



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

석사학위논문

분수와 나눗셈에 대한 초등학교 수학의  
개념 이미지 분석

Analyzing 'Concept Image' about fractions and  
divisions in Elementary school mathematics

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

신 성 희

2011년 8월





석사학위논문

분수와 나눗셈에 대한 초등학교 수학의  
개념 이미지 분석

Analyzing 'Concept Image' about fractions and  
divisions in Elementary school mathematics

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

신 성 희

2011년 8월

분수와 나눗셈에 대한 초등학교 수학의  
개념 이미지 분석

Analyzing 'Concept Image' about fractions and  
divisions in Elementary school mathematics

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

신 성 희

2011년 7월

신성희의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 인

심사위원 인

심사위원 인

제주대학교 교육대학원

2011년 8월

## 목 차

국문 초록 .....	1
<b>I. 서론 .....</b>	<b>1</b>
1. 연구의 필요성 및 목적 .....	1
2. 연구 문제 .....	3
3. 용어의 정의 .....	3
4. 연구의 제한점 .....	4
<b>II. 이론적 배경 .....</b>	<b>5</b>
1. 개념에 대한 이론 고찰 .....	5
2. 분수와 나눗셈의 의미 분석 .....	10
3. 수학적 언어 표현 .....	16
<b>III. 연구의 실제 .....</b>	<b>21</b>
1. 연구 방법 및 절차 .....	21
2. 검사 도구 .....	21
3. 검사 실시 .....	24
4. 분석 기준 수립 .....	25
5. 학생들의 개념 이미지 분석 .....	25
<b>IV. 결론 및 제언 .....</b>	<b>45</b>
참고 문헌 .....	47
ABSTRACT .....	49
부 록 .....	51

## 표 목 차

<표 Ⅲ-1> 분수 개념 이미지 유형 분석 .....	25
<표 Ⅲ-2> 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석 .....	29
<표 Ⅲ-3> 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석 .....	30
<표 Ⅲ-4> 분수의 곱셈 개념 이미지 유형 분석 .....	33
<표 Ⅲ-5> 자연수끼리의 나눗셈의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석 .....	35
<표 Ⅲ-6> 자연수끼리의 나눗셈의 표상 방법 유형 분석 .....	35
<표 Ⅲ-7> (분수) $\div$ (자연수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석 .....	38
<표 Ⅲ-8> (분수) $\div$ (자연수)의 표상 방법 유형 분석 .....	39
<표 Ⅲ-9> (진분수) $\div$ (진분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석 .....	41
<표 Ⅲ-10> (진분수) $\div$ (진분수)의 표상 방법 유형 분석 .....	41
<표 Ⅲ-11> (자연수) $\div$ (분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석 .....	43
<표 Ⅲ-12> (자연수) $\div$ (분수)의 표상 방법 유형 분석 .....	44

## 그림 목 차

[그림 II-1] 개념 정의와 개념 이미지 .....	6
[그림 II-2] 개념 이미지와 개념 정의의 상호 작용 .....	7
[그림 II-3] 형식적 개념 이미지의 형성 .....	8
[그림 II-4] 정의와 이미지 사이의 상호 작용 .....	8
[그림 II-5] 순수한 형식적 추론 .....	8
[그림 II-6] 직관적 사고를 따르는 연역 .....	9
[그림 II-7] 직관적 반응 .....	9
[그림 II-8] 모양이 달라 크기가 다르다고 생각하는 등분 .....	11
[그림 II-9] 넓이 비교 과제 .....	12
[그림 II-10] 상대적인 크기 비교 .....	14
[그림 III-1] 학생이 작성한 1차 질문지 .....	22
[그림 III-2] 학생이 작성한 2차 분수 개념이미지 질문지 .....	23
[그림 III-3] 2차 나눗셈 개념이미지 질문지 .....	24
[그림 III-4] 그림 표상 .....	26
[그림 III-5] 언어 표상 .....	26
[그림 III-6] 그림과 언어 표상 .....	26
[그림 III-7] 직사각형 그림 .....	27
[그림 III-8] 원 날개 그림 .....	27

국문초록

분수와 나눗셈에 대한  
초등학교 수학의 개념 이미지 분석

신 성 희

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공  
지도교수 최 근 배

학생들은 개념을 정립하기 위해 여러 가지 조작이나 활동을 거치며 심상과 경험을 구성하게 되는데 이 때, 개념 명칭과 관련하여 개인이 기존의 경험 등과의 결합을 통해 형성하게 되는 비언어적인 것을 개념 이미지라고 한다. 학생이 형성한 개념 이미지는 학생들의 수학 학습에서 문제 해결의 근거가 될 수도 있고, 다른 개념을 구성하는 데 활용될 수 있다. 학생들이 실제로 형성하게 된 다양한 개념 이미지의 유형을 분석하여 학생들의 수학 개념 학습 과정의 메커니즘을 이해하며, 오개념의 형성도 줄일 수 있는 방안이 필요한 실정이다.

이에 본 연구는 수학 내용 중에서 분수와 나눗셈에 관한 개념 이미지를 2차에 걸쳐 질문지를 만들고 그 질문지를 학생들에게 투입하여 각 문항별로 개념 이미지를 분석하였다.

분수의 개념 이미지는 대체로 전체와 부분의 의미로 직사각형이나 원을 등분하여 색칠함으로써 표현하는 경우가 대다수였다. 그 외에도 비의 개념이나 몫의 의미로서의 분수의 개념을 표상하기도 하였다.

나눗셈의 개념 이미지는 등분제보다는 포함제로 나타내는 경우가 비율 상 많았다. 특히나 분수의 개념 자체가 전체와 부분의 관계로 추상적이기 때문에 분수의 나눗셈 상황을 이미지화시키는 것에서는 많은 학생들이 오개념을 지니고 있는 것으로 나타났다.

분수와 나눗셈의 개념 이미지를 분석한 결과 학생들은 교과서에 제시된 개념 정의를 변형시키거나 자신의 것으로 재해석하여 다양한 개념 이미지를 만들어 내고 있음을 알 수 있었다. 그리고 대체로 그림으로 개념 이미지를 표상하나, 그림만으로 설명이 안 될 때는 그림과 언어를 동시에 사용하기도 하였으며 교육과정 상 뒤로 갈수록 개념의 확장이 이루어져 학생들이 개념 이미지를 나타내는데 어려워했다.

분수와 나눗셈 개념은 초등학교 학생들의 인식 수준에서는 형상화하기 어려운 개념이다. 이들의 개념 이미지를 연구해봄으로써 학생들이 분수와 나눗셈에 대해 구성하는 다양한 개념 이미지 양상을 알 수 있었고 앞으로 학생들의 다양한 개념 이미지에 맞게 여러 가지 방법으로 개념을 설명하고 예를 들어주며 절차적인 공식이나 지식보다는 과정 중심의 학습으로 구성해나갈 수 있어야 할 것이다.

# I. 서론

## 1. 연구의 필요성 및 목적

수학 내용은 현실적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 취급하기 때문에 초등학교 학생들에게는 어렵게 느껴지기 마련이다. 그러므로 초등학교 수학 교육은 내용을 연역적 방법이나 추상적인 방법으로 이해하기 보다는 학생들이 느낄 수 있는 현실에서 직관이나 구체적인 활동 등을 통해 점진적으로 추상화 과정을 거치도록 도와주어야 한다. 이러한 관점에서 제7차 개정 교육과정 교과서는 실제 상황과 구체적 활동 중심으로 짜여져 있는 것을 알 수 있다.

그러나 학생들은 개념을 이해할 때, 현실에서 직관하거나 구체적인 조작 활동을 하여 정의한 교과서 개념 정의를 곧바로 이용하여 개념을 정의하기 보다는 현실과 개념의 중간 개념으로 스스로 개념을 만들어 나간다. Skemp(1987)에 의하면 수학적 개념 형성은 수학 학습의 기본이 되는 것이므로 학습자 자신의 마음속에서 일어나야 하며 학습자에게 강요할 수도 없고 대신해 줄 수도 없는 것으로서 교사가 할 수 있는 최선의 것은 수학적 개념을 바르게 형성할 수 있도록 도와주는 일이라고 하였다. 개념 학습은 이렇게 교사가 원하는 방식대로 학생들에게 심어질 수 있는 것이 아니다.

Vinner(류희찬 역, 2003)에 의하면, 수학에서의 개념은 주로 정의에 의해 획득된다고 하였다. 그러나, 개념에 대한 정의를 암기하는 것으로 그 개념을 이해했다고는 할 수 없다.(Vinner, 1991) 학생들은 개념을 정립하기 위해 여러 가지 조작이나 활동을 거치며 심상과 경험을 구성하게 되는데 이 때, 개념 명칭과 관련하여 개인이 기존의 경험 등과의 결합을 통해 형성하게 되는 비언어적인 것을 개념 이미지라고 한다. 개념이 시각적 표상을 갖는 경우, 개념 이미지는 시각적 표상일 수 있으며, 인상이나 경험의 집합체일 수도 있다. 개념 명칭과 결합된 시각적 표상, 심상, 인상, 경험은 언어의 형태로 번역될 수 있다. 이렇게 형성된 개념 이미지는 학생들의 수학 학습에서 문제 해결의 근거가 될 수도 있고, 다른 개념을 구성하는 데 활용될 수 있다.

초등학교 수학 교육 목표중 하나가 개념 형성임에도 불구하고, 그러한 개념 형성 학습보다는 문제 풀이 식에 급급한 교수·학습이 이루어지는 것이 지금의 현실이다. 학생들은 교과서에 나오거나 선생님이 알려주는 개념 정의를 암기하는데 시간을 투자하고 스스로 수학적 개념을 형성하는 데 전력을 다하지 않는다. 그리고 가지고 있는 수학 개념을 표상(representation)하는 것에도 매우 서툴다.

표상은 학교 수학을 위한 원리와 규준에서 제시된 다섯 가지 수학적 과정(문제해결, 추론, 연결성, 의사소통, 표상) 중의 하나(NCTM,2000)이며 그것은 또한 수학학습 활동 중에 일어나는 어떤 절차를 나타내는 것 이상으로 수학의 교수와 학습에 관한 한 방법으로 볼 수 있다. 뿐만 아니라 교사의 측면에서 보면 아이들이 해 놓은 표상을 통해서 수학에 관해 아이들이 어떻게 이해하고 사고하고 있는가를 꿰뚫어 볼 수 있는 중한 자료가 될 수 있다.(최창우,2002)

학생들이 실제로 형성하게 된 다양한 개념 이미지의 유형을 분석하여 학생들의 수학 개념 학습 과정의 메커니즘을 이해하고, 오개념의 형성도 줄일 수 있을 것이다. 즉, 학생들은 교사나 교과서의 언어적 진술과 시각적 설명을 통하여 수학 개념을 형성하게 되며, 교사는 직접적으로 학생이 구성한 개념을 볼 수 없으므로 학생이 표현한 개념에 대한 정의나 설명을 통해 학생이 구성한 개념을 판단하고 교정할 수 있다. 교사가 학생들이 겪는 인지적 갈등 상태를 파악할 수 있고, 특정한 인지체계에 대한 지식을 가지고 있다면 학생의 반응을 보다 잘 감지할 수 있고, 학생의 갈등 요인을 표면으로 드러내어 갈등을 해결하는 시작으로 삼을 수 있다. 이러한 측면에서 학생들이 갖고 있는 개념 이미지를 파악하는 것은 학생들의 개념 이해를 돕고 잘못된 개념 이미지를 형성하는 교육 방법을 개선하기 위한 시사점을 줄 수 있을 것으로 본다. (김미령, 2004)

개념 이미지에 대한 앞선 연구들을 살펴본 결과 초등학교 수학의 개념 이미지 연구는 지극히 드물었으며, 기하 영역에 치중한 연구들이 많은 것으로 보인다. 그러나 초등학교에서는 도형 영역에서 비교적 많은 표상 활동이 이루어지기 때문에 본 연구에서는 수와 연산 영역 중에서 '분수'와 '나눗셈'에 대한 개념 이미지를 분석해보고자 한다. 또, 학생들의 개념 이미지를 분석한 결과를 통해 개념 학습 과정에서의 시사점을 도출하도록 하겠다.

## 2. 연구 문제

본 연구에서는 초등학교 수학에서의 '분수'와 '나눗셈'에 대한 학생들의 수학 개념 이미지를 분석하고, 학생들의 다양한 개념 이미지를 통해 초등 수학 교육에 있어서 학생들의 개념 학습 과정의 시사점을 도출해보고자 한다.

가. 초등학교 학생들의 분수 개념 이미지를 분석한다.

나. 초등학교 학생들의 나눗셈 개념 이미지를 분석한다.

다. 학생들의 개념 이미지를 분석하여 개념 학습 과정에서의 시사점을 도출한다.

## 3. 용어의 정의

가. 개념 이미지(Concept image)와 개념 정의(Concept definition)

개념 명칭을 보거나 들을 때 그것은 우리의 기억을 자극한다. 개념 명칭에 의해 우리의 기억 속에 무엇인가가 떠오른다. 일반적으로 그 개념이 정의되어 있더라도 떠오르는 것은 개념 정의가 아니다. 떠오르는 것은 소위 개념 이미지(concept image)라고 한다. (Tall&Vinner, 1981; Vinner,1983) 즉, 개념 명칭과 결합된 시각적 표상, 심상, 인상이나 경험의 집합체를 언어한다.

Vinner(1983)는 비순환적인 방법으로 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의(verbal definition)를 개념 정의라고 하였다. 이 개념 정의는 공식적인 수학 이론의 바탕을 이루는 것으로 공적 개념 정의라고 할 수 있다.

본 연구에서는 개념 이미지란 개념의 시각적 표상 또는 언어적 표현 등을 언어하고, 수학을 가르치는 데 필요한 개념을 명확히 설명한 것을 개념 정의라고 한다.

#### 나. 표상(representation)

표상이라는 용어는 과정과 결과(product) 양쪽 모두에 관련된다고 할 수 있다. 다시 언어해, 어떤 형태로 수학적 개념이나 혹은 관계를 획득하는 행위와도 관련된다. 더욱 나아가, 표상은 수학을 행하는 인간의 마음 속에서 내적으로 일어나는 과정 및 결과는 물론이고 외적으로 관찰할 수 있는 것에도 적용된다.

본 연구에서는 외적으로 드러나는 학습자의 기록을 언어한다.

### 4. 연구의 제한점

가. 본 연구는 제주시의 한 초등학교를 대상으로 하는 것이므로 다른 지역에서는 다른 결과를 기대할 수도 있다.

나. 학생들의 작성한 개념이미지 질문지를 해석하여 일반화 하는데는 한계가 있을 수 있다.

다. 본 논문에서 보이는 분수와 나눗셈의 개념이미지 유형은 학생들의 구성한 개념이미지 유형을 모두 보였다고 단정 짓기는 어렵다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 개념에 대한 이론 고찰

초등학교 수학은 개념 형성에 그 목표를 두고 있다. 수학적 정의를 통해 학생들에게 심어진 개념은 또 다른 개념을 학습하는데, 혹은 수학의 과정에서 수학적 언어로 작용하면서 문제 해결의 근거가 되기도 한다.

배종수(2002)에 따르면 수학적 개념은 순수 수학에서 활용되는 용어가 아니고 수학 교육에서 활용되는 용어임을 알 수 있다. 수학적 개념은 수학에서 논의하는 용어보다는 수학을 학생들에게 가르치면서 발생할 수 있는 수학 교육의 용어로 보아야 한다고 하였다.

#### 가. 개념 형성

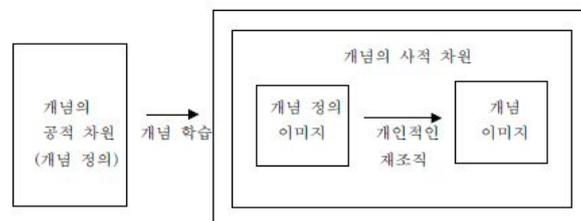
어떤 개념을 획득하는 것이 그 개념에 대한 개념 이미지를 형성하는 것이라고 가정하였을 때, 개념 정의를 암기하여 알고 있다고 해서 개념을 이해했다고 볼 수는 없다. 이해한다는 것은 그 개념 이미지를 갖는 것이라 할 수 있다. 어떤 의미는 단어와 결합되어야만 한다. 예를 들어, 어떤 주어진 집합의 멱집합이 그 집합의 모든 부분집합의 집합이라는 것을 안다고 할 때, 주어진 집합의 멱집합을 구성해 보지 않는 한 이것은 아무런 의미도 없을 것이다. 그러므로 멱집합의 개념 이미지에는 실제로 멱집합을 구성하는 것에 대한 기억이 포함되어야 한다.

집, 오렌지, 고양이 등과 같은 일상생활 속에서 사용되는 대부분의 개념은 정의와 별 상관없이 획득된다. 반면에 어떤 개념은 정의에 의해 도입된다. ‘숲’이라는 단어를 아동들에게 “아주 많은 나무가 함께 있는 것”이라고 설명해 줄 수 있다. 이와 같은 정의는 개념 이미지의 형성을 돕는다. 그러나 이미지가 형성되는 순간 정의는 별 도움이 안 된다. 고려중인 개념에 관한 내용을 다룰 때, 정의는 사용되지 않거나 심지어 잊혀 지기조차 한다. 따라서 개념 형성에서 정의의 역할은 비계에 비유될 수 있다. 건물이 완성되는 순간 비계는 제거된다. (류

희찬, 2003)

#### 나. 개념 이미지와 개념 정의

개념 정의는 크게 학문적, 사회적 의미의 언어로 진술되어 공식적으로 사용되는 공적 차원의 개념 정의(formal concept definition)와 개인적 차원에서 재해석되고 수용된 사적 차원에서의 정의(private concept definition)로 나눌 수 있다. 수학은 기본 개념과 공리에서 시작하는 연역적 이론이기에 기본 개념에 의해 다른 모든 개념들이 정의되고, 공리가 아닌 모든 정리 또한 추론 규칙에 따라 공리로부터 증명을 해 나가는 순서를 밟게 된다. 이렇듯 수학의 논리적·연역적 기본이 되는 개념의 정의를 공적 개념 정의라 할 수 있다(한길준, 우호식, 2001). 공적 차원의 정의는 간단히 개념 정의로 언어할 수 있으며 여러 사람들이 의사소통할 때 모두 인정하여 받아들일 수 있는 것이며, 그것을 바탕으로 연역적인 결과를 도출해 낼 수 있고, 정해진 어떤 것을 지명할 수도 있다. 그에 반하여 사적 차원의 정의는 주어진 개념의 정의와 연관되어 개인의 인지구조 내에서 형성되는 심상(mental picture)들로 지극히 개인적이며 고정되어 정해진 것이 아니라 변화, 발전해가는 어떤 것이라고 볼 수 있다. 학생들은 이 개인적인 심상을 문제를 해결하고, 예와 반례를 구분하는데 사용하고, 이것으로 학생들 스스로가 개념을 소유하고 있는가의 여부를 판단하는 기준으로 삼는다(김미령, 2004). 개념 학습은 이렇게 교과서나 교사의 설명을 통해 제시된 개념의 공적 차원인 개념 정의를 통해 이루어지고, 이렇게 형성된 개념 정의 이미지는 개인적인 재조직을 통해 '개념 이미지'가 형성된다. 이렇게 형성된 이미지는 학생들이 수학 활동을 하는데 문제 해결이나 의사소통의 근거가 된다.

