성 및 감쇠에 변화가 나타나며, 이들 변화된 물리적인 특성에 의한 건축물의 응답 변위, 속도 및 가속도들이 측정된다. 이때, 손상에 의한 예상되는 물성치와 최초의 물성치로부터 계산된 물성치와의 차에 의한 이차형을 최소로 하여 실시간 시스템의 물성치를 계산하게 된다.

지진이 작용하는 경우,  $n$  자유도 구조물의 운동방정식은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\{1\}\ddot{u}_g \quad (1)$$

여기서, 점은 시간에 관한 미분을 나타내며,  $M, C, K$ 는  $n \times n$  질량, 감쇠 및 강성 행렬을 각각 나타내며,  $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$ 이며,  $\ddot{u}_g$ 는 지진 가속도를, 그리고 (1)은 모든 성분이 1인  $n \times 1$  열벡터를 나타낸

다. 식(1)로부터 관측된 지진가속도에 따른 건축물의 응답 변위, 속도 및 가속도를 측정하여 건축물의 동적 특성치의 변화를 결정하고자 한다. 이는 다음과 같은 수식에 의해 표현될 수 있다.

$$Ra = b \quad (2)$$

여기서, 건축물의 질량은 외력의 작용에도 불구하고 일정한 값을 갖는다고 가정하고,  $R$ 은 측정된 건축물의 응답 변위 및 속도 성분에 의한  $n \times 2n$  계수 행렬을,  $a$ 는 건축물의 강성 및 감쇠 성분에 의한  $2n \times 1$  벡터를, 벡터  $b$  또한 측정값으로서  $b = -M\{1\}\ddot{u}_g + \ddot{u}$ 으로 정의된다.

외력이 작용하는 동안 건축물에 손상이 발생한다고 가정하면 건축물의 강성과 감쇠 성분은 시간에 종속될 것이다. 최초로 건축물의 강성 및 감쇠 성분을  $\alpha_0$ 라 한다면 식(2)에 주어진 강성 및 감쇠 성분 벡터  $a$ 와의 차이에 의한 이차형의 목적함수를 최소로 만족하는 값이 시간의 변화에 따른 건축물의 특성치가 될 것이다. 목적함수는 다음으로 정의된다.

$$P = [a - \alpha_0]^T W [a - \alpha_0] \quad (3)$$

여기서,  $W$ 는 양의정치성(positive definite) 가중 행렬(weighting matrix)이다. 최초의 건축물의 강성 및 감쇠 성분 벡터  $\alpha_0$ 은 평형 조건을 충족하는 상태에서 얻어진 값으로 외력이 작용하는 동안 이들 성분의 변동을 나타내는  $a$ 와의 차이에 의한 식(3)의 최소화는 계산된 값이 평형 상태로의 수렴을 의미하게 된다.

식(2)를 벡터  $a$ 에 관해 일반화된 역행렬을 사용한 해는 다음으로 된다.

$$W^{1/2}a = (RW^{-1/2})^{-1}b + [I - (RW^{-1/2})^{-1}(RW^{-1/2})]y \quad (4)$$

여기서,  $y$ 는 임의의 벡터를,  $I$ 는 단위 행렬을, '+'는 일반화된 역행렬(generalized inverse matrix)을 나타낸다. 임의의 벡터  $y$ 를 결정함으로써 실시간 시스템의 동적 특성치를 결정할 수 있을 것이다.

$Q=[I-(RW^{-1/2})^-(RW^{-1/2})]$ 를 식(4)에 사용하고 그 결과를 목적함수 (3)에 대입하면 목적함수의 최소화는 다음의 식을 만족하여야 한다.

$$W^{1/2}a - W^{1/2}a_0 = 0 \quad (5)$$

$$W^{1/2}[R^+b + (I - R^-R)y] - W^{1/2}a_0 = 0$$

식(5)를 만족하는 임의의 벡터  $y$ 에 관한 풀이는 다음으로 얻어진다.

$$y = Q^+[W^{1/2}a_0 - (RW^{-1/2})^+b] + [I - Q^+Q]z \quad (6)$$

여기서,  $z$ 는 임의의 벡터이다. 식(6)을 식(4)에 대입하고,  $QQ^+Q = Q$ 와  $QQ^- = Q$ 를 사용하고, 그 결과를 정리하면 벡터  $a$ 는 다음으로 계산된다.

$$a = a_0 + W^{-1/2}(RW^{-1/2})^+(b - Ra_0) \quad (7)$$

식(7)은 지진의 작용동안 건축물에 손상과 더불어 동적인 성질들의 시간에 따른 변화 추이를 나타내며, 우변의 첫 번째 항은 최초 건축물의 물성치로부터 계산되는 개선된(updated) 값을 나타내며, 두 번째 항은 예상되는 물성치와 개선된 물성치의 차와 가중 행렬과의 곱으로 표현되는 외력의 작용동안 변화되는 강성 및 감쇠의 손상 정도를 나타냄을 알 수 있다. 그러나 식(7)에서 동적 물성치는 시간에 따라 변함에도 불구하고 고려하는 가중행렬은 일정하며, 가중 행렬의 크기에 의해 인식 정도의 변화 폭이 크리라 판단된다. 따라서 시스템의 인식 정도는 가중 행렬의 선정에 크게 영향을 받음을 알 수 있다. 다음에서는 식(7)의 타당성과 가중 행렬에 대한 결과를 비교한다.