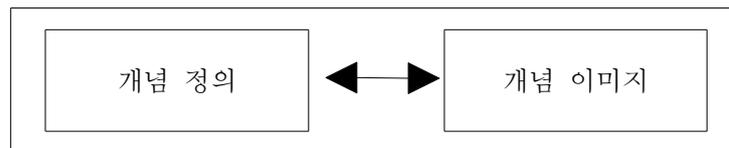


[그림 II-1] 개념 정의와 개념 이미지

전문적 상황에서는 정의가 아주 중요한 역할을 한다. 정의는 개념 이미지를 형성하는 것을 돕는 것은 물론이고 인지적 과제를 해결하는 데 결정적인 역할을 하기도 한다. 정의는 개념 이미지로 인한 많은 함정을 피해 갈 수 있게 하는 잠재력을 지닌다.

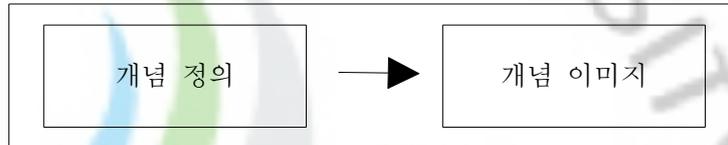
따라서 전문적인 상황에서는 일상생활과는 전반적으로 다른 사고 습관이 학생들에게 필요하다. 적어도 학습 과정의 초반에서는 일상생활에서의 사고 습관이 전문적인 상황에서의 사고 습관보다 우세하리라고 예측할 수 있다. Vinner는 함수, 접선, 극한 개념을 소재로 한 설문조사를 통해 개념 정의를 필요로 하는 전문적 상황에서 대부분 학생들이 정의를 사용하지 않고 개념 이미지에 의존하여 인지적인 과제를 수행함을 밝히고 있다.

Vinner는 인지 구조 내에 두 종류의 서로 다른 세포(이것은 생물학적 세포를 의미하지 않는다)가 존재한다고 가정하였다. 하나는 개념 정의를 위한 것이고 나머지는 개념 이미지를 위한 것이다. 하나 또는 두 세포 모두가 비어 있을 수도 있다(개념 명칭에 어떤 의미가 결합되어 있지 않으면 개념 이미지 세포는 비어 있는 것으로 간주하며 이것은 의미 없는 방법으로 개념 정의를 기억하는 상황에서 주로 일어날 수 있다). 비록 독립적으로 형성될지라도 두 세포 사이에 상호작용은 있을 수 있다.(류희찬, 2003)



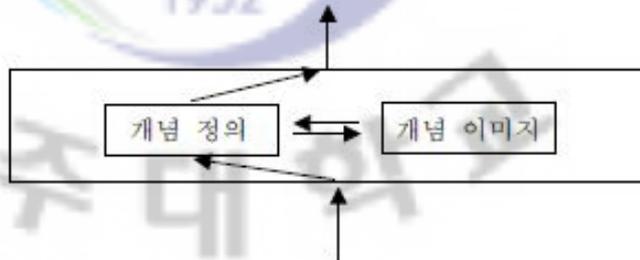
[그림 II-2] 개념 이미지와 개념 정의의 상호 작용

개념 이미지는 개념 정의의 모든 측면을 반드시 반영하지는 않는다. 그러나 많은 교사들은 개념 정의가 학생들에게 바로 개념 이미지로 자리 잡을 것으로 여기고 있다. 즉, [그림 II-3]처럼 개념 이미지가 개념 정의에 의해 형성되고 통제될 것이라고 생각한다.

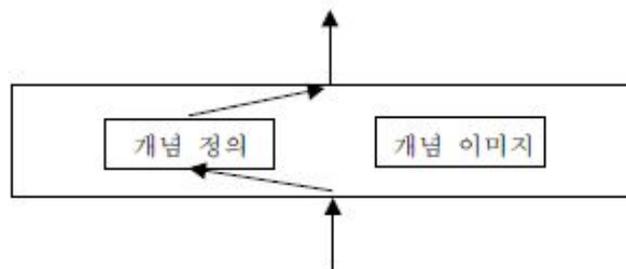


[그림 II-3] 형식적 개념 이미지의 형성

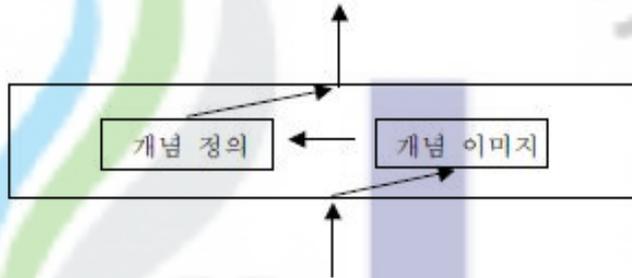
개념 형성 과정뿐만 아니라 문제 해결이나 과제 수행 과정에서도 교사들은 학생들의 인지적 과정이 다음과 같은 세 가지로 일어날 것이라 생각한다.



[그림 II-4] 정의와 이미지 사이의 상호 작용



[그림 II-5] 순수한 형식적 추론



[그림 II-6] 직관적 사고를 따르는 연역

이러한 모든 과정은 전문적인 상황에서 문제가 제기 되었을 때, 개념 정의와 개념 이미지의 연합 체계가 어떻게 반응하더라도 개념 정의를 고려하기 전에는 답을 형식화하기 어렵다고 보는 점이다. 그러나 이러한 교사들의 이상적인 반응을 학생들이 해주는 것은 어렵다. 오히려 학생들에게 일어나는 수학적 과정은 직관적 반응이다.



[그림 II-7] 직관적 반응

여기서 개념 정의 세포는, 비어 있지는 않더라도 문제 해결 과정 동안 작동하지 않는다. 일상생활에서의 사고 습관이 강하게 남아 있어서 형식적 정의를 고려할 필요가 없다. 대부분의 경우 개념 이미지 세포만 적용해도 성공할 수 있다. 그렇기 때문에 사람들은 개념 정의 세포를 적용하려 들지 않는다. 불완전한 개념 이미지로는 틀리기 쉬운 비정형적인 문제의 경우만 개념 정의를 적용한다. 그런 문제들은 흔하지 않으며 그런 문제가 주어지면 학생들은 부당한 문제라고 생각한다. 따라서 원리상, 전문적인 상황을 해결하는 데 부적절한 일반적인 사

고 습관을 변화시키기는 대단히 어렵다. 본 연구에서는 학생들이 수학적 과정에서 떠올리는 개념 이미지를 분석하여 개념 정의와의 관계와 앞으로의 초등 수학 교육의 방향에 대한 시사점을 도출해보고자 한다.

## 2. 분수와 나눗셈의 의미 분석

### 가. 분수의 의미별 분석

분수 개념은 여러 가지 의미를 지니고 있다. 많은 수학자들은 분수의 의미를 여러 가지로 제시하였는데, 그 중 본 연구에서는 전체-부분, 몫, 비, 연산자, 측도 개념으로 의미를 나누어 살펴보고자 한다.

#### 1) 전체-부분의 의미

전체-부분의 의미는 분수 개념에서 가장 기초적이고 중용한 개념이며, 분수 개념을 도입할 때 가장 자연스러운 방법이다. 전체에 대한 부분을 분수 기호로 나타내는 능력은 연속량이나 이산량을 같은 크기를 갖는 부분이나 집합으로 분할하는 능력과 관련되고 이것은 나중에 분수를 읽는데 중요한 역할을 한다. 또한 전체-부분 관계가 중요한 것은 무엇보다, 전체에 대한 부분의 관계를 양화함으로써 분수 개념을 기를 수 있으며, 분수의 양적인 개념은 크기비교, 동치분수, 연산학습을 의미 있게 하는 데 중요한 역할을 하기 때문이다. 자연수 개념 발달에서 세기 전략이 중요한 것과 마찬가지로 부분-전체 관계의 인식을 위한 기초로서 분할 활동이 주용하며, 학생들이 다양한 분배 상황을 경험하게 해야 한다.(2005, 최영주)

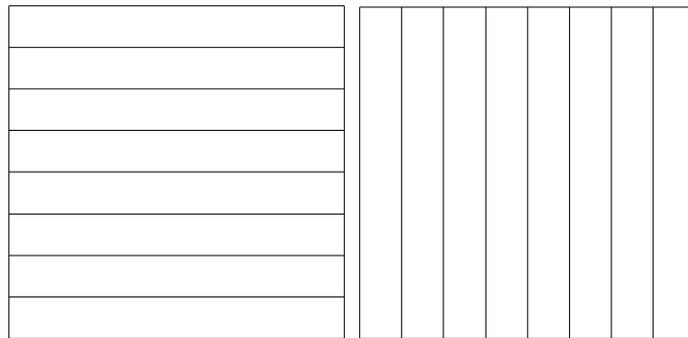
학생들이 성공적인 분할을 하기 위해서 필요한 인지구조와 관련하여 Piaget, Inhelder, Szeminska(1960)는 아동들이 분수를 이해하려던 다음과 같은 7가지의 특성을 인식할 수 있어야 한다고 주장하였다.

- ① 전체는 분할될 수 있다.
- ② 분수는 부분의 수를 의미한다.
- ③ 분할은 끝까지 남김없이 해야 한다.

- ④ 부분의 수와 분할 회수 간에는 일정한 관계가 있다.
- ⑤ 분수는 부분인 동시에 분할될 수 있는 전체이다.
- ⑥ 전체는 분할해도 보존된다.
- ⑦ 모든 부분은 크기가 같다

Hiebert와 Tonnessen(1978)은 Piaget 등의 7가지 개념이 연속량뿐만 아니라 이산량에서도 적용될 수 있는지 확인하기 위하여 연구를 반복한 결과, 이산량의 경우에 아동들은 하나씩 분할하기 또는 세기 전략을 사용했으며, 연속량에서도 길이 분할과 넓이 분할은 다른 양상을 보였다. Piaget등은 부분-전체 관계에 대한 이해가, 전체에 대한 부분을 가늠함으로써 분할 결과를 짐작하는 이른바 “예측 스킴(anticipatory scheme)” 의해 좌우된다고 하였는데 이것은 이산량이나 연속량에 모두 적용되는 것이다.

Pothier와 Sawada(1983)는 유치원에서 3학년까지의 학생들을 대상으로 한 연속량 분할 기능에 관한 연구에서 분할 능력은 4단계를 거쳐 발달해 간다고 밝히고 있다. 첫 번째 단계 반으로 분할하기, 분할과정에서 가장 먼저 나타난다. 두 번째 단계에서는 이등분을 반복함으로써 2의 거듭제곱으로 분할할 수 있게 된다(2,4,8,16등분...). 이 때 크기를 같게 분할해야 한다는 인식이 더욱 요구된다. 세 번째, 짝수개로 분할하는 단계에서는 반복적인 이등분을 능가할 수 있어야 한다. 이 단계의 공통적인 오류는 [그림 II-8]처럼 모양이 같지 않으면 그 크기도 다르다고 생각하는 것이다.

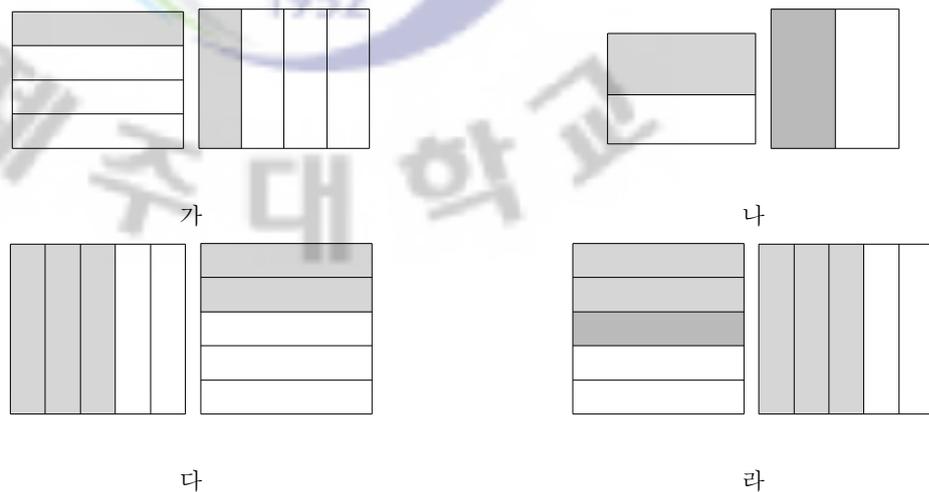


[그림 II-8] 모양이 달라 크기가 다르다고 생각하는 등분

네 번째, 홀수개의 분할인데, 홀수개로 분할하기 위해서는 이등분에 기초하지 않는 다른 분할 절차를 필요로 한다. 이 단계에서 이르지 못하면 많은 경우 반복적인 시도에도 불구하고 주어진 것의 분할 단위를 가늠하지 못한다.

부분과 전체 관계에 대한 이해는 적절한 분할 경험을 통해, 하나의 전체를 분할한 부분의 개수와 그 크기 사이의 상보적인 관계를 관찰함으로써 가능하며 (Bejr, Lesh, Post, & Silver, 1983), 역으로 분할에 성공하기 위해서는 부분-전체 관계가 예측 가능해야 한다.

Armstrong과 Larson(1995)이 4,6,8학년을 대상으로 [그림 II-9]와 같은 과제를 주고 넓이 비교 전략을 조사한 결과, 많은 학생들이 과제에 내재하는 부분-전체 관계를 인식하지 못하고 시각적으로 직접 비교하는 전략을 사용하는 것으로 나타났다.



[그림 II-9] 넓이 비교 과제

4학년은 직접 비교 전략을 선호하였으며, 분수 기호를 제시했을 때도 여전히 직접 비교 전략을 사용했고, 6,8학년은 유리수에 주어진 수업 시간이 많음에도 불구하고 부분-전체 관계를 사용하여 문제를 해결하는 학생의 수가 그리 많지 않았다고 밝힌다.

부분-전체 관계를 이러한 형태의 비교 과제에 응용하기 위해서는 전체의 크기와 분할 수가 같은지, 그 중 얼마만큼이 칠해져 있는지 등의 정보들을 종합하여야 하는데, 직접 비교 전략을 사용하는 학생들은 부분-전체 관계를 생각하지 못

하고 지각적인 조건만을 생각한다. 결과적으로 학생들은 부분을 전체와 분리해서 생각하고 단순히 부분만을 시각적으로 가늠하여 비교하게 된다.

많은 학생들은 분수를 부분-전체의 표상이나 비교할 수 있는 양으로 이해하지 못하고, 분수가 칠해진 부분에 이름을 붙인 것이라고만 생각한다. Figueras, Filloy와 Valdemoros(1987)등은 11-13세 아동들에게 그림을 제시하고 분수를 쓰거나 주어진 분수에 맞게 주어진 그림을 완성하는 문제를 제시하고 그들의 반응을 분석하였는데, 여기에서 가장 많이 나타나는 전략은 부분의 개수 즉 분자에 주의를 집중함으로써 분모를 무시하거나 임의로 바꾸고 분자와 분모를 별개로 다루는 것이었다. 이들은 또 분할에서 어려움을 느끼고 부분의 크기가 다르다는 것을 인식하지 못하였으며 경우에 따라서는 분모에 집중하기도 하였다.

Zeman(1991)은 분수의 상대적인 크기와 분수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서 부분-전체 도식(schema)이 기여하는 바에 대해 설명하면서, 분수의 개념화에 있어서 부분-전체 개념을 강조하였다.

Hugnting과 Korbosky(1990)의 연구에서는 학생들이 연속량보다 이산량에서 부분-전체를 더 잘 인식하는 것으로 나타났다. 이산 상황이 쉽다고 생각하는 주된 이유는 날개로 되어 있어서 개수를 세어 나타내기가 수월하다는 것이다. 하지만, 전체-부분에 대한 관계를 이산 상황에서만 학습하다 보면, 부분과 전체 대신, 부분과 부분이라는 비의 개념으로 잘못 표상되어 오류를 야기하는 원인이 되기도 한다.

Hunting은 연속 상황에서 분수에 대한 이해가 이산 상황에서 설정된 문제를 이해하고 해결하기 위한 선행 요건이라고 생각하며, 연속량 상황에서의 분할은 부분-전체 구조에서 전체를 1로 보는 것이 용이하므로 이산적인 분할 상황보다 이해하기가 쉽기 때문에 분수 개념을 도입할 때 연속량을 사용하는 것이 바람직하다고 지적한다.

학교에서 사용하는 대부분의 분수 모델은 학생들이 이미 분할되어 제시되어 직접 조작해 볼 수 있는 기회를 거의 갖지 못하며 연속량 상황을 주로 다루고 있다. 이와 같은 상황에서는 분수 개념에 대한 이해가 매우 제한적일 수밖에 없다(Witherspoon,1993). 그러므로 학생들은 다양한 형태의 모델(여러 가지 구체물, 그림, 수직선 등 이산모델, 넓이 모델, 길이 모델 등 연속모델)을 이용해서

분할 활동을 해 보아야 한다. 또, 여러 가지 방법으로 분할할 수 있다는 것을 경험하고, 모양이나 배열은 다르지만 크기는 같다는 것을 인식할 수 있어야 한다.(최영주, 2005)

#### 2) 몫의 의미

유리수를 나눗셈의 결과로 해석하는 것이다. 정수에서의 나눗셈은 피제수가 제수보다 작거나 둘 사이의 공배수가 없을 때는 나머지 없이 그 결과를 나타낼 수 없다. 이런 경우에 그 결과를 몫으로 나타낼 수 있도록 확장시킨 것이 유리수의 몫의 의미이다. 즉, 유리수  $\frac{a}{b}$ 는  $a \div b$ 의 의미로 쓰인다. 나눗셈에는 등분제와 포함제가 있는데, 포함제 상황에서의 분수는 측정의 의미를 지니고 있다. 이에 반해, 등분제의 상황에서는 분수는 몫의 의미를 지니고 있다.

#### 3) 비의 의미

분수는 처음부터 크기를 측정하는 과정과 관련되어 있다. (Davydov et al., 1991). 측정과정에서의 분수는 단위(기준)에 대한 부분의 상대적인 크기를 나타내며 이것이 비를 의미한다. 비는 수라고 하기 보다는 비교 지표(comparative index)라고 하는 것이 더 정확하다. 등분할 상태를 나타낸 분수  $\frac{1}{2}$ 과  $\frac{2}{4}$ 는 그 뜻이 다르지만 두 양의 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미에서는 같은 수를 나타낸다. 또, 서로 다른 크기에서도 전체에 대한 부분의 상대적인 크기가  $\frac{1}{2}$ 과 같다고 생각할 수 있을 때 비의 개념을 이해한다고 볼 수 있다. 따라서 분수의 본질적인 개념을 이해하기 위해서는 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미를 이해하여야 한다.



[그림 II-10] 상대적인 크기 비교

#### 4) 측도의 의미

분수의 역사를 살펴보면, 분수는 배분 상황과 측정 상황에서 도입되었다. 단위로 주어진 양을 측정하였을 때, 단위로 측정하고 남은 부분을 나타내기 위해서 새로운 단위를 도입하여 원래의 단위와 나머지를 새로운 단위로 나타내면서 분수가 발생되었다. 어떤 막대의 길이를 재기 위해서는 적절한 단위가 필요하고 그 단위를 반복적으로 사용하여 측정 결과를 단위의 자연수 배로 나타낼 수 있을 때 그 단위를 반복적인 측도라고 한다.

예를 들어, 다음 그림에서 막대의 길이는 단위의 3배이다.

단위 :

막대 :

그러나 단위를 반복적으로 사용하여 측정 결과가 자연수 배인 경우는 드물다. 예를 들면, 주어진 단위의 정확한 자연수 배가 아닌 어떤 길이를 재는 경우, 학생들은 ‘3번하고 조금 더 된다’ 또는 ‘약 3번’이라고 어렵할 것이다.

단위의 자연수 배만큼 재고, 남은 부분을 재기 위해서는 처음에 재었던 단위보다 더 작은 단위가 있어야 할 것이다.

단위

단위의 3배와 남은 부분

단위를 3등분 하였더니 남

는 부분은 단위의  $\frac{1}{3}$

더 작은 단위로 재어야 한다는 생각은 단위가 나누어질 수 있는 것이라고 생각하는 데서 비롯된다. 등분할에 대한 인식이 여기에서 필요하다. 남은 부분의 길이를 재기 위해서는 단위 를 2등분한  단위로 재어보고 켤 수 없으면 의 단위로 켤다. 따라서 위의 재고자 하는 길이는 단위 길

이의  $3\frac{1}{3}$ 이다. 이와 같이 단위분수는 단위보다 작은 부분을 측정하는데 가장 기본적이다.

#### 5) 연산자 의미

연산자의 의미로서 분수는 유한 집합에서 유한 집합으로의 사상이나 유클리드 평면에서 유클리드 평면으로의 사상이라고 할 수 있다. 도형을  $\frac{p}{q}$ 만큼 축소, 확대시키거나, 한 집합을 그 집합의 원소의 개수의  $\frac{p}{q}$ 배한 다른 집합으로 줄이거나 늘이는 함수로서  $\frac{p}{q}$ 를 생각할 수 있다.

#### 나. 나눗셈의 의미 분석

NCTM standards(1989:김수미, 2004에서 재인용)에서는 수학의 내용과 강조점에 대한 변화를 요약하면서, 연산 영역에서는 특히 연산의 의미와 연산 감각 등을 강조하는 반면, 복잡한 지필 계산이나 이해에 기초하지 않은 절차의 암기 등을 지양하고 있다. 의미를 모르면서 절차를 반복하는 것은 이해라고 할 수 없다는 것이다.

연산의 의미를 이해하지 못한 아동은 자신이 암기한 절차에 따라 기계적으로 계산하게 된다. 이것은 단지 알고리즘에 따라 단계적으로 절차를 수행한 것일 뿐 연산을 했다고 보기 어렵다. 따라서 효과적인 나눗셈 연산이 되기 위해서는 나눗셈의 의미에 대한 이해가 필수적이다.

그리고 나눗셈의 의미에 대한 올바른 이해를 위해 나눗셈이 다른 연산들과의 관계도 인지할 필요가 있다. 나눗셈은 다른 연산들과 서로 관계를 맺고 있으며, 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대한 선행학습을 필요로 한다.(2004, 김수미)

본 논문에서는 구광조 외 5인(1995)이 제시한 나눗셈의 의미 및 동수누감으로의 나눗셈(배종수,1999)의 경우를 포함해 다섯 가지로 나누어서 나눗셈의 의미를 살펴보고자 한다.

#### 1) 곱셈의 역연산

$b \cdot x = a$ , 또는  $x \cdot b = a$ 에서  $x$  구하기를  $a \cdot b$ 로 본다. 이 정의는 나눗셈의 수학적 정의에 해당하는데 곱셈의 역연산 관계로 보는 관점이다. 이러한 관점은 곱셈식에서 승수와 피승수를 찾아 나눗셈의 몫을 알아보는 과정에 잘 나타나 있다.

#### 2) 등분제

$a$ 를  $b$ 등분하면 얼마씩이 되는가를  $a \cdot b$ 로 본다. 이 관점에서의 나눗셈을 등분제라고 한다.

등분제에서는 묶음이 미리 결정되어 있고 각 묶음에 들어가는 물체의 수를 구하게 되는데, 각 묶음에 들어가는 요소나 물건의 개수는 이 나눗셈에서 답이 된다.

#### 3) 포함제

$a$ 에는  $b$ 가 몇 번 포함되는가를  $a \cdot b$ 로 보는 것이 포함제이다. 이처럼 포함제에서는  $a$  묶음에 들어가는 물체의 수가 주어지고 그럼 묶음의 수가 모두 몇 개 인가를 구하게 되는데, 바로 묶음의 수가 답이 된다.

#### 4) 나머지가 있는 나눗셈

$a \cdot b$ 는  $a = (b \cdot q) + r$ 인 자연수  $q$ 와  $r$ (단,  $0 \leq r < b$ )을 구하는 것이다. 이 정의는 위의 것들과는 조금 다른 성격으로 보는 것이다. 이를테면  $32 \div 6$ 을 원소가 32개인 집합을 6개씩 줄을 만들면 어떻게 되느냐로 보는데, 이 경우에 물론 5줄을 만들고 2개가 남는다고 본다. 이때 5를 몫이라고 하며 2를 나머지로 보는 것이다.

#### 5) 동수누감으로서의 나눗셈

동수누감 접근이란  $a \cdot b$ 를 발견하기 위하여 나머지  $r$ 이  $b$ 보다 작게 될 때까지  $a$ 로부터 연속적으로  $b$ 를 뺀 횟수를 몫으로 구하는 것이다. 예로  $44 \div 13$ 을 동수누감으로 생각해 보면, 44에서 나머지가 13보다 작아질 때까지 빼는 것을 나타낸 것이다. 그러면 44에서 13을 3번 빼고 나머지는 5임을 알 수 있다. 따라서 44를 13으로 나누는 것은 몫이 3이고 나머지가 5인 것이다. 이것은 나눗셈을

반복된 뺄셈으로 간주할 수 있음을 보여준다.

### 3. 수학적 언어표현

수학적 개념은 실생활, 물체, 조작 자료, 그림, 언어, 기호 등 다양하게 표현될 수 있다. 인간의 사고 활동은 개념 형성에 기초하기 때문에 어떻게 형성되는가 하는 논의와 이 때 언어가 어떤 작용을 할 수 있는가 하는 논의는 매우 중요하다.

수학적 대상은 일부는 구체적이고 대부분은 추상적인 언어적 대상임이 수학적 개념을 이해하는 데 어려운 주요 요인이 되므로 수학적 개념을 학습시키는데 있어서는 용어의 사용에 신중을 기하여야 할 것이다. 용어의 특징이 구체적 참조물이나 예를 가지고 있고 그에서 추상된 것이라면 정의와 함께 구체적 참조물이나 예를 통한 이미지 형성이 큰 비중을 차지하게 될 것이며, 수학 내적으로 정의된 용어라면 구체적 실례보다는 언어적 정의와 그 추상성에 기초한 개념 구성에 비중을 두어야 할 것이다.

분수 학습에 있어서도 학생들이 분수를 어려워하는 원인 중 하나가 분수 언어 사용이라고 할 수 있다.

예를 들어 분수의 여러 가지 의미 중 비의 의미에서 학생들은 종종 언어표현에서 어려움을 겪어 답을 하지 못한다. '~은 ~에 대해'라는 표현에서 기준량을 무엇으로 봐야 할 지 알 지 못하여 문제를 해결하지 못하는 경우가 많다. 또한 복숭아 1팩에는 다음과 같이 복숭아가 3개 들어가 있다. 그렇다면 복숭아 1개를 팩으로 담는다면 몇 팩이라 할 수 있을까? 라는 문제 상황에서 출제자는 분명  $\frac{1}{3}$ 팩이라는 답을 정답으로 요구할지도 모른다. 하지만 이것은, 1팩이라고 할 수도 있다. 분명 복숭아 1개도 팩으로 담는다면, 복숭아 1개도 1팩으로 담을 수 있기 때문이다.

NCTM(1989) Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics 에 의하면, 학생들이 다양한 유의미상황-구체물, 그림, 기호표상에서 분수를 표상하고 이들을 융통성 있게 바꿀 수 있어야 한다고 언어한다. 수업에서 다양한 표현 양식을 사용하고 이런 양식들을 자주 서로 바꾸어 보게 하는 것은, 학생들

의 개념 이해를 돕고 더 복잡한 분수 개념을 구성하게 한다.

유리수 프로젝트(1983)는 구체와 추상을 연결할 수 있는 것으로 “언어”의 역할을 강조한다. 입으로 실현하는 「언어」과 그 「언어」를 글로 나타내어 보는 것은 구체물과 추상적인 사고를 연결해 주는 교량 역할을 한다. 예를 들어, 사과 둘 중에 하나, 또는 원을 둘로 나누고 칠은 한 것을 “이분의 일”이라고 입으로 언어하고 “이분의 일”이라고 써 보고, 이를 기호로  $1/2$ 로 나타내며, 마지막으로  $1/2$ 에 대한 추상적인 사고를 이끌어 내는 것이다.

기호, 그림, 언어뿐만 아니라 조작물(원형이나 직사각형 조각, 칼라, 칩, 종이 접기, 수직선, 퀴즈네어 막대, 도미노 등)을 사용하는 것은 분수 개념과 연산을 이해시키는데 매우 중요하다.

또한 수학적 기호는 수학적인 정신적인 활동을 이해하는데 영향을 미친다. 학생들이 개념의 의미를 충분히 이해하면 이를 효과적으로 나타내기가 위해서 기호를 사용하게 된다. 기호는 가장 추상적인 표현 체계로써 사고의 과정이나 결과를 반성하고 사고를 능률적으로 할 수 있게 하는 원동력이 되는 반면, 기계적인 처리를 하기 쉬운 특징이 있다. 그러므로 기호는 다른 표상의 번역과 변형이 충분히 이루어진 후에 도입되어야 하며, 필요한 경우 다른 표현양식과 함께 다루어져야 한다. 성급히 기호를 제시하거나 기호만 가지고 학습하면 수학적 아이디어나 의미는 도외시되고 피상적으로 기호를 다루게 되며 기호 절차를 단순히 암기하게 하는 결과를 초래한다. 기호를 사용하기 전에 구체물을 다루어 보고 언어나 그림으로 표현하며 이를 글로 적어 보는 활동이 충분히 이루어져야 한다. 수학적인 아이디어를 이해하고 기호의 의미를 알도록 촉진시키는데 구체물, 영상적 양식, 언어는 중요한 역할을 한다.

수학에서 기호와 의미의 연결은 물리적인 자료와 자료간의 활동과 상호작용을 바탕으로 한 것이다. 조작적인 보조물들은 문제 상황에 제시된 실제 생활과 추상적인 아이디어나 기호를 매개하는 역할을 한다. 물리적인 자료는 분수 개념 형성 뿐 아니라 오개념의 수정, 수학적 언어와 기호에 대한 의미습득을 촉진하는데 도움이 된다.

분수를 잘 이해하고 다양한 분수 이미지를 표현할 수 있게 하기 위하여 물리적인 상황은 다양하고 풍부해야 한다. 제한된 물리적 상황의 결과는 “표현의 고

착(representational rigidity)'을 낳는다(Silver, 1983). 예를 들면 분수  $2/3$ 을 나타내라고 했을 때 대부분의 학생들은 원이나 사각형을 그려서 세 등분을 하고 두 부분에 빗금을 그어서 나타내며 그 외에는 달리 표현을 하지 못한다.

아동들이 구체적인 보조물을 통해 얻게 되는 일화적인 경험은 일화에 관한 의미적인 정보와 관련될 때 유용하며, 그 과정에서 학습자들이 교사나 동료들과 하는 언어적인 상호작용은 중요한 역할을 한다. 수업에서 사용하는 언어는 '종이를 접어라' '구슬을 나누어라' '분수를 약분해라'와 같이 직접적인 기능을 하기도 하지만, 개념 형성이라는 측면에는 언어화는 표현적인 기능을 한다. Pimm(1994)은 '수학적 언어'를

- ① 수학 수업에서 교사와 학생들이 사용하는 대화언어,
- ② 수학 습득을 위해 특수하게 사용하는 수학적 언어,
- ③ 문장제나 그림 및 그 밖의 표상을 포함하는 교과서의 언어,
- ④ 기호 형태의 언어로 구분하고 있다.

수학의 언어는 다른 사람과 의사소통하기 위해 사용하는 언어뿐 아니라 혼자서 수학을 할 때 사용하는 '내적 스피치'를 포함하며, 이는 곧 수학에 대한 내적 이미지를 조절한다.

구체적인 수학적 아이디어의 이해를 돕고 이를 수학적 기호와 의미 있게 관련시킬 수 있는 것이 흔히 알려진 것처럼 영상의 양식만의 아닌 것은 분명하다.

그림이나 조작적인 자료가 사용된 문제를 해결할 때, 아동들은 문제에 제시된 분수를 쓰기 전에 자동적으로 미리 언어로 소리 내어 읽는 것을 볼 수 있다. 아동에게 매 번 제시된 분수를 입으로 말하게 하고 말한 것을 쓰게 하는 과정을 반복함으로써 기호의 의미를 잘 이해하게 되었다는 연구 결과가 있다(Behr et al. 1983)

### Ⅲ. 연구의 실제

#### 1. 연구 방법 및 절차

가. 연구 대상 : 제주특별자치도 제주시 일도2동 소재 I초등학교 6학년  
3개 반 100명

나. 연구 기간 : 2010년 4월 ~ 2011년 2월

#### 다. 연구 절차

- 1) 제7차 교육과정 및 개정 교육과정 초등학교 수학 교과서·지도서 분석  
제7차 교육과정 및 개정 교육과정 초등학교 수학 교과서와 지도서의 내용을 분석하여 분수와 나눗셈이 도입되는 단계와 그에 따른 개념 정의를 파악한다.
- 2) 개념 이미지 분석 질문지 제작  
수학 교과서와 지도서에서 나오는 분수와 나눗셈에 대한 여러 개념들의 핵심을 추려 학생들의 개념 발달(지도) 수준에 맞게 문항을 개발한다.
- 3) 분수와 나눗셈 개념 이미지 질문지 투입  
학생들에게 개념 이미지 질문지를 투입하여 개념 이미지를 표현하게 하고 그 결과를 바탕으로 점진적으로 질문지를 수정·보완하면서 재투입한다.
- 4) 분수와 나눗셈에 대한 학생들의 개념 이미지 분석  
학생들이 응답한 질문지를 문항 별로 분석하여 분수와 나눗셈의 이미지를 분석하고 그에 따른 특징이나 시사점을 도출해낸다.

#### 2. 검사 도구

본 연구를 수행하기 위한 표준화된 검사 도구가 없기 때문에 본 연구자가 문항을 개발하였다.



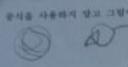
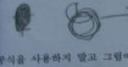
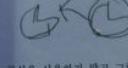
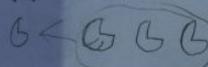
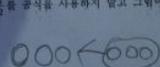
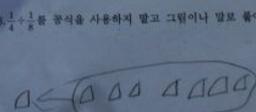
2) 2차 질문지 제작

1차 질문지의 문제점을 보완하여 시각적 표상과 언어적 표현을 학생들이 스스로 판단하게끔 ‘그림이나 글로’ 나타내도록 선택권을 주었다. 그리고 질문할 수 있는 개념을 많이 제시하여 단계적으로 학생들이 개념 이미지를 생성할 수 있도록 질문을 구성하였다.

학생들은 1차 질문지와는 다르게 어려움을 느끼지 않았고 자신만의 방식으로 표상을 할 수 있게 되었다.

<p>&lt;앞장 - 단계적인 6문항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 분수(진분수, 가분수, 대분수)의 개념</li> <li>• 분수의 덧셈(동분모, 이분모) 개념</li> </ul>	<p>&lt;뒷장 - 단계적인 6문항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 분수의 덧셈(동분모, 이분모) 개념</li> <li>• 분수의 곱셈 개념</li> </ul>

[그림Ⅲ-2] 학생이 작성한 2차 분수 개념이미지 질문지

<p>&lt;우측 나눗셈 이미지&gt; 6학년 ( ) 반 이름( )</p> <p>● 나눗셈에 관한 여러문의 수학적인 생각을 알아보는 질문입니다.      ● 그림 중하나 색이있는 이미지를 보는 것이 아니라 그림 전체를 꼼꼼하게 읽고 그림을 그림에는 간단한 도형이나 선으로 표현하세요.      ● '이' 또는 '와' 같은 수학 기호를 사용하지 않도록 해요.      ● 핵심성을 보고 떠오르는 개념을 글이나 간단한 그림으로 나타내주세요.</p> <p>1. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>2. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>3. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>4. <math>1 \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>5. <math>2 \div 4</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>6. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p> 	<p>&lt;우측 나눗셈 이미지&gt; 6학년 ( ) 반 이름( )</p> <p>7. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>8. <math>\frac{1}{2} \div 4</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>9. <math>\frac{1}{2} \div 2</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>10. <math>\frac{2}{4} \div \frac{1}{2}</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>11. <math>\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>12. <math>3 \div \frac{1}{2}</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p>  <p>13. <math>\frac{1}{4} \div \frac{1}{4}</math>를 공식을 사용하지 말고 그림이나 말로 풀어보세요.</p> 
<p>&lt;앞장 - 단계적인 6문항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 자연수끼리의 나눗셈 개념</li> <li>• (분수)÷(자연수) 개념</li> </ul>	<p>&lt;뒷장 - 단계적인 6문항&gt;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• (분수)÷(자연수) 개념</li> <li>• 진분수끼리의 나눗셈 개념</li> <li>• (자연수)÷(분수) 개념</li> </ul>

[그림III-3] 학생이 작성한 2차 나눗셈 개념이미지 질문지

### 3. 검사 실시

#### 1) 1차 질문지 검사

1차 검사는 2010년 9월 7일(화) 아침 활동 시간을 이용하여 15분간 실시하였다. 1차 검사 결과 드러난 문제점으로는 개념 이미지가 학생들에게 매우 생소해서 학생들이 쉽게 표상하지 못했으며 문제의 요구 사항이 많아 어려움을 겪는 것으로 드러났다.