### III. 적용 예

이 절에서는 식(7)의 사용성 및 타당성을 나타내며, 가중 행렬의 영향을 평가하게 될 것이다. 3층 건물의 자유 물체도로 표현되는 그림 1의 건물에 대해 변위 벡터  $q=[q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 로 그 거동이 묘사되는 3자유

도 시스템을 고려하자. 이 건축물의 운동방정식은 다음으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (8)$$

최초 건축물의 동적 물성치는 다음으로 설계되었다고 가정하자.

$$m_1 = 3, \ m_2 = 4, \ m_3 = 3, \ k_1 = 100, \ k_2 = 90, \ k_3 = 100$$

$$c_1 = 0.3, \ c_2 = 0.24, \ c_3 = 0.27 \quad (9)$$

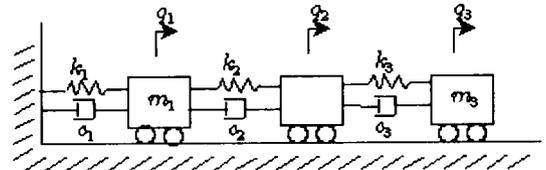


Fig. 1. Free body diagram of Three-story building subjected to earthquake load

만약 이 건축물에 그림 2와 같은 1940년 El Centro 지진에 의해 부재들이 손상을 입고 다음과 같이 강성과 감쇠 성분에 변화가 발생하였다고 가정하자.

$$k_1 = 100 \exp(-0.01t), \ k_2 = 90 \exp(-0.01t), \ k_3 = k_1$$

$$c_1 = 0.3 \exp(-0.01t), \ c_2 = 0.8c_1, \ c_3 = 0.9c_1 \quad (20)$$

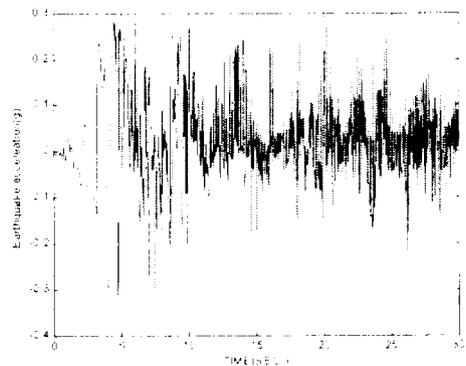


Fig. 2. El Centro ground motion in 1940

그림 2의 지진동 하에 고려하는 3층 건축물의 응답

변위, 속도, 가속도 성분을 측정하였다 하면 식(8)은 식(2)의 형태로 표현된다. 여기서,

$$\alpha = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3]^T \quad (21)$$

또한 행렬 R은 6×6 행렬로 전계수(full rank)의 측정된 변위 및 속도에 의한 계수 행렬이다.

이들을 계수 행렬 및 벡터와 다음의 가중 행렬을 사용하여 실시간으로 시스템의 물성치를 계산한 결과를 그림 3에 나타내고 있다.

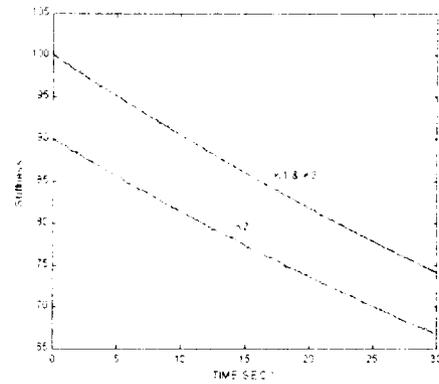
$$W = \text{diag}(30 \ 20 \ 10 \ 30000 \ 2000 \ 1000) \quad (22)$$

그림 3(a)는 식(20)으로 주어진 강성과 손상과 더불어 저하하는 강성을 식(7)에 의해 계산된 값을 비교하고 있다. 이 그림에서 보는 바와 같이 예측이 적절하게 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 3(b)는 감쇠에 대한 비교를 나타내고 있는데, 이 값은 실제 값에서 변동이 있음을 볼 수 있다. 감쇠 c1은 적절하게 예측되고 있으나, 특히 c2는 오차가 크게 있음을 볼 수 있다. 이는 절점 2에서의 감쇠는 절점 1과 3의 영향이 공존하고 있으므로 나타난 것으로 판단된다.