## 2) 2차 질문지 검사

2차 검사는 2010년 11월 11일(목) 아침 활동 시간에 이루어졌다. 학생들은 1차 질문지에서 개념을 한 번 표상해본 경험이 있어서인지 전보다 수월하게 개념을 표상해내고 있었으며 1차 질문지보다 쉽고 재미있게 개념 이미지를 표상하는 것을 볼 수 있었다.

## 4. 분석 기준 수립

6학년 3개 반 100명을 모두 연구 대상으로 포함시키고, 각 문항마다 무응답과 전혀 다른 개념을 설명한 학생의 수를 제외하고자 하였으나, 문항마다의 무응답의 비율이 다르기 때문에, 무응답의 비율도 나름대로 의미가 있다는 판단 아래 무응답도 하나의 기준으로 마련하였다. 우선 이미지 유형에 따라, 그림, 언어, 그림과 언어를 동시에 사용하는 경우로 구분하였으며, 그 안에서 세부적인 분석 기준을 마련하여 비율을 분석하였다.

## 5. 학생들의 개념 이미지 분석

### 가. 분수의 개념 이미지 분석 결과

#### 1) 분수의 여러 의미

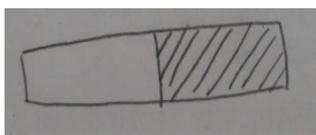
분수의 개념 (문항1, 2,3,4번)	$\frac{1}{2}$		12의 $\frac{3}{4}$		$\frac{3}{2}$		$1\frac{2}{3}$		합 계	백 분 율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	87	87	77	77	80	80	83	83	327	81.7
그림과 언어	6	6	14	14	7	7	2	2	29	7.3
언어	7	7	7	7	11	11	15	15	40	10
무응답	0	0	2	2	2	2	0	0	4	1
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

<표Ⅲ-1> 분수 개념 이미지 유형 분석

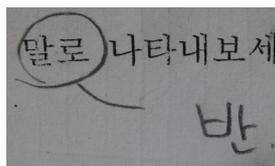
가) 문항 1번  $\frac{1}{2}$ 의 개념 이미지 분석

초등학교 2학년 수학 교과서에서  $\frac{1}{2}$ 의 개념 정의는 ‘전체를 똑같이 2로 나눈 것 중에 1’이다. 교과서에서는 직사각형을 점선으로 반으로 나눈 것 중 한 쪽에만 색칠 된 것으로 표상되어져 있다.

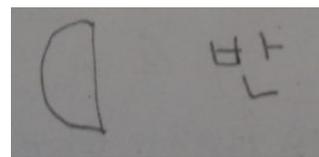
$\frac{1}{2}$ 에 대한 개념 이미지는 그림으로 나타내는 것이 87%로 가장 많았고, 언어로 7%, 그림과 언어로 동시에 표현한 응답이 6%로 나타났다. 그림으로 나타낼 때에는 원으로 나타낸 경우가 45.1%, 직사각형을 모델로 사용하는 경우가 35.5%로 대부분을 차지하고, 그 외에도 사람 모양이나 빵, 비커, 사과와 같은 구체물을 사용하는 경우도 있었다.  $\frac{1}{2}$ 의 개념 이미지를 언어로 나타낸 학생은 1명이었으며 “반”으로 표현하였다. 학생 응답의 전체적인 특징은  $\frac{1}{2}$ 을 나타낼 때 전체에서 반을 색칠하여 이미지를 표상하는 경우가 많다는 것이며, 교과서 안에 개념 정의 표상(반으로 나눈 것 중 한 쪽에만 색칠 된 것)이 학생들에게 많은 영향을 끼치고 있다는 것을 알 수 있다. 분수의 도입에서 처음으로 나오는 개념이며 반을 의미하는  $\frac{1}{2}$ 은 97.2%의 올바른 개념 이미지 표상을 보이며 개념 이미지 형성에 큰 어려움을 가지고 있지 않음을 알 수 있었다. 그러나 분수의 도입에서 이루어지는 “똑같이 나누기”(등분할)의 개념에서 오류를 범하는 학생이 보이기도 하였다.



[그림Ⅲ-4] 그림 표상



[그림Ⅲ-5] 언어 표상

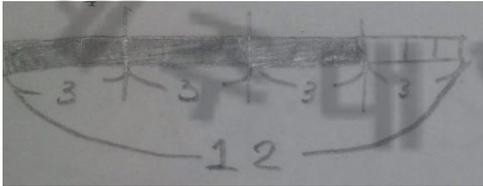


[그림Ⅲ-6] 그림과 언어

나) 문항 2번 12의  $\frac{3}{4}$ 의 개념 이미지 분석

이 문항은 초등학교 3학년 수학 교육과정에 나오는 개념인 전체에 대한 부분으로서의 분수를 알아보고자 하는 것이다. 수학을 지도하면서 학생들이 이해하기 어려운 부분 중 하나가 바로 이 ‘분수만큼’의 개념인데 이 개념 이미지를

분석해 보면서 학생들이 느끼는 부분으로써의 분수는 어떤 이미지를 가지고 있는지 알아보고자 한다. 12의  $\frac{3}{4}$ 에 대한 개념 이미지를 그림으로 표현한 경우는 77%, 그림과 언어로 표현한 경우가 14%이고, 언어로 표현한 7% 응답하지 않은 학생은 2%였다. 그림으로 표현한 경우는 직사각형으로 나타낸 학생이 54.9%, 원(날개) 33%, 그 밖에 수직선이나 사람으로 나타낸 경우가 각각 7명(7.7%), 4명(4.4%)으로 나타났다. 그림과 언어로 표현한 경우는 그림을 그려놓고 언어로 보충 설명하는 것으로 나타났다. 이미지 유형에는 선으로 나눠 색칠하는 것이 65.7%로 가장 많았고, 묶음 표현이 31.4%, 수직선으로 나누는 것이 2.9%로 나타났다. 학생들은 전체에 대한 부분으로서의 분수를 이산량보다는 연속량으로 나타내어 선으로 나누어 색칠하는 것에 더 익숙한 듯 보였으며, 심지어 이산량임에도 불구하고 묶음으로 표현하지 않고 공간을 나눔의 개념으로 이미지를 표현하는 것으로 보아 분수에 대한 개념이 연속량의 의미 선에서 머무는 학생이 있음을 알 수 있었다.



[그림Ⅲ-7] 직사각형 그림



[그림Ⅲ-8] 원 날개 그림

#### 다) 문항 3번 $\frac{3}{2}$ 의 개념 이미지 분석

가분수는 초등학교 4학년에 처음 개념이 등장한다. 가분수의 개념 정의는 ‘분자가 분모와 같거나 분모보다 큰 분수’를 말한다. 가분수  $\frac{3}{2}$ 에 대한 개념 이미지를 분석해본 결과 그림으로 표상하는 경우가 80%, 언어로 표상하는 경우 11%, 그림과 언어로 동시에 나타내는 경우 7% 무응답 2%로 나타났다.  $\frac{3}{2}$ 의 개념 이미지를 그림으로 표상하는 경우에는 원을 그려 표현하는 학생이 40.0%, 직사각형으로 표현하는 학생은 30.0%로 나타났으며 그 외에도 비커, 사과, 과자 등 구체물(16.0%)로 나타내기도 하였다. 교육과정 상 가분수와 연이어 대분수를 공부하고 가분수를 대분수로 바꾸는 방법을 학습하게 되어, 그 결과 영향을

받아 이 문항의 특징은  $\frac{3}{2}$  개념을 그대로 이미지화하는 것이 아니라  $1\frac{1}{2}$ 로 표상하는 학생들이 28.5%나 있다는 점이다. 뿐만 아니라,  $\frac{3}{2}$ 과 동일한 양의 개념인 소수 1.5로 나타내는 경우도 있어 가분수가 학생들의 개념 이미지로 자리 잡을 때 ‘양의 개념’에 치중한 나머지 같은 양 의미의 다른 표현들로 변화된다는 것을 알 수 있다. 즉, 학생들은 분수의 여러 가지 기능을 알고 있음에도 불구하고 ‘양의 개념’으로 일반화 시키는 경향이 있음을 알 수 있었다. 분수의 다른 기능으로 비의 개념을 나타내는 것이 있는데, 이 문항에서 2명(5.7%)이  $\frac{3}{2}$ 의 개념 이미지를 비의 개념으로 이미지화 하였다.

라) 문항 4번  $1\frac{2}{3}$ 의 개념 이미지 분석

대분수는 가분수와 함께 4학년 교육과정에 연이어 등장하는 개념이다. 대분수의 개념 정의는 ‘자연수와 진분수로 이루어진 분수’이다. 이 문항에서는 그림으로 개념 이미지를 표상한 경우가 대부분이었으며(83%), 그림과 언어로 동시에 표현한 학생은 2%, 언어로 표현한 학생은 15%로 나타났다. 그림으로 나타낸 경우는 원 42.9%, 직사각형 45.2%로 나타났으며, 그 밖에 사람, 음료수 통, 숫자 1모양 등으로 표현하기도 하였다(10.7%). 흥미로운 점은  $1\frac{2}{3}$ 를 개념 이미지화 하는 데 있어 이번에는  $\frac{5}{3}$ 의 개념이미지로 나타내는 학생이 6명(17.1%)으로, 바로 전 문항인 3번 문항 가분수의 개념을 설명할 때 대분수의 개념이미지로 나타낸 것에 비추어 생각해볼 때 가분수와 대분수를 동일시하는 학생들이 있는 것으로 보인다. 그리고 3,4번 문항의 응답자를 확인해본 결과 대분수를 가분수로 개념 이미지화한 학생과 가분수를 대분수로 개념 이미지화 한 학생이 단 1명밖에 겹치지 않는 것으로 보아 학생들이 자신이 개념이미지화하기 쉬운 분수 종류(대분수 혹은 가분수)로 개념 이미지를 표상하고 있다는 것을 알 수 있다.

2) 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈

분수의 덧셈과 뺄셈 -동분모(문항 5,8번)	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$		$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	73	73	69	69	142	71.0
그림과 언어	7	7	8	8	15	7.5
언어	18	18	21	21	39	19.5
무응답	2	2	2	2	4	2.0
합계	100	100	100	100	200	100

<표Ⅲ-2> 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

가) 문항 5번  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ 의 개념 이미지 분석

동분모의 덧셈에 관한 개념은 초등학교 4학년 2학기에 등장한다. 교과서 상에는 원 모델을 등분하여 색칠하는 활동을 통해 동분모 덧셈 방식을 유추해내고 있다. 학생들은 활동을 통해서 분모가 같을 때에는 분모는 같게 두고 분자를 더하는 것이 방법이라는 것을 알아낼 수 있다. 동분모 분수의 덧셈인  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ 의 개념 이미지를 분석한 결과 그림으로 표상한 경우 73%, 언어로는 18%, 그림과 언어로 동시에 표현한 경우 7%를 보였다. 그림으로 나타낸 학생인 경우 직사각형(전체 1과 부분)으로 나타낸 학생이 58.7%이며, 원으로 표상한 학생이 33.8%이다. 직사각형으로 표현한 학생은 모두 직사각형을 등분하여 전체로서의 부분으로 나타내었으며, 원으로 표현한 경우에도 원 날개로 표현한 경우 30%, 전체와 부분으로 하나의 원을 그려 나타낸 경우가 70%로, 교과서에 제시된 대로 전체(1)의 부분으로서의 동분모 분수 계산이 이루어지는 것이 많음을 알 수 있었다. 수직선으로 표현한 학생은 4명(5.0%) 있었으며, 그 외에도 물, 구역 모양으로 모델을 정형화 시키지 않은 학생도 있었다(2.5%). 언어로 표현한 경우는 동분모 분수 덧셈 상황 또는 문장제, 혹은 동분모 분수의 덧셈에 대한 공식 설명으로 이루어졌는데, 상황이나 문장제를 만들 시에는 계란이나, 물 등 실생활에 사용되는 구체물을 사용하고 있었다. 그림과 언어를 동시에 쓰는 경우는 그림에 대한 부연 설명을 하기 위함은 66.7%, 그림의 내용과는 별개로  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ 의 계산에

대한 공식 설명은 33.3%로 나타났다.

나) 문항 8번  $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ 의 개념 이미지 분석

동분모의 뺄셈에 관한 개념도 4학년 2학기 수학 교육과정에서 동분모의 덧셈 다음으로 등장한다. 동분모의 덧셈과 뺄셈은 문항이 조금 떨어져 있음에도 불구하고 교육과정상 연달아 배우게 되는 개념이라 그 개념 이미지 표상에서도 그림, 언어로 표현하는데 비슷한 경향성을 보였다. 그림으로 표상한 경우 69%, 언어로는 21%, 그림과 언어로 동시에 표현한 경우 8%를 보인 것이다. 그림으로는 원 35.1%, 직사각형 48.0%, 그 외 사람, 사과, 총알, 물통으로 표현하였다(11.7%). 원이나 직사각형으로 나타낼 때에는 원에서 2명(5.7%), 직사각형에서 1명(2.8%)를 제외하고는 모두 전체(1)에 대한 부분으로 모델을 사용하였다. 원 낱개로 표현한 학생 2명은 모두 오개념을 나타내었는데 이는 분자만으로 낱개 이미지화 한 결과로 볼 수 있다. 직사각형 낱개로 이용한 경우는 ‘비의 개념’으로 분수의 뺄셈을 계산하고 있었다. 언어로써 개념이미지를 표상하는 경우에는 문장제로 표현한 경우 50%, 동분모 분수의 뺄셈의 방법을 설명한 경우 50%로 나타났다. 그림과 언어로 표현한 경우는 대부분 그림을 보충 설명하는 목적으로 언어를 사용하고 있었다.

3) 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈

분수의 덧셈과 뺄셈 -이분모 (문항 6,7,9,10)	$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$		$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$		$\frac{4}{5}-\frac{1}{3}$		$1\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$		합 계	백 분 율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	64	64	68	68	61	61	54	54	247	61.7
그림과 언어	10	10	8	8	8	8	6	6	32	8.0
언어	23	23	22	22	28	28	30	30	103	25.8
무응답	3	3	2	2	3	3	10	10	18	4.5
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

<표Ⅲ-3> 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

가) 문항 6번  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 의 개념 이미지 분석

이분모의 덧셈은 초등학교 5학년 교육과정에서 등장한다. 이 개념을 도입하기 위해서 바로 전 단원에서 ‘약수와 배수’를 공부하게 되는데 이는 이분모 분수의 덧셈에 쓰이는 ‘통분’의 개념을 익히도록 하는 데 있다. 이러한 교육과정의 흐름상 학생들의 이분모 분수의 덧셈에 대한 개념이미지는 형식적으로 ‘통분’의 개념을 많이 사용하게 된다. 6번 문항에서는 그림으로 64%, 언어로는 23%, 그림과 언어로 표현하는 경우가 10%가 된다. 그림으로 표현하는 경우는 직사각형으로는 52.6%, 원으로 31.1%, 그 외 수직선, 구역모양, 물통으로 나타낸 것이 16.3%이다. 그림으로 표현하는 경우는 오개념이미지를 제외하고는 모두 전체 1에서 부분을 나타내는 데 직사각형과 원이 사용되어지는 것을 볼 수 있었다. 언어로 표현한 경우는 분수의 통분을 통한 설명 방법이 60%, 문장제나 상황 만들기 40%로 나타났다. 이 문항에서의 특징은 그림과 언어를 동시에 표현하거나 언어로 표현하는 응답이 이전 문항보다 현저히 늘어났다는 것을 알 수 있으며, 언어로 표현하는 경우 ‘통분’을 활용하여 설명하는 방식이라는 점이다.

나) 문항 7번  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ 의 개념 이미지 분석

이번 문항도 문항 6번과 마찬가지로 이분모의 덧셈에 대한 개념이미지를 묻는 것이지만 그 답으로 가분수(혹은 대분수)가 나온다는 점에서 다르다. 1보다 작은 두 분수를 더했을 때 1보다 큰 분수가 나오는 상황에서 학생들이 어떤 개념 이미지를 보일지에 초점을 맞췄다. 이 문항에서는 그림 표상이 68%, 언어 표상 22%, 그림과 언어를 동시에 표상하는 경우 8%로 6번 문항과 거의 비슷한 표상 방법을 사용한 것으로 드러났다. 그림으로 나타내는 경우 직사각형으로는 46.1%, 원으로 38.2%, 원과 직사각형, 혹은 수직선과 원과 같이 두 가지를 동시에 사용하는 경우가 11.5%, 수직선은 3.9%로 나타났으며 그 외의 방법으로 나타낸 것이 11.8% 였다. 언어로써 표현한 경우 80%는 통분을 이용한 설명, 20%만이 구체물(물)을 이용한 문장제로 나타내었다. 그림과 언어를 동시에 사용한 경우는 대부분 그림을 보충 설명하기 위한 언어의 사용(87.5%)이었고, 12.5%가 그림과 별개로 통분을 통한 계산식의 설명으로 그림과 언어를 함께 사용하였다.

다) 문항 9번  $\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$ 의 개념 이미지 분석

이 문항은 이분모 분수의 뺄셈에 관한 개념 이미지를 알아보고자 하는 것이다. 이분모 분수의 뺄셈은 이분모 분수의 덧셈 다음에 학습하는 개념으로 마찬가지로 '통분'의 개념에 기초한다. 그림으로 나타내는 경우 61%, 언어로 28%, 그림과 언어로는 8%, 응답하지 못한 학생이 3%가 된다. 그림으로 나타내는 비율이 줄어든 것을 볼 수 있는데 이는 학생들이 이분모 분수의 연산에서 그림으로는 한계가 있다고 느끼는 학생들이 있다는 것을 의미한다. 그림으로 표상하는 경우 58.0%가 직사각형을 이용하였고, 그 중에서도 2명(7.8%)의 학생은 일렬 직사각형 등분이 아닌  $3 \times 5$  직사각형을 이용하여 합리적으로 개념을 이미지화할 수 있었다. 24.6%가 원을 이용하였는데, 그 중에서 23%는 전체의 부분으로서의 원을, 6.8%는 원의 날개를 이용하여 이미지화하였으며 수직선으로 나타낸 학생은 10명(14.5%)이었다. 언어로 나타낸 학생들의 경우 통분으로 해결하는 방법 설명이 37.5%, 문장제를 만드는 경우도 37.5%로 같았고, 상황을 제시하는 경우가 25%였다. 그림과 언어로 동시에 표현하는 경우는 그림을 그리고 통분의 원리를 설명한 경우가 44.4%, 그림 내용을 보충 설명한 경우가 55.6%이다.

라) 문항 10번  $1\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ 의 개념 이미지 분석

문항 10번도 문항 9번과 마찬가지로 이분모 분수의 뺄셈에 관한 개념 이미지를 분석하기 위한 문항이다. 이번에는 대분수와 진분수의 연산은 어떤 개념 이미지로 접근하는지 알아보도록 한다. 문항 9번과 성격이 같아서인지 그림으로 나타낸 경우 54%, 언어로 나타낸 경우 30%로 나타났으며, 그림과 언어를 동시에 이용한 경우 6%, 무응답의 경우가 10%였다. 그림에는 53.3%가 직사각형을 이용하여 개념 이미지를 나타내고 있었으며, 31.7%는 원으로, 10%가 수직선으로, 그 외의 방법을 사용하여  $1\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ 의 개념 이미지를 나타낸 경우가 3명(5%)이 있었다. 언어로 나타낸 개념 이미지는 문제 요소를 이용하여 뺄셈 의미(제거, 비교)를 설명하는 경우가 50%로 나타났는데 그 중 제거의 의미가 40%, 비교의 의미가 10%이다. 또, 통분한 후 풀이 방법 설명이 37.5%, 문장제로 제시한 것이 12.5%로 나타났다. 그림과 언어를 동시에 표현하는 경우는 모두 그림을 보충 설명하기 위함이었다. 이 문항의 전체적인 특징은 대분수를 가분수로 고치고 통분을 하는 개념 이미지가 대부분이었다는 점이다. 그리고 이 문항은  $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ 가

가능하기 때문에 굳이 대분수를 가분수로 고칠 필요가 없음에도 불구하고 문제 풀이 과정이 드러난 응답에서는 1명을 제외하고 모두가 대분수를 가분수로 고치는 경향을 보였다.

#### 4) 분수의 곱셈 개념 이미지 분석

분수의 곱셈 (문항 11, 12번)	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$		$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	52	52	52	52	104	52.0
그림과 언어	8	8	6	6	14	7.0
언어	27	27	27	27	54	27.0
무응답	13	13	15	15	28	14.0
합계	100	100	100	100	200	100

<표Ⅲ-4> 분수의 곱셈 개념 이미지 유형 분석

##### 가) 문항 11번 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 의 개념이미지

분수의 곱셈은 5학년 수학 교육과정에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 배우고 난 다음 단원에서 도입된다. 교과서 개념 정의 방법은 우선 직사각형 모델로 제시되어 등분을 하면서 답을 찾아나가는 방법을 제시하고, 다음으로 넓이의 개념을 이용하여 겹쳐지는 부분으로 답을 찾도록 한다. 그리고 나서 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱해준다는 분수의 곱셈 방법을 형식화한다.  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 의 개념 이미지를 분석한 결과 그림으로 표상한 경우 52%, 언어로는 27%, 그림과 언어를 동시에 이용한 경우 8%로 나타났으며, 무응답이 13%로 여전히 높게 나타나 학생들이 분수의 곱셈에 관한 개념 이미지를 표상하는 것을 어려워하고 있음을 알 수 있었다. 그림으로 나타낸 경우 그 모델이 직사각형 46.7%, 원 40%, 수직선 10%로 나타났다. 교과서 개념 도입 시 직사각형만으로 설명하지만 실제로 개념 이미지화했을 때는 여러 다른 모델로도 표현되어지는 것을 볼 수 있다. 언어로 표상한 경우 50%가 분수의 곱셈 개념 정의 방법을 그대로 풀어 쓴 것으로 나타났는데 그 중에서 ‘약분’의 개념을 더한 설명은 75%로 분수의 곱셈 시 기약분수로 약분을 하는 알고리즘을 소유하고 있음을 나타내었다. 나머지 50%는 곱셈 의미 설명을 표현하였으며 포괄적인 의미이다 보니 ‘약분’의 개념을 덧

불인 학생은 1명에 불과했다. 그림과 언어를 동시에 사용하는 경우는 ‘ $\frac{1}{2}$ 이  $\frac{2}{3}$ 만큼 있는 것’이라는 분수의 곱셈 의미를 보충 설명하는 식이었다.

분수의 곱셈의 바른 개념 이미지에는 직사각형이나 원을 반으로 나눈 뒤( $\frac{1}{2}$ ) 반 부분을 또  $\frac{2}{3}$ 로 나누어 2칸에 색칠하는 식으로 ‘ $\frac{1}{2}$ 이  $\frac{2}{3}$ 만큼 있는 것’을 표현한 그림 개념 이미지가 46.2%, 분수의 곱셈 풀이 방법 설명이 38.7%, 단순 곱셈 의미 설명 15.4%로 분석되어진다.

나) 문항 12번  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ 의 개념이미지

이 문항도 문항 11번과 마찬가지로 분수의 곱셈에 대한 개념 이미지를 분석하기 위한 문항이다. 대분수가 아닌 가분수를 학생들에게 문제로 제시함으로써 교과서에는 따로 개념 정의되지 않는 (진분수) $\times$ (가분수)의 개념 이미지를 분석해보고자 함이다. 이 문항의 개념 이미지는 그림으로 52%, 언어로 27%, 그림과 언어를 동시에 6%, 무응답이 15%로 나타났다. 그림으로는 원으로 표현한 경우 37.9%, 직사각형은 50.0%, 수직선 표현 10.3%로 나타났다. 언어로써 나타내는 경우 풀이 방법을 설명 50%, 곱셈 의미를 설명 50%로 나타났으며 약분의 개념이 포함되는 응답은 25%에 불과했다. 그림과 언어로 동시에 나타내는 경우는 그림에 대한 보충 설명으로 언어가 사용되게 된다.

오개념 이미지는 분수만 개념 이미지로 나타낸 경우와, 곱셈과 덧셈의 혼동이 있었다. 재미있는 사실은 이 오개념들 중에서 16.7%가 분수의 곱셈에서는 바꿀 필요가 없는 가분수  $\frac{4}{3}$ 을  $1\frac{1}{3}$ 로 바꾸어 개념 이미지화하는 양상을 보인다는 점이다.

## 나. 나눗셈의 개념 이미지 분석 결과

### 1) 자연수끼리의 나눗셈 개념 이미지 분석

자연수끼리의 나눗셈 (문항1,2,3, 4,5번)	8÷2		3÷2		2÷2		1÷2		2÷4		합계	백분율
	응답 수	백분율	응답 수	백분율	응답 수	백분율	응답 수	백분율	응답 수	백분율		
포함	58	69	52	70.3	59	73.7	7	10.3	37	69.8	213	59.3
등분	26	31	22	29.7	21	26.3	61	89.7	16	30.2	146	40.7
합계	84	100	74	100	80	100	68	100	53	100	359	100

<표Ⅲ-5> 자연수끼리의 나눗셈의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

자연수끼리의 나눗셈 (문항1,2,3, 4,5번)	8÷2		3÷2		2÷2		1÷2		2÷4		합계	백분율
	응답 수	백분율										
그림	79	79	82	82	81	81	70	70	75	75	387	77.4
그림과 언어	10	10	7	7	8	8	5	5	5	5	35	7.0
언어	11	11	11	11	11	11	19	19	15	15	67	13.4
무응답	0	0	0	0	0	0	6	6	5	5	11	2.2
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	500	100

<표Ⅲ-6> 자연수끼리의 나눗셈의 표상 방법 유형 분석

나눗셈은 초등학교 3학년 1학기 수학 교육과정에 처음 도입된다. 초등학교 3학년 수학 교과서에서 나눗셈은 “똑같이 덜어낼 수 있어요”(포함), “똑같이 나눌 수 있어요”(등분) 활동으로 이루어져 학생들에게 나눗셈의 실제적인 상황을 제시하고 있다. 사용된 구체물은 사과, 빵, 야구공 등 다양하다. 그러나 나눗셈의 첫 도입에 사용되는 구체물이 사과라는 점과 학생들의 사용 모델에 사과가 많이 등장하는 것도 연관성이 있을 것이라 생각된다. 나눗셈의 첫 도입 활동으

로는 사과 6개를 2개씩 묶어 덜어내는 것으로 0이 될 때까지 덜어내도록 해서 몇 봉지가 나오는지 알아보는 활동이다. 이를 통해 교과서 속 개념 정의는 ‘6에서 2씩 3번 빼면 0이 된다. 이것을 식으로  $6 \div 2 = 3$ 이라고 쓰고, ...’로 제시하고 있다. 그리고 이어지는 “똑같이 나눌 수 있어요” 활동에서는 빵 8개를 두 명이 똑같이 나눠먹는 상황을 제시해 몇 개씩 먹을 수 있는지 알아본다. 여기서 제시된 교과서 개념 정의는 ‘8을 2곳으로 똑같이 나누면 한 곳에 4개씩 됩니다. 이것을 식으로  $8 \div 2 = 4$ 라 쓰고, ...’이다. 이러한 교과서의 개념 정의를 토대로 학생들은 어떤 개념 이미지를 형성하고 있는지 알아보도록 한다.

#### 가) 문항 1번 $8 \div 2$ 의 개념 이미지 분석

$8 \div 2$ 에 대한 개념 이미지는 69%의 학생이 포함제 형식으로, 31%의 학생이 등분제 형식으로 나눗셈을 개념이미지화 한다는 것을 알 수 있었다. 표상 방법에는 그림으로 나타내는 것이 79%로 가장 많았고, 언어로 11%, 그림과 언어로 동시에 표현한 응답이 10%로 나타났다. 그림으로 나타낼 때에는 원으로 나타낸 경우가 67.4%로 가장 많았고, 직사각형을 모델로 사용하는 경우가 23.6%, 수직선 2.3%, 그 외에 사람 모양이나 빵, 비커, 사과와 같은 구체물을 사용하는 경우가 6.7%였다.  $8 \div 2$ 에 대한 개념 이미지를 언어로 나타낸 학생 중에는 54.5%가 단순히 문제와 답을 계산해서 적는 경우로 반 정도였고, 상황 제시 36.4%, 설명은 9.1%가 응답했다. 대부분의 학생이  $8 \div 2$ 에 대한 정확한 개념 이미지를 가지고 있었으며 포함제로서의 나눗셈에 더욱 익숙한 것으로 보인다.

#### 나) 문항 2번 $3 \div 2$ 의 개념 이미지 분석

나누어떨어지지 않는 나눗셈에 대한 개념 정의 역시 초등학교 3학년 교육과정에 등장한다. 3학년 2학기에 (두 자리 수)  $\div$  (한자리수)의 나눗셈을 배우면서 ‘나머지’라는 용어가 도입된다. 전체의 41% 학생들이 ‘나머지’를 하나 남겨두고 2개만 묶는 것으로 나타났으며, 본 연구 대상은 초등학교 6학년 학생들이기 때문에 ‘나머지’ 개념뿐만 아니라 5·6학년 교육과정에 등장하는 (자연수)  $\div$  (자연수)를 분수와 소수로 나타내는 개념 이미지는 37%로 나타났다. 이 문항에서는 70.3%가 포함, 29.7%가 등분의 관점으로 개념 이미지를 형성하였다. 표상 방법에 있어 그림으로 표현한 경우는 82%, 그림과 언어로 표현한 경우가 7%이고, 언어로 표현한 학생은 11%로 나타났다. 그림으로 표현한 경우는 원으로 나타낸 학생이 64%, 직사각형 22.5%, 수직선으로 나타내는 경우가 7.9%, 그 밖에 사과나 사탕 등 구체물을 표현하는 경우가 5.6%로 나타났다. 개념 이미지를 언어로

표현한 학생 중에는 설명이 45.4%, 상황 제시가 27.3%, 문제와 답을 그대로 적는 경우가 27.3%로 나타나 풀이 방법이나, 나누어떨어지지 않는 나눗셈에 대한 설명으로 개념 이미지를 형성하는 경우가 많음을 알 수 있었다. 설명하는 데에서 발견된 학생들의 오개념에는 '나누어떨어지지 않는다'라는 표현을 '나뉘지지 않는다'라고 표현하기도 하였다.

다) 문항 3번  $2 \div 2$ 의 개념 이미지 분석

$2 \div 2$ 에 대한 개념 이미지를 분석해본 결과 포함제로 나타내는 경우가 73.75%, 등분제로 나타내는 경우가 26.25%로 나타났다. 표상 방법에 있어서는 그림으로 표상하는 경우가 81%, 그림과 언어로 표상하는 경우 7%, 언어로만 나타내는 경우가 11%로 나타났다.  $2 \div 2$ 의 개념 이미지를 그림으로 표상하는 경우에는 원을 그려 표현하는 학생이 67.4%, 직사각형으로 표현하는 학생은 22.5%로 나타났으며 수직선으로 그려 나타낸 경우는 3.4%였고, 그 외에도 사과, 사탕 등 구체물(6.2%)로도 표현되었다. 원으로 나타내는 경우에는 원 날개(2)로 표현되었고, 직사각형은 직사각막대(2등분)를 그렸다. 언어로 표현한 경우에는 개념 이미지를 설명한 경우 27.2%, 실제 상황을 제시한 경우 36.4%, 문제와 답만 적은 경우도 36.4%였다.

라) 문항 4번  $1 \div 2$ 의 개념 이미지 분석

피제수가 제수보다 작은 나눗셈은 초등학교 5학년 교육과정에서 등장한다. 물론 4학년 때 분수를 도입하면서 '전체 1을 2로 똑같이 나눈 것 중에 하나를  $\frac{1}{2}$ '임을 이해한다면  $1 \div 2$ 가  $\frac{1}{2}$ 와 같다는 것을 알 수 있겠지만 실제적으로 교육과정에서 다루는 시기는 초등학교 5학년 수학 교육과정에서이다. 이 문항에서 포함제는 10.3%, 등분제는 89.7%로 나타나는데, 여기서 흥미로운 점은 피제수가 제수보다 작아지자 이제까지 우세하게 나타났던 포함제 개념 이미지가 확연히 줄어들고 등분제의 개념 이미지가 비율 상 높게 나타난다는 점이다. 특히 '나누기 2'의 개념은 반으로 나눈다는 점에서 등분하기 쉽다는 장점이 있어 더욱 우세하게 드러날 것이라는 예상을 할 수 있지만, 이전에도 계속 2로 나누는 문항이었다는 점에서 피제수가 제수보다 작은 나눗셈에서는 학생들이 포함제로 개념을 이미지화하는 것을 어려워 한다는 결론을 내릴 수 있다. 이것에 대해서는 다음 문항인 5번 문항과 연계하여 좀 더 분석해보도록 하겠다. 표상 방법에는 그림 70%, 그림과 언어 5%, 언어 19%, 답변을 하지 않은 학생이 6%로 나

타났다. 이 문항에서 처음으로 무응답 학생이 나타났다는 점에서도 피제수가 작은 나눗셈을 학생들이 이미지화하는 것을 어려워한다는 점이 드러난다. 그림으로 나타낸 경우는 원 58.7%, 직사각형 28%로 나타났으며, 수직선 8%, 그 외에도 사탕, 빵 등으로 표현하기도 하였다(5.3%). 언어로 표현한 경우 36.8%가 상황 제시 형태로, 26.3%가 설명, 31.6%가 문제와 답을 적기만 하였으며 기타로 1이라고 표현한 경우가 1명(5.3%)이었다. 언어로 설명하는 경우 “나눌 수 없기 때문에”, “나누지 못하기 때문에” 분수, 혹은 소수로 만들어야 한다는 생각도 담겨 있어 피제수가 제수보다 작은 나눗셈에 대한 학생들의 개념이미지가 완벽하지 않음을 알 수 있었다.

마) 문항 5번  $2 \div 4$ 의 개념 이미지 분석

이 문항은 문항 4번의 연장선상으로 피제수가 제수보다 작은 경우이다. 4번 문제와는 다르게 이번에는 4로 나누는 상황을 제시하여 개념 이미지를 분석해보았다. 이 문항에서 포함제는 69.8%, 등분제는 30.2%로 나타나는데, 이것은 4번 문항에서 나타나는 결과와 판이하게 다르다. 즉, 피제수가 제수보다 작기 때문에 등분제 개념 이미지가 우세한 것이 아니라는 것이다. 그렇다면 이 문항과 함께 살펴본 결과 4번 문항의 등분제 개념 이미지가 우세한 까닭을 생각해볼만하다. 그리하여 내린 결론은 피제수가 1일 때 학생들은 포함제보다 등분제를 먼저 생각한다는 것으로 분석해볼 수 있다. 표상 방법에는 그림 60%, 사각형 23.7%, 수직선 7.5%, 그 외 사과로 나타낸 것이 8.8%였다. 언어로 표현한 경우 30.7%가 설명으로, 23.1%가 상황, 46.2%가 문제와 답을 나타냈다.

2) (분수) $\div$ (자연수)의 개념 이미지 분석

분수와 자연수의 나눗셈 -(분수) $\div$ (자연수) (문항 6,7,8,9번)	$\frac{1}{2} \div 2$		$\frac{1}{4} \div 2$		$\frac{1}{4} \div 4$		$\frac{3}{4} \div 2$		합 계	백분 율
	응 답 수	백 분 율	응 답 수	백 분 율	응 답 수	백 분 율	응 답 수	백 분 율		
포함	3	6.4	2	5	2	5.6	2	4.9	9	5.5
등분	44	93.6	38	95	34	94.4	39	95.1	155	94.5
합계	47	100	40	100	36	100	41	100	164	100

<표III-7> (분수) $\div$ (자연수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

분수와 자연수의 나눗셈 -(분수)÷(자연수) (문항 6,7,8,9번)	$\frac{1}{2} \div 2$		$\frac{1}{4} \div 2$		$\frac{1}{4} \div 4$		$\frac{3}{4} \div 2$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	65	65	69	69	66	66	63	63	263	65.7
그림과 언어	6	6	3	3	2	2	6	6	17	4.3
언어	19	19	22	22	25	25	20	20	86	21.5
무응답	10	10	6	6	7	7	11	11	34	8.5
합계	100	100	100	100	100	100	100	100	400	100

<표Ⅲ-8> (분수)÷(자연수)의 표상 방법 유형 분석

분수와 자연수의 나눗셈인 (분수)÷(자연수)에 관한 개념 정의는 초등학교 5학년 2학기에 등장한다. 우선 '나눗셈을 곱셈으로 나타내는 활동을 통해 제수인 자연수를 역수 취해서 곱셈으로 나타낼 수 있다는 것을 이해한 후 다음 활동으로 (분수)÷(자연수)를 배우게 된다. 결국 (분수)÷(자연수)의 개념 정의는 (분수)× $\frac{1}{(\text{자연수})}$ 와 같음으로 교과서 상에는 제시되어 있다. 6,7,8,9번 문항의 개념 이미지를 분석해봄으로써 학생들이 가지고 있는 개념 이미지는 어떤 종류인지 알아보도록 하겠다.