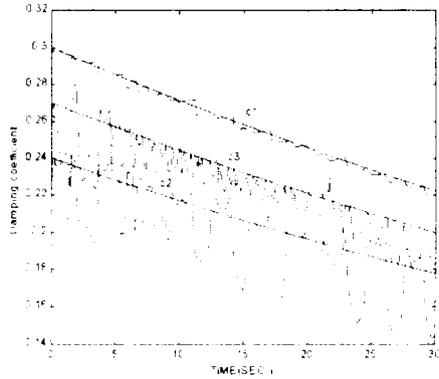
그림 (c)와 (d)는 다음으로 정의되는 예측값과 실제값의 오차 크기를 나타내고 있다.

$$\text{Magnitude of errors} = \left[ \frac{u - \bar{u}}{u} \right]^2 \quad (23)$$

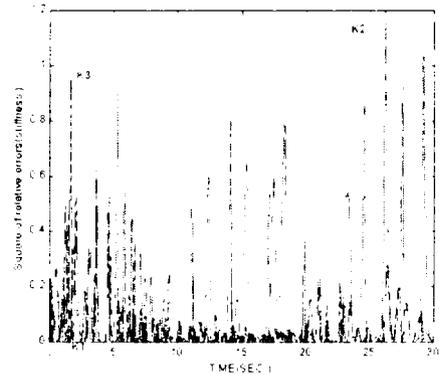
여기서, u는 실제의 물성치 변화를  $\bar{u}$ 는 식(7)에 의해 계산된 예측 값을 나타낸다. 이 그림들에서도 감쇠에 대한 예측의 변동폭이 있음을 볼 수 있다. 이러한 예측 값들은 가중 행렬의 크기와 밀접한 관계가 있으며, 따라서 가중 행렬의 결정 방법과 국부적인 물성치 변동을 줄이는 방법 등에 대하여, 다른 방법들을 응용 및 적용하는 등의 보다 세심한 연구가 필요하다고 판단된다.



(a)



(b)



(c)

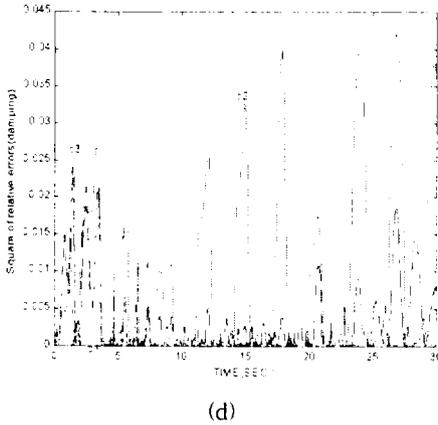


Fig. 3. System identification subjected to earthquake load: (a) Comparison of actual stiffness and calculated stiffness, (b) Comparison of actual damping coefficient and calculated damping coefficient, (c) Magnitude of calculated error(stiffness) (d) Magnitude of calculated error(damping coefficient)

### V. 결 론

최근 들어 구조물에 대한 유지 관리 차원에서 시스템의 물성치에 대한 시스템 인식에 관한 연구들이 많이 진행되고 있다. 지진동 하에서 구조물의 부재들은 일정한 강성과 감쇠를 유지하는 것이 아니라 지진동 동안 구조물은 손상을 입게 되며, 궁극적으로 다른 물리적인 특성을 나타내게 된다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 손상 하에 구조물의 물성치를 실시간으로 추적하는 방법을 제시하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 구조물 최초의 물성치와 실시간으로 추적되는 실제 물성치 간의 차이에 의한 이차형의 목적 함수를 최소화하여 실시간 시스템 인식의 추적 방법을 수식으로 제안하였으며, 그 적용은 매우 간편하며, 용이함을 보였다.

(2) 제시된 방법은 가정된 가중 행렬에 영향을 받았다. 또한 적절한 가중 행렬의 선정은 제시된 방법의 타당성과 관련되나, 실제로 적절한 가중 행렬의 선정 자체에 어려움이 있다.

(3) 대부분의 물리적인 현상은 주어진 식만에 의해 설명될 수 없으므로 가중 행렬을 사용하게 된다. 본

연구에서도 가중 행렬을 사용하였으나, 이를 구체적으로 규명할 수 없었으며, 이에 대해 실시간으로 변동하는 가중 행렬의 선정이 필요하며, 이는 향후의 연구과제로 남긴다.

### 참고문헌

- 1) S.F. Masri, R.K. Miller and A.F. saud, 1987a, Identification nonlinear vibrating structures: part I-applications., J. Appl. Mech. Vol. 54, pp.918-922.
- 2) S.F. Masri, R.K. Miller and A.F. saud 1987b, Identification nonlinear vibrating structures: part II-applications., J. Appl. Mech. Vol. 54, pp. 923-929.
- 3) M. Hoshiya and E. Saito, 1984, Structure identification by extended Kalman filter, J. Eng. Mech. ASCE, Vol. 110(12), pp. 1757-1770 .
- 4) R.E. Kalman and R.S. Bucy, 1961, New results in linear filtering and prediction theory, J. Basic Engng, ASME, Vol. pp.83, 95-108.