#### 가) 문항 6번의 $\frac{1}{2} \div 2$ 의 개념 이미지 분석

이 문항에서 포함제는 6.4%, 등분제는 93.6%로 나타났다. 이것 또한 피제수가 제수보다 작은 경우에다가 피제수가 <분수>로 특수한 경우이기 때문에 이러한 경우 개념 이미지가 대부분 등분제로 나타난다는 특징은 주목할 만 하다. 표상 방법으로 그림 65%, 그림과 언어로는 6%, 언어 19%, 응답하지 않은 학생이 10%로 나타났다. 그림으로 나타낸 학생인 경우 원으로 표상한 학생이 57.7%, 직사각형으로 나타낸 학생이 33.9%이며, 수직선으로 나타낸 경우가 5.6%, 그 외에 사탕, 물통 등으로 나타낸 경우가 2.8%이다. 직사각형으로 표현한 학생은 2×2 직사각형이나 직사각막대로, 원으로 표현한 경우에는 원을 등분한 것이나 부분인 반원으로 표현하였다. 언어로 표현한 경우에는 상황을 제시한

경우가 25%, 설명 18.7%, 문제와 답을 적은 경우 43.8%, 역수로 표시해서 곱셈을 나타낸 경우가 12.5%로 나타났다. 여기서 알 수 있는 점은 교과서에 제시된 대로 학생들이 역수의 곱으로 나타내는 개념 이미지는 그다지 많지 않다는 점이다.

개념 이미지 중에서는 나눗셈을 곱셈으로 착각하거나, 등분을 제대로 하지 않는 등 오개념을 형성하는 경우도 있었다.

나) 문항 7번  $\frac{1}{4} \div 2$ 의 개념 이미지 분석

이 문항도 6번 문항과 마찬가지로 포함제 5%, 등분제 95%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 69%, 그림과 언어로 동시에 3%, 언어 22%, 무응답 6%로 나타났다. 그림으로는 원 54.2%, 직사각형 29.2%, 수직선 8.3%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용하는 경우도 있었다(8.3%). 원을 사용한 경우의 35.9%는 4등분 중 한 조각의 1/4원을 이용해 그것을 전체로 반을 나누며 표현하거나 원 전체에서 1/4부분을 색칠하고 그것을 반으로 나누는 식으로 표상하였다. 직사각형의 경우는 대부분 직사각막대로 나타내는 것을 편하게 생각하고 있었다(90.5%). 언어로 표상한 경우 설명 28.6%, 상황 제시 28.6%, 문제와 답 21.4%, 역수곱 21.4%로 나타났다. 그리고 몇몇 학생들은 역수의 곱을 하지 않고 그대로 2를 곱해버리는 실수를 범하기도 했다.

다) 문항 8번  $\frac{1}{4} \div 4$ 의 개념 이미지 분석

피제수가 분수인 이 문항도 포함제 5.6%, 등분제 94.4%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 66%, 그림과 언어로 동시에 2%, 언어 25%, 무응답 7%로 나타났다. 그림에 사용된 모델로는 원 52.9%, 직사각형 33.9%, 수직선 8.8%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용 4.4%가 있다.. 원을 사용한 경우의 4등분 중 한 조각의 1/4원을 이용하는 경우, 원 하나로 표상하였고, 직사각형의 경우는 대부분 직사각막대로 나타내는 것에 2×2 직사각형으로 나타내기도 하였다. 언어로 표상한 경우 설명 35.7%, 상황 제시 28.6%, 문제와 답 21.4%, 역수곱 14.3%로 나타났다.  $\frac{1}{4}$  나누기를 곱셈으로 계산하는 등 계산 실수를 범하는 학생도 여럿 있었다.

라) 문항 9번  $\frac{3}{4} \div 2$ 의 개념 이미지 분석

이 문항에서도 (분수) $\div$ (자연수)에 해당하는 모든 문항에서와 마찬가지로 포함제 4.9%, 등분제 95.1%로, 등분제 개념 이미지가 대부분을 차지했다. 표상 방법으로는 그림 63%, 그림과 언어로 동시에 6%, 언어 20%, 무응답 11%로 나타났다. 그림으로는 원 55.1%, 직사각형 30.5%, 수직선 7.2%, 그리고 원과 직사각형을 함께 사용하는 경우도 7.2%이다. 원을 사용한 경우의 34.2%는 4등분 중 세 조각의 3/4원을 이용해 그것을 전체로 반을 나누며 표현하거나 원 전체에서 1/4부분을 색칠하고 그것을 반으로 나누는 식으로 표상하였다. 직사각형의 경우는 직사각막대는 물론이고, 2 $\times$ 4직사각형과 2 $\times$ 2직사각형을 사용하기도 한다. 언어로 표상한 경우 설명 25%, 상황 제시 15%, 문제와 답 40%, 역수곱 20%로 나타났다.

3) 진분수끼리의 나눗셈 개념 이미지 분석

분수끼리의 나눗셈 (문항10,11,13번)	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$		$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
포함	8	100	17	94.4	12	100	37	97.4
등분	0	0	1	5.6	0	0	1	2.6
합계	8	100	18	100	12	100	38	100

<표Ⅲ-9> (진분수) $\div$ (진분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

분수끼리의 나눗셈 (문항10,11,13번)	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$		$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$		$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$		합계	백분율
	응답수	백분율	응답수	백분율	응답수	백분율		
그림	57	57	64	64	58	58	179	59.6
그림과 언어	2	2	1	1	2	2	5	1.7
언어	27	27	23	23	28	28	78	26.0
무응답	14	14	12	12	12	12	38	12.7
합계	100	100	100	100	100	100	300	100

<표Ⅲ-10> (진분수) $\div$ (진분수)의 표상 방법 유형 분석

분수끼리의 나눗셈인 (진분수) $\div$ (진분수)는 초등학교 6학년 2학기에 도입되는 개념이다. 우선 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 색막대를 자르는 활동을 통해 몇 개가 들어있는지 알아보는 활동을 한 후에, 그 다음 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 도입한다. 통분을 해서 분모가 같게 만든 후에 분모가 같은 진분수끼리의 나눗셈을 하는 방법을 사용한다. 이러한 방법으로 활동을 한 후에는 통분을 하여 푸는 방법을 공식화하여 변형하면 역수의 곱으로 나눗셈이 이루어진다는 원리를 알아내는 것이다. 차례가 그리한데 질문지에  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 를 먼저 놓은 이유는 그 전 문제인 문항 9번을 보면 그 까닭을 알 수 있다. 학생들이 가장 많이 하는 실수 중 하나가  $\frac{1}{2}$ 을 곱하는 것과  $\frac{1}{2}$ 을 나누는 것 모두 2로 나누는 개념으로 혼동하고 있다. 그리하여  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 를  $\frac{3}{4} \div 2$  바로 다음에 놓아서 혼동되지 않도록 하였다.

가) 문항 10번  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 의 개념 이미지 분석

분수끼리의 나눗셈에서는 100% 포함제 개념 이미지가 사용된다. 제수가 분수가 되면 등분제를 사용하기 어렵기 때문에 학생들은 포함제를 사용하고 있었다. 표상 방법에는 57%가 그림, 2%가 그림과 언어를 동시에, 27%가 언어만을 사용하였고 응답하지 않은 학생이 14%나 되었다. 그림을 사용한 경우 원이 57.6%, 사각형이 37.3%, 수직선이 5.1%로 나타났다. 언어를 사용한 경우 설명 52.6%, 상황 제시 5.3%, 문제와 답을 표현 42.1%로 실제 문제 상황을 만들어 제시하는 경우가 현저히 줄어들었다. 이는 진분수끼리의 나눗셈 상황이 현실 상황에 자주 쓰이지 않으며 교과서 상에서도 색막대와 같은 모델만 사용하기 때문으로 보인다. 100명의 응답 중 개념 정의 중 하나인 역수곱의 원리를 이용한 응답은 13%, 통분을 사용한 응답은 2%였고, 일부러 9번 문항 바로 다음 문항으로 놓았음에도 불구하고 2로 나누는 것이라는 오개념이 존재하고 있었다 (9%).

나) 문항 11번  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ 의 개념 이미지 분석

이 문항은 동분모 진분수끼리의 나눗셈이어서 포함제로 나타내기 수월한 것으로 드러났다. 94.4%가 포함제를, 5.6%가 등분제로 나타났다. 표상 방법에는 그림 64%, 그림과 언어 1%, 언어 23%, 무응답 12%로 나타났다. 그림에 사용된

모델로는 50.8%가 원, 40%가 사각형, 7.7%가 수직선이였다. 분수의 표상이기 때문에 원을 사용하는 경우 날개보다는 원 하나를 나누는 것으로 사용하였고, 직사각형도 직사각막대를 주로 사용하였다. 언어의 경우 설명 30%, 상황 제시 10%, 문제와 답 30%, 역수의 곱을 설명하는 경우가 30%로 나타났다. 역수의 곱을 나타내는 개념 이미지는 그림과 언어 모두 포함해서 전체의 17%, 통분 개념 이미지는 2%로 나타나 다양한 개념 이미지를 구성해나가는 것으로 나타났다.

다) 문항 13번  $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ 의 개념 이미지 분석

100%의 포함제로 개념이미지가 분석된 이 문항은 표상 방법이 그림 58%, 그림과 언어 2%, 언어 28%로 표현되어 있고, 무응답은 12%가 된다. 그림에서는 45%의 원, 40%의 사각형, 8.3%의 수직선과 그 외의 모델로 6.7%가 나타났다. 언어 표현에서는 설명 41.2%, 상황 제시로 17.6%, 문제와 답으로 41.2%가 있다. 전체에서 역수곱 원리가 사용되는 개념이미지는 14%, 분수의 통분은 4%로 나타났다.

4) (자연수) $\div$ (분수)의 개념 이미지 분석

자연수와 분수의 나눗셈-(자연수) $\div$ (분수) (문항 12번)	$3 \div \frac{1}{2}$		합계	백분율
	응답수	백분율		
포함	14	100	14	100
등분	0	0	0	0
합계	14	100	14	100

<표Ⅲ-9> (자연수) $\div$ (분수)의 포함·등분제 개념 이미지 유형 분석

자연수와 분수의 나눗셈-(자연수)÷(분수) (문항 12번)	$3\div\frac{1}{2}$		합계	백분율
	응답수	백분율		
그림	63	63	63	63
언어	3	3	3	3
그림과 언어	22	22	22	22
무응답	12	12	12	12
합계	100	100	100	100

<표Ⅲ-10> (자연수)÷(분수)의 표상 방법 유형 분석

가) 문항 12번  $3\div\frac{1}{2}$ 의 개념이미지

이 문항은 100% 포함제 개념 이미지를 나타내었다. 그림이 63%, 그림과 언어 3%, 언어 22%, 무응답 12%로 이루어졌다. 그림에 사용된 모델로는 51.5%로 원이, 36.4%로 직사각형, 7.6%로 수직선, 그 외 배 그림과 같은 구체물 4.5%로 나타났다. 언어로 표현할 때는 설명이 42.1%, 상황 제시가 10.5%, 문제와 답을 표현하는 것이 15.8%, 기타 역수의 곱이나 통분으로 나타내는 경우 31.6%가 있다. 전체에서 역수곱으로 표현한 경우는 23%이며 생각보다 오개념도 많이 생성되는 문항이었다(34%).

#### IV. 결론 및 제언

본 연구는 분수와 나눗셈에 대한 초등학교 학생들의 개념 이미지를 분석하였고, 연구 결과 교과서 안의 개념 정의를 학생들 스스로 개념 이미지화하여 다양한 유형으로 만들어나가고 있다는 것을 알 수 있었다.

분수의 개념 이미지는 대체로 전체와 부분의 의미로 직사각형이나 원을 등분하여 색칠함으로써 표현하는 경우가 대다수였다. 그 외에도 비의 개념이나 몫의 의미로서의 분수의 개념을 표상하기도 하였다.

나눗셈의 개념 이미지는 등분제보다는 포함제로 나타내는 경우가 비율 상 많았다. 특히나 분수가 제수로 쓰이는 상황에서는 100%로 포함제만으로 개념 이미지를 형성하였다. 분수가 실제적인 개념보다는 추상적 개념에 가깝기 때문에 등분을 하는 것이 어려워 포함제로 표상할 수 밖에 없는 것으로 보인다. 특히나 분수의 개념 자체가 전체와 부분의 관계로 추상적이기 때문에 분수의 나눗셈 상황을 이미지화시키는 것에서는 많은 학생들이 오개념을 지니고 있는 것으로 나타났다.

분수와 나눗셈에 대한 개념 이미지를 표상한 결과를 종합해보면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 교과서에 제시된 개념 정의를 변형시키거나 자신의 것으로 재해석하여 다양한 개념 이미지를 만들어내고 있음을 알 수 있었다. 학생들의 개념 이미지는 일률적이지 않았고 나름의 원리와 규칙을 가지고 존재하고 있었다. 그러나 절차적인 지식 위주의 현재의 교육 여건 상 의미 있는 개념 이미지를 만들어나가는 것을 어려워하고 있는 것으로 나타났다. 그래서 과정보다는 결과 위주의 표상을 나타내는 경우가 많았으며 정확하지 않은 개념이나 오개념을 지니고 있는 경우도 흔하게 드러났다.

둘째, 학생들은 대체로 그림으로 개념 이미지를 표상하나, 그림만으로 설명이 안 될 때는 그림과 언어를 동시에 사용하였다. 그리고 개념이 어려워질수록 언어로 표현하는 경우가 점점 늘어나고 있는 것으로 나타났다. 그림으로 나타내는 경우, 학생들이 사용하는 모델들은 정형화된 직사각형, 원 모델이 대다수였으며 그 외에도 실생활에 사용되는 구체물(사과, 사탕 등)로 나타내기도 하였다. 언어로 표상할 때에는 푸는 방법의 설명이나 답을 구하는 공식 등의 절차적 지식이

주를 이루었다.

셋째, 교육과정 상 뒤로 갈수록 개념의 확장이 이루어져 학생들이 개념 이미지를 나타내는데 어려워했다. 그래서 무응답이나 오개념의 비율이 늘어났고, 그림과 언어 중에 언어로 표현하여 절차적인 지식 위주의 설명만 하는 경우가 많았다.

그러나 이 연구는 제한된 지역에서 100명의 연구 대상만으로 개념 이미지를 조사하였기 때문에 이러한 개념 이미지들을 일반화하기에는 무리가 있다. 게다가 학생들이 머릿속의 개념 이미지가 질문지에 충분히 표상되었다고 보기도 어렵다. 그러므로 앞으로 학생들의 개념 이미지를 질문지의 형식을 학생들의 머릿속 개념 이미지를 충분히 표상할 수 있도록 개발한다든지, 질문지뿐만 아니라 면담이나 관찰을 통한 개념 이미지 분석이 이루어져도 좋을 것 같다.

분수와 나눗셈 개념은 초등학교 학생들의 인식 수준에서는 형상화하기 어려운 개념이다. 이러한 개념 이미지를 연구해봄으로써 학생들이 분수와 나눗셈에 대해 구성하는 다양한 개념 이미지 양상을 알 수 있어서 앞으로 수학 교육에서의 개념 학습의 방향에 대해 생각해 볼 수 있었다. 학생들의 다양한 개념 이미지에 맞게 여러 가지 방법으로 개념을 설명하고 예를 들어주며 절차적인 공식이나 지식보다는 과정 중심의 학습으로 구성해나가고 아울러 학생들의 인지적 과정에 걸맞은 교수·학습 방법을 개발해나갈 수 있도록 해야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

### 참 고 문 헌

- 교육과학기술부. (2002). **교사용지도서**. 대한교과서 주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 3-가**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 3-나**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 4-가**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 4-나**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 5-가**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 5-나**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 6-가**. 대한교과서주식회사.
- 교육과학기술부. (2003). **수학 6-나**. 대한교과서주식회사.
- 류희찬, 조완영, 김인수(공역). (2003). **고등 수학적 사고**. 경문사.
- 배중수. (2002). **수학교육에서의 개념 형성**. 대한수학회소식.
- 김미령. (2004). **초등수학에서 학생이 갖고 있는 개념 이미지 유형 분석**. 석사학위논문. 서울교육대학교 수학교육과.
- 최창우. (2002). **초등수학 학습에 있어서 표상에 관한 고찰**. 한국수학교육학회 학술지. 대구교육대학교.
- 한길준, 우호식. (2001). **고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색**. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 제 40권 제 2호. 241-252
- 엄재엽. (2009). **초등학생의 분수 계산에서 나타나는 오류의 유형 분석**. 석사학위논문. 대구교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공
- 김민정. (2004). **자연수 나눗셈 오류 유형 진단 및 교정**. 석사학위논문. 경인교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공
- 최영주. (2005). **초등학교 학생들의 분수 오개념 분석 및 분수 개념 형성**. 석사학위논문. 전주교육대학교 교육대학원 초등수학교육전공
- Skemp. R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates. Inc. New Jersey.
- Tall. D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Vinner. S. (1991). *The role of definition in the teaching and learning of mathematics*. In D. Tall(Ed). *Advanced mathematical Thinking*(pp. 65-81).

Boston : Kluwer Academic Publishers.

Vinner. S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function Intuition Journal of Mathematical Education in Science and Technology.



## A B S T R A C T \*

Analyzing 'Concept Image' about fractions and divisions in Elementary school mathematics

Shin, Seong hee

Major in Elementary Mathematics Education  
Graduate School of Education  
Jeju National University

Supervised by Professor Choi, Keunbae

Students construct images and experiences to found concepts through various works or activities. In relative with concept name, it is called 'Concept Image' that one makes non-verbal thing as combining previous experiences.

Student makes Concept image. It will be the basic of solving problems in math and be used constructing another concept. It is necessary to analyze various type of concept image that students have made in reality, understand mechanism for student studying math concept and remedy against constructing wrong concept.

This study analyzes concept image about fractions and divisions as creating two stages of questionnaires and making students fill out them.

Students represented the concept image of fraction by dividing and coloring rectangle or circle in meaning of the whole and section, besides of representing the concept to proportion or quotient.

---

\* A thesis submitted to the committee of Graduate School of Education, Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education conferred in August, 2011.

A large proportion of the case is representing division by equal part more than division into equal parts in division concept image. It is found that a lot of students have wrong concept about imagification of fractional division, because fractional concept is abstract as the relation whole and part.

As a result of analyzing concept image of fraction and division, it is found that students make various concept image by changing or reinterpreting concept definition in textbook. And they represent concept image by pictures, but when it has problem to explain only pictures, they use not only pictures also words. Students have difficulty to represent concept image in latter part of curriculum, as extension of concept.

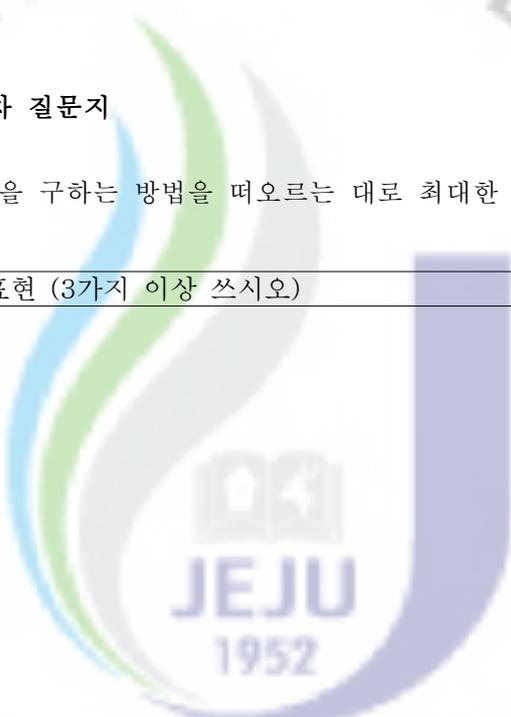
It is difficult to give the impression of fraction and division concept in the cognizance level of primary students. As studying concept image, it is easy to understand the imagination form that students construct about fraction and division. Also it is realized that teacher makes process-based learning by explaining concept with various way matching student concept image and giving more examples than mathematical formula or knowledge.

## 부 록

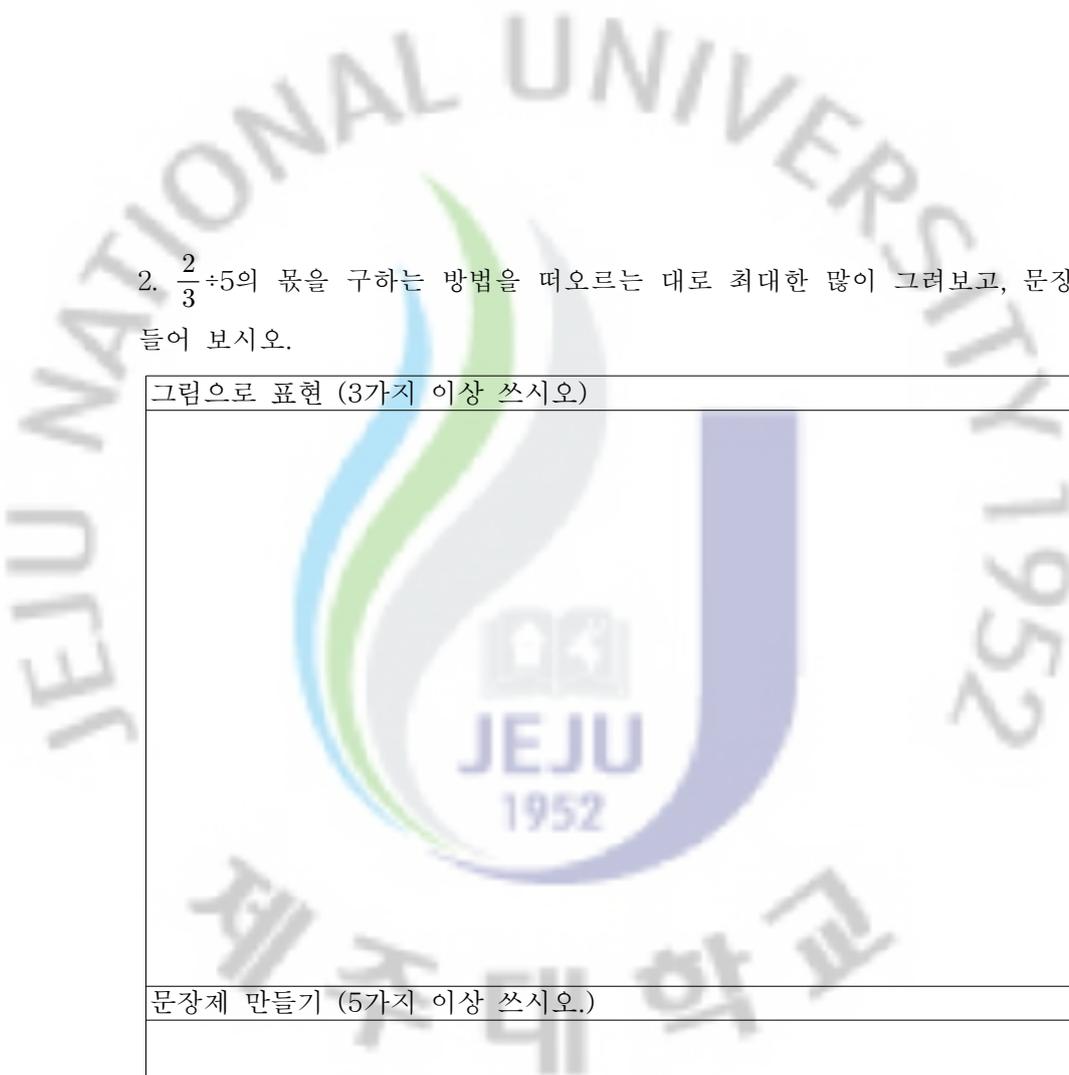
[부록 1] 1차 질문지 .....	52
[부록 2] 2차 분수 개념 이미지 질문지 .....	54
[부록 3] 2차 나눗셈 개념 이미지 질문지 .....	56
[부록 4] 분수 개념 이미지 유형 분석 .....	58
[부록 5] 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석 .....	72
[부록 6] 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석 .....	80
[부록 7] 분수의 곱셈 개념 이미지 유형 분석 .....	100
[부록 8] 자연수끼리의 나눗셈 개념 이미지 유형 분석 .....	108
[부록 9] (분수) $\div$ (자연수)의 개념 이미지 유형 분석 .....	135
[부록 10] (진분수) $\div$ (진분수)의 개념 이미지 유형 분석 .....	153
[부록 11] (자연수) $\div$ (분수)의 개념 이미지 유형 분석 .....	167

[부록 1] 1차 질문지

1.  $6 \div 2$ 의 몫을 구하는 방법을 떠오르는 대로 최대한 많이 그려보고, 문장제도 만들어 보시오.

그림으로 표현 (3가지 이상 쓰시오)
 The logo of Jeju National University, featuring a stylized flame or leaf shape in blue, green, and grey, with a book icon and the text 'JEJU 1952' below it.
문장제 만들기 (5가지 이상 쓰시오.)

2.  $\frac{2}{3} \div 5$ 의 몫을 구하는 방법을 떠오르는 대로 최대한 많이 그려보고, 문장제도 만들어 보시오.

<p>그림으로 표현 (3가지 이상 쓰시오)</p> 
<p>문장제 만들기 (5가지 이상 쓰시오.)</p>

[부록 2] 2차 분수 개념 이미지 질문지

- ♠ 분수에 관한 여러분의 수학적 생각을 알아보는 질문들입니다.
- ♠ 재미나 그림솜씨를 보는 것이 아니므로 그림으로 표현할 때는 간단한 도형이나 선으로 표시하도록 합니다.
- ♠ '+, -, ×, ÷' 이나 '='와 같은 수학 기호를 사용하지 않도록 해요.
- ♠ 수학적으로 떠오르는 과정을 글이나 간단한 그림으로 나타내보세요.

1.  $\frac{1}{2}$ 로 떠오르는 이미지를 그림이나 언어로 나타내보세요.
2. 12의  $\frac{3}{4}$ 이 의미하는 것을 그림이나 언어로 나타내보세요.
3.  $\frac{3}{2}$ 으로 떠오르는 이미지를 그림이나 언어로 나타내보세요.
4.  $1\frac{2}{3}$ 로 떠오르는 이미지를 그림이나 언어로 나타내보세요.
5.  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ 을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
6.  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ 을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

7.  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

8.  $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

9.  $\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

10.  $1\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

11.  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

12.  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$  을 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

[부록 3] 2차 나눗셈 개념 이미지 질문지

- ♠ 나눗셈에 관한 여러분의 수학적 생각을 알아보는 질문들입니다.
- ♠ 그림 솜씨나 재미있는 이야기를 보는 것이 아니므로 그런 것에 집중하지 말고 그림을 그릴 때는 간단한 도형이나 선으로 표현하세요.
- ♠ ‘÷’ 이나 ‘=’와 같은 수학 기호를 사용하지 않도록 해요.
- ♠ 계산식을 보고, 떠오르는 과정을 글이나 간단한 그림으로 나타내보세요.

1.  $8 \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
2.  $3 \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
3.  $2 \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
4.  $1 \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
5.  $2 \div 4$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.
6.  $\frac{1}{2} \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

7.  $\frac{1}{4} \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

8.  $\frac{1}{4} \div 4$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

9.  $\frac{3}{4} \div 2$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

10.  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

11.  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

12.  $3 \div \frac{1}{2}$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

13.  $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ 를 공식을 사용하지 말고 그림이나 언어로 풀어보세요.

[부록 4] 분수 개념 이미지 유형 분석

1번	방 법	모 델	$\frac{1}{2}$ 의 개념이미지
1	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
2	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
3	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
4	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
5	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
6	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
7	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
8	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
9	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
10	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
11	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
12	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
13	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
14	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
15	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
16	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
17	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
18	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
19	그림	사각형	2등분 직사각막대 중 1칸 색칠
20	그림	사각형	전체 “!” 표시된 2등분 직사각막대 중 1칸에 “1/2” 표시
21	그림	사각형	2*4직사각형의 4칸(반)에 색칠
22	그림	원하나	원 반에 색칠
23	그림	원하나	원 반에 색칠
24	그림	원하나	원 반에 색칠
25	그림	원하나	원 반에 색칠
26	그림	원하나	원 반에 색칠
27	그림	원하나	원 반에 색칠
28	그림	원하나	원 반에 색칠
29	그림	원하나	원 반에 색칠
30	그림	원하나	원 반에 색칠
31	그림	원하나	원 반에 색칠
32	그림	원하나	원을 반으로 나누고 반에 화살표
33	그림	원하나	원을 반으로 나누고 반에 표시“1/2”

34	그림	원하나	원을 반으로 나누고 반에 표시“1/2”
35	그림	1/2원	반원
36	그림	1/2원	반원
37	그림	1/2원	반원
38	그림	1/2원	반원
39	그림	1/2원	반원
40	그림	1/2원	반원
41	그림	1/2원	반원
42	그림	1/2원	반원
43	그림	수직선	2등분 수직선 중 한 칸
44	그림	1/2원,수직선	반원, 전체 1 수직선 중 반 “1/2”
45	그림	타원	긴 타원을 선으로 반 나뉘 반에 색칠
46	그림	타원	긴 타원을 선으로 반 나뉘 반에 색칠
47	그림	사과	사과를 반 나눔
48	그림	사과	사과를 반 나뉘 반만 동그라미
49	그림	사과	사과 점선으로 반 나눔
50	그림	과일	사과, 배, 수박 모두 반쪽에 색칠
51	그림	삼각형	삼각형 반에 색칠
52	그림	무	무(원통형) 칼로 반 자름
53	그림과 언어	수직선	전체 1 수직선 중 반, “전체 1에서 두 개로 나눈 것”
54	그림과 언어	피자상황,원	피자를 사서 반을 먹음, 8등분 원의 반에 색칠
55	그림과 언어	밭상황,사각형	밭 전체의 1/2에 배추 심고 나머지 당근 심은 밭은 몇 분의 몇인가?, 직사각형 반에 색칠된 그림
56	언어	설명	사과 반
57	언어	설명	1의 반
58	언어	설명	반
59	언어	설명	전체의 절반
60	언어	떡상황	엄마가 떡 1개를 주었는데 반을 먹으면 1/2가 남음
61	그림	원날개	원 2개 중 하나
62	그림	원날개	원 2개 중 하나
63	그림	사과	사과 2개 중 하나
64	언어	설명	두 개 중 한개
65	그림	원날개	분모에 원2개 분자에 1개
66	그림	원하나	원 반에 색칠
67	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠

68	그림	대한민국	대한민국 반(38선) -같은 크기가 아님
69	그림	직사각형	직사각형을 점선으로 반 자르고 색칠
70	그림	직사각형	직사각형의 반에 색칠
71	그림	원	원 반 색칠
72	그림	직사각형	직사각형을 점선으로 반 자름(색칠x)
73	그림, 언어	원	원 반에 색칠 후 “반”
74	그림	원	원 하나를 선 하나로 반 자름(색칠x)
75	그림	타원	원 두 개를 두 사람이 먹음(틀림)
76	그림	원	원 반에 색칠
77	그림	원	원 반에 색칠
78	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
79	그림	사람그림	사람 모양 그림의 반
80	그림	원	원 반 색칠
81	그림	사과	사과 반에 색칠
82	그림	원	원 세 개 (무슨의미인지 모르겠음)
83	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
84	그림	원	원 반에 색칠
85	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
86	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
87	언어	언어	“반”
88	그림	비커,물	비커에 물이 반
89	그림	사과,사람	사과 한 개를 2사람이 나눠먹는 상황
90	그림	원	반원
91	그림과 언어	원	원 반에 색칠, “2개중의 하나”
92	그림, 숫자	직사각형	직사각형 반에 색칠 후 전체에 1, 반에 1/2
93	그림과 언어	직사각형	직사각형 반에 색칠, “2개중의 한개”
94	그림	원	원 반 색칠
95	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
96	그림	빵, 물	타원빵에 반 색칠, 물병 반이 찬 것
97	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠
98	그림	원	원 반 색칠
99	그림	원	원 반 색칠
100	그림	원	원 반에 색칠

2번	방 법	모 델	12의 $\frac{3}{4}$ 의 개념 이미지
1	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
2	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
3	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
4	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
5	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
6	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
7	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
8	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
9	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
10	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
11	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
12	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
13	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
14	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
15	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
16	그림	사각형	12등분 직사각막대 중 9칸 색칠
17	그림	사각형	12등분 직사각막대, 4등분 중 3칸 색칠
18	그림	사각형	전체를 12로 표시한 4등분직사각막대 중 3칸 색칠
19	그림	사각형	전체를 12로 표시한 4등분직사각막대 중 3칸 색칠
20	그림	사각형	전체를 12로 표시한 4등분직사각막대 중 3칸 색칠
21	그림	사각형	전체를 12로 표시한 4등분직사각막대 중 3칸 색칠
22	그림	사각형	4*3직사각형 중 9칸에 색칠
23	그림	사각형	4*3직사각형 중 9칸에 색칠
24	그림	사각형	4*3직사각형 중 9칸에 색칠
25	그림	사각형	2*2직사각형 한 칸당 3이라고 써놓고 3칸 색칠
26	그림	원날개	12개의 원을 4칸으로 나뉘 3칸에 해당하는 원에 색칠
27	그림	원날개	12개의 원을 4칸으로 나뉘 3칸에 해당하는 원을 묶음
28	그림	원날개	12개의 원을 3개씩 묶은 것 중 3묶음
29	그림	원날개	12개의 원을 3개씩 묶은 것 중 3묶음

30	그림	원날개	12개의 원을 3개씩 묶은 것 중 3묶음에 색칠
31	그림	원날개	12개의 날개 원을 3개씩 3묶음만 묶음
32	그림	원날개	12개의 날개 원을 3개씩 3묶음만 묶음
33	그림	원날개	12개의 날개 원을 3개만 묶음
34	그림	원날개	12개의 날개 원을 3개만 묶어 빼면 남은 9개의 원
35	그림	원하나	12등분 원 중 3/4에 해당하는 9칸 색칠
36	그림	수직선	전체 12인 4등분 수직선의 3칸에 “3/4” 표시
37	그림	수직선	전체 12인 4등분 수직선의 칸마다 “3” 표시하고 “9” 적음
38	그림	수직선	12등분 수직선의 9칸에 표시
39	그림	수직선	12등분 수직선의 9칸에 표시
40	언어	설명	12를 4로 나눈 것 중 3
41	언어	사탕상황	사탕을 4묶음으로 묶고 그 중 3개
42	언어	사과상황	사과를 12조각으로 나뉜 4명이 나뉜 먹는 중 3명이 먹은것
43	그림과 언어	원날개	4*3 배열인 원날개 중 9개 묶음, “12를 4로 나눈 것 중 3개”
44	그림과 언어	원날개	12개의 날개 원을 3개씩 3묶음만 묶음, “12를 3개씩 묶어 4개의 묶음으로 나눈 것 중 3개”
45	그림과 언어	원날개	12개의 날개 원을 4칸으로 나뉜 3칸을 전체 묶음, “12의 3/4은 12를 4로 나눈 것 중 3묶음이라는 뜻”
46	그림과 언어	피자	피자그림, “12조각 피자 4개씩 묶고 그 중 3묶음 그래서 3/4는 3조각이 한묶음이 3개로 총 9개”
47	그림	사각형, 원 날개	원 12개와 3/4 직사각막대
48	그림	수직선	9칸 수직선
49	그림과 언어	사각형	사람 12명 중에 3/4직사각막대 명
50	언어	사과상황	사과 12개의 3/4를 친구에게 주면 9개
51	언어	복숭아상황	복숭아 12개 중 3/4을 친구에게 줬다
52	그림	사각형	9등분된 직사각막대 중 3칸에 색칠(??)
53	그림	사각형	12등분된 직사각막대 중 8칸에 색칠(??)
54	그림	사각형	12개의 직사각형 과 3/4 직사각형(2*2) 하나 (12와 3/4)
55	그림	사각형	4*3 직사각형의 3등분 중 한칸을 3/4로 나눔(등분안3/4)

56	그림	사각형	12등분된 직사각막대 4칸을 나눠 그 중 3칸에 색칠(등분안3/4)
57	그림	원하나	12등분 원 4칸 중 3칸에 색칠(등분 안에 3/4를 표시한듯)
58	그림	원하나	3/4원
59	그림	사과	12개의 사과와 4등분 중 3칸 색칠된 한 개의 사과(12와 3/4)
60	그림	수직선	4등분 중 3칸에 표시
61	언어	떡상황	떡이 3/4있는데 삼촌이 12개를 주었더니 12와 3/4
62	언어	상황	전체의 12를 동생이 3/4 먹었는데 나머지는 얼마?
63	그림과 언어	사각형	4/4직사각막대 12개와 3/4직사각막대 1개, “자연수 12와 3/4을 더한 것”(12와 3/4)
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	원	12개의 원을 3개로 묶어 그 중 3묶음을 묶어 표시
67	그림	직사각형	12개의 직사각형 중 3개를 묶어주고 그 중 3묶음에 색칠
68	그림	타원	12개를 나눈 뒤 9개에 색칠됨 (그러나 등분이 아님)
69	그림, 언어	직사각형	12개의 직사각형을 4개씩 나누고 그 4개 중 3개를 색칠해서 총 9개 색칠, “3이 3개 9”
70	그림	직사각형	직사각형 4등분 중 3개 색칠
71	그림	원	원 12개에 원 3/4를 그려서 12와 3/4을 그림(대분수와 혼동)
72	그림	직사각형	직사각형 12개 중 9개 색칠
73	그림	직사각형	직사각형 12개 중 9개 색칠
74	그림, 숫자	직사각형	직사각형 12개 나눈 것을 3개씩 선으로 나눠 3묶음에 색칠 // 12를 3, 3, 3, 3 나눈 후 3개 묶음
75	그림	직사각형	직사각형 4*3으로 나눈 것 중 9칸 색칠
76	그림, 숫자	원	원을 4등분 한 중 3개 색칠, “12”
77	그림	원	원을 4등분 한 중 3개 색칠
78	그림	직사각형	12개의 직사각형 중 9개에 색칠함
79	그림, 언어	사람	사람 12명 그려서 3명씩 팀을 이뤄 3팀에 색칠 “12명을 3명씩 묶은 4팀 중에 3팀”
80	그림	원	12개의 원을 3개가 되는 부분을 잘라서 3 부분 자체를 색칠 (원에만 색칠하는게 아니라 3개 있는 부분을 잘라 부분 색칠)

81	그림	원	원 12개를 3개씩 묶어 4묶음 중 3개에 색칠
82	그림, 식	원	원 12개를 3개씩 묶어 4묶음을 만들, “ $3 \times 4 = 12$ ”
83	그림	직사각형	직사각형을 $4 \times 3$ 으로 나눈 후 4개 중 3개를 칠한 것이 3묶음으로 9개 색칠
84	그림, 언어	직사각형	직사각형을 4등분 중 3개를 색칠, 전체에 “12”라고 씀
85	그림	직사각형	12개의 직사각형의 한 칸을 4개씩 나눠 3칸만 색칠(12를 전체로 생각못함)
86	그림	직사각형	12를 3부분으로 나누기만 함
87	그림	직사각형	12개를 3개씩 나눠 그 중 3묶음을 묶음
88	그림	원	원 12개를 그리고 전체를 묶은 후 4등분으로 나눈 후 3등분에 색칠
89	그림	원	12개의 원을 주머니 속에 넣고 주머니에 3개씩 나눠 실선을 그려 그 중 9개의 원에 색칠함
90	그림, 언어	직사각형	직사각형을 4등분을 한 뒤 3개 색칠, 가운데 “12개”라고 씀
91	그림, 언어	수직선	12까지의 수직선에서 3칸씩 길게 표시해서 “12의 $\frac{1}{4}$ , 12의 $\frac{2}{4}$ , 12의 $\frac{3}{4}$ ” 라고 쓰며 9칸을 표시
92	그림	직사각형	12등분으로 나눈 직사각형 중 9개 색칠
93	그림, 언어	직사각형	“12개를 4묶음으로 나눈 후 $\frac{3}{4}$ 이니까 3개 색칠함”(그림도 동일)
94	그림, 언어	원	원 하나를 4등분한 뒤 3개 색칠 “전체 12”
95	그림	원	원을 12부분으로 나눈 것 중 9개
96	그림	원	원 12개를 4개씩 묶은 중 3개를 색칠해 총 9개를 색칠
97	그림	원	원 12개에 원 $\frac{3}{4}$ 를 그려서 12와 $\frac{3}{4}$ 을 그림(대분수와 혼동)
98	그림	원	원 12개를 3개씩 4묶음으로 만든 후 그 중 3묶음에 색칠
99	그림	직사각형	4개씩 선으로 나누고 그 4개 중 3개씩 색칠해서 9개 색칠
100	그림, 언어	직사각형	직사각형을 12개 이은 것을 3개씩 다 똑같이 나눈 후 3묶음을 색칠

3번	방 법	모 델	$\frac{3}{2}$ 의 개념이미지
1	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
2	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
3	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
4	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
5	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
6	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
7	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
8	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
9	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
10	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
11	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
12	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
13	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
14	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
15	그림	원하나	원 하나와 1/2색칠원
16	그림	원하나	원 하나와 반원
17	그림	원하나	원 하나와 반원
18	그림	원하나	원 하나와 반원
19	그림	하트	하트 하나와 반개
20	그림	사과	사과 반쪽이 3개 -> 사과 하나와 반개
21	그림	원달걀	원 3개 중 2개 묶음
22	그림	사과	사과 3개 중 2개 묶음
23	그림	사각형	직사각형 1 -> 2등분직사각막대 -> 반칸 더 추가(직사각형1)
24	그림	사각형	2등분 직사각막대에 점선으로 1칸 더 추가(직사각형1)
25	그림	사각형	한 칸이 1/2인 3칸짜리 전체 3/2 직사각막대
26	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
27	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
28	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
29	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
30	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
31	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
32	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
33	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
34	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
35	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
36	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
37	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
38	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
39	그림	사각형	2등분 직사각형 2개 중 하나 반 색칠
40	그림	수직선	전체 3/2인 3칸 수직선
41	그림과 언어	색연필 상황	3/2은 1과 1/2, 색연필이 2개 있는데 1은 2개 중 한 개, 1/2은 남은 1개 중 반개 그래서 1개 반 색연필 그림

42	그림과 언어	차,사람	2인 정원 차에 3명의 사람 (비의 개념?)
43	언어	피자상황	피자 1판과 한 판의 반 개
44	언어	사과상황	사과 1개와 반쪽
45	언어	물상황	컵이 2컵 있는데 물은 3컵 양(비의 개념)
46	언어	설명	2로 나눈 것 중 3개(전체와 부분의 분수)
47	그림	사각형	3등분 직사각형 중 2칸과 반칸에 색칠(2와 1/2? 1과 1/2?)
48	그림	붕어빵	붕어빵 한 개와 반개(등분X)
49	그림	설명	대두그림, “대두”
50	언어	설명	넘친다?
51	언어	설명	3/2, 가분수
52	언어	설명	가분수
53	그림	사각형	2/3직사각막대
54	그림	사각형	3등분 직사각막대-> 한 칸이 사라짐
55	그림	사각형	2개 사각형 묶음, 3개 사각형 묶음
56	그림	원하나	3/4원
57	그림	원하나	1/2원
58	그림	원날개	원 5개 중 3개 묶음
59	그림	원날개	분모 원 2개 분자 삼각형 3개(3/2)
60	그림	원날개	원하나와 분모 원2개 분자 원 1개(1과 1/2)
61	언어	사과상황	사과 2개를 3명이서 나눠 먹음(2/3??)
62	언어	피자상황	피자 2판을 4명이 먹는데 3명이 먹은 양(??)
63	언어	숫자?	15000원?
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	원	전체 색칠된 2등분 원 한 개, 전체 색칠된 반원 한개
67	그림	비커	두 비커 중 하나는 다 차고 하나는 반만 찬 그림
68	그림	곤충	막대기 사이에 곤충이 밑에 2개 위에 3개 (3/2를 형상화함)
69	그림, 언어	직사각형	두 개로 등분된 직사각형 두 개, 하나는 다 색칠되고 다른 하나는 반만 색칠됨 “1/2이 3개 3/2”
70	그림	직사각형	두 개로 등분된 직사각형 두 개, 하나는 다 색칠되고 다른 하나는 반만 색칠됨
71	그림	원	다 색칠 된 원 한 개와 반이 색칠된 점선으로 이등분 원 한 개 그림(1과 1/2 같음)
72	그림	직사각형	두 개로 등분된 직사각형 두 개, 하나는 다 색칠되고 다른 하나는 반만 색칠됨
73	그림	원	전체 색칠 안된 원 하나와 반이 색칠된 2등분된 원 하나
74	그림	직사각형, 원	직사각형 3칸

75	그림, 언어	직사각물통	“0.5,1,1.5,2L” 눈금이 표시되어 있는데 1.5L까지 물이 참
76	그림	원	2등분 원 전체 색칠 옆에 “1”이라고 씀
77	그림	원	2등분된 원이 두 개인데 하나는 전체 색칠, 다른 하나 반만 색칠
78	그림	원	두 등분된 원이 두 개, 하나는 다 색칠되고 하나는 반만 색칠됨
79	그림, 언어	사람	두 명을 화살표해서 “1=2/2”, 다른 한 명이 달려오며 “나도 동참”이고 화살표로 “1/2”라고 표시(한 명을 1/2?)
80	그림	원	다 색칠 된 원 한 개와 반이 색칠된 점선으로 이등분 원 한 개 그림(1과 1/2 같음)
81	그림	사과	전체 색칠된 사과 하나와 반만 색칠된 이등분 사과 하나
82	그림	원	원 5개?
83	그림	직사각형	직사각형 2등분과 점선으로 된 직사각형 한 개 그림
84	그림	원	점선으로 이등분된 두 원 중 한 원은 전체 색칠, 한 원은 반만 색칠
85	그림	직사각형	두 개의 직사각형인데 하나는 점선으로 이등분된 직사각형(전체 색칠됨)/반은 그냥 선, 반은 점선으로 된 직사각형(선으로 된 직사각형만 색칠됨) 하나
86	그림	직사각형	두 개로 등분된 직사각형 두 개, 하나는 다 색칠되고 다른 하나는 반만 색칠됨
87	그림	원	점선으로 두 등분된 원이 두 개, 하나는 다 색칠되고 하나는 반만 색칠됨
88	그림	원	8등분된 원 두 개 중 하나는 전체 색칠, 하나는 4개 색칠(12/8과 같음)
89	그림	사과,사람	사과 3개를 2사람이 먹는 것 (비의 개념)
90	그림	공룡,과자	“배고픈 공룡 3마리”,“과자”, 공룡 3마리 그리고 원 세 개를 과자라고 해서 3/2를 표현(비의 개념)
91	그림	원	다 색칠 된 원 한 개와 반이 색칠된 점선으로 이등분 원 한 개 그림(1과 1/2 같음)
92	그림, 숫자	직사각형	가운데 “1”이라고 적힌 직사각형 하나와 2등분 되어 반에 색칠되고 “1/2”라고 적힌 직사각형 하나(1과 1/2 같음)
93	그림	원	다 색칠 된 원 한 개와 반이 색칠된 반으로 나눈 원 한 개 그림(1과 1/2 같음)
94	그림	원	이등분된 원이 두 개인데 하나는 전체 색칠, 다른 하나는 반만 색칠
95	그림	원	다 색칠 된 원 한 개와 반이 색칠된 반으로 나눈 원 한 개 그림(1과 1/2 같음)
96	언어	설명	1과 반이 남음(1과 1/2같음)
97	그림, 언어	직사각형	“3/2=1과1/2이므로”, 직사각형 하나 전체 색칠과 반으로 등분된 직사각형 반만 색칠
98	그림	원	원 3개와 밑에 원 두 개를 그려 표현?
99	그림, 언어	직사각형	“3/2은 즉 1과1/2이다”, 이등분된 직사각형 두 개인데 하나에 반만 색칠됨
100	그림	직사각형	직사각형 3등분 한 것중 2개 색칠 (2/3)

4번	방 법	모 델	$1\frac{2}{3}$ 의 개념 이미지
1	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
2	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
3	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
4	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
5	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
6	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
7	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
8	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
9	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
10	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
11	그림	사각형	1개 전체 색칠 직사각막대와 2/3 직사각막대
12	그림	사각형	1개 직사각형과 2/3 직사각막대
13	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
14	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
15	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
16	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
17	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
18	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
19	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
20	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
21	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
22	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
23	그림	사각형	색칠된 3/3 직사각막대와 2/3 직사각막대
24	그림	사각형	직사각막대에 “1” 표시 1칸, “1/3” 표시 2칸으로 전체 “1과 2/3”
25	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
26	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
27	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
28	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
29	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
30	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
31	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
32	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
33	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
34	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원
35	그림	원하나	색칠된 전체원 하나와 2/3원

36	그림	원하나	원 하나와 2/3원(부분만)
37	그림	원하나	원 하나와 색칠된 2/3원
38	그림	바나나	바나나 한쪽지와 2/3 바나나
39	그림	식빵	식빵 하나와 2/3 식빵
40	언어	설명	전체 1에 2/3을 더한 것
41	언어	떡상황	떡 1개 중 1/3을 먹었는데 아빠가 떡 1개를 주었더니 떡이 1과 2/3
42	언어	떡상황	떡 한 상자와 한 상자를 3등분 한 것 중 2개
43	언어	사과상황	사과 2개 중 한 개를 세도막낸 후 한 개를 먹음
44	언어	사과상황	사과 1세트(3개짜리)와 세 개 중 2개
45	언어	사과상황	사과 1개와 1개의 2/3
46	언어	사진상황	1과 2/3, 사진 2장이 있는데 1은 사진 1장, 2/3은 남은 한 개를 3개로 쪼갠 것 중 2개
47	언어	피자상황	피자 5판을 3명이 나눠먹을 때 한 사람이 먹은 양(5/3)
48	언어, 대분수	설명	대분수
49	언어, 대분수	설명	대분수
50	언어, 어림	설명	1이상 2이하
51	그림	원하나	원 하나와 3부분 중 1부분 뺀(등분이 아님)
52	그림	원날개	8개 원 중 3개 선택
53	그림	사각형	직사각형 1개와 3부분 중 2부분에 색칠(등분아님)
54	그림	사과	큰 사과 한 개(1?)와 작은 사과 3개 중 2개 묶음(2/3?)
55	그림	원하나	3/4원(?)
56	그림	원하나	1/4원, 2/4원, 3/4원(??)
57	그림	원날개	1과 2/3을 원 날개로 표현
58	그림	원날개	1과 2/3을 원 날개로 표현
59	그림	사각형	1과 2/3을 사각형 날개로 표현
60	그림	사각형	1과 2/3을 사각형 날개로 표현
61	그림	사각형	1과 1/1을 사각형 날개로 표현(??)
62	그림	수직선	6등분 중 5칸에 색칠(5/6?)

63	언어	설명	많다?
64	언어	사과상황	사과 3개를 5명이 나눠 먹음(3/5?)
65	언어	사과상황	사과 1개를 3조각으로 나눠 2조각 동생 줌(1/3?)
66	그림	원	색칠 안된 전체 원 하나와 3등분 중 2개에 색칠된 원 하나
67	그림	직사각형, 원	전체 색칠된 직사각형과 3등분된 직사각형 중 2개 색칠된 것 / 전체 색칠된 원과 2/3인 것 같이? 보이는 원 조각(등분 안됨)
68	그림	사람	색칠 안 된 사람 한 명과 사람을 점선으로 3부분으로 나눠서 2부분만 색칠
69	그림	직사각형	점선으로 3등분된 직사각형 2개, 하나는 전체
70	그림	직사각형	전체 색칠된 1개의 직사각형과 3등분 중 2개 색칠된 직사각형 하나
71	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
72	그림	직사각형	하나의 직사각형 전체 색칠하고 다른 하나는 3등분 된 것 중 2개 색칠
73	그림	원	색칠 안된 전체 원 하나와 3등분 중 2개에 색칠된 원 하나
74	그림, 숫자	원	가운데 “1”이라는 원 하나와 “1/3”이라고 써진 1/3크기 부채꼴 2개 (빈공간은 점선으로 채워 원모양을 만듦)
75	그림	원	색칠된 전체 원 하나와 2/3갈게 생긴(?) 원 조각(등분되지도 않고 확실하지 않음)
76	그림, 언어	원	3등분된 원 중 2개에만 색칠, 옆에 “1”이라고 씀
77	그림	원	3등분된 원이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개만 색칠(5/3과 같음)
78	그림	원	3등분된 원이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개만 색칠(5/3과 같음)
79	그림(만화)	사람	3명이 소풍을 가는데 “1=3/3”라고 화살표로 묶어 표시, 2명이 뛰어오는데 이 2명을 “2/3”라고 표시
80	그림	원	3등분된 원이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개만 색칠(5/3과 같음)
81	그림	직사각형	6등분된 직사각형 중 5개에 색칠(5/6같음)
82	그림	원	원 3개에 각각 동그라미 칩??
83	그림	직사각형	전체 색칠된 직사각형 하나와 3등분된 것 중 2개가 색칠

84	그림	원	점선으로 3등분된 원이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개만 색칠(5/3과 같음)
85	그림	직사각형	3등분된 직사각형이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개만 색칠(5/3과 같음)
86	그림	직사각형	전체 색칠된 직사각형 하나와 3등분된 것 중 2개가 색칠
87	그림	원	점선으로 3등분한 원이 두 개, 하나는 전체 색칠, 하나는 2개 색칠됨
88	그림,화살표	사과,물고기	물고기가 사과 한 개를 먹고 또 3등분된 사과 중 2개를 먹음(사과한개에 화살표를 해서 3개의 반원과 같다고 표시됨)
89	그림	주머니,원	주머니에 5개의 원이 있는데 점선으로 주머니가 3등분 되어 있음
90	그림,언어	음료수통	“음료수 한통”과 “음료수 2/3”이라고 써진 3등분 중 2칸에 색칠된 음료수통
91	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 점선으로 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
92	그림,숫자	직사각형	가운데 1이라고 적힌 직사각형과 3등분 중 2개에 색칠된 직사각형, “2/3”씀
93	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
94	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
95	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
96	언어	설명	1과 3등분으로 남은 2번의 반이다
97	그림	직사각형	전체 색칠된 직사각형 하나와 3등분된 것 중 2개가 색칠
98	그림	원	전체 색칠된 원 하나와 3등분 중 2개 색칠된 원 하나
99	그림	직사각형	3등분 된 직사각형이 2개 색칠된 것 하나와 색칠이 아예 안된 것 하나
100	그림	일(숫자)	일이라는 숫자를 크게 두 개 그리고 하나는 다 색칠하고 다른 하나는 3부분으로 나눠서 2부분에 색칠(그러나 등분이 아님)

[부록 5] 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

5번	방 법	모 델	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$
1	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대
2	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대
3	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대
4	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대
5	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대, 3/5직사각막대
6	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대, 3/5직사각막대
7	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대, 3/5직사각막대
8	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대 -> 3/5직사각막대
9	그림	사각형	2/5직사각막대 <-1/5직사각막대 -> 3/5직사각막대
10	그림	사각형	2/5직사각막대 -> 3/5직사각막대
11	그림	사각형	2/5직사각막대 -> 3/5직사각막대
12	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
13	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
14	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
15	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
16	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
17	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
18	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
19	그림	사각형	3/5직사각막대(2칸에 1칸 추가)
20	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대를 한 묶음
21	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대, 3/5직사각막대
22	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대, 3/5직사각막대
23	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대, 3/5직사각막대
24	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대, 3/5직사각막대
25	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대, 3/5직사각막대

26	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대 -> 3/5직사각막대
27	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대 -> 3/5
28	그림	사각형	5개 직사각형 중 3개 색칠
29	그림	원날개	5개가 한 묶음 원 중 2개 원 색칠 <- 1개 색칠 5개묶음
30	그림	원날개	5개 원 중 2개에 체크 후 1개에 화살표
31	그림	원날개	5개 원 중 2개 묶고 1개 묶음
32	그림	원날개	5개 원 중 3개에 색칠
33	그림	원하나	2/5원에 1/5원을 더하면 3/5원이다.
34	그림	원하나	5등분 원 중 3칸 색칠(2칸에 1칸 추가 색칠)
35	그림	원하나	5등분 원 중 3칸 색칠(2칸에 1칸 추가 색칠)
36	그림	원하나	5등분 원 중 3칸 색칠(2칸에 1칸 추가 색칠)
37	그림	수직선	5등분 수직선의 2칸“2/5”과 1칸“1/5”에 표시
38	그림	수직선	5등분 수직선의 2칸“2/5”과 1칸“1/5”에 표시 후 전체 “3/5”
39	그림	수직선	5등분 수직선의 2칸“2/5”과 1칸“1/5”에 표시 후 전체 “3/5”
40	그림	원통	5L 물통에 1L와 2L를 비움(비의 개념)
41	그림과 언어	원하나	5등분 원 중 3칸 색칠(2칸에 1칸 추가 색칠), “분모는 같아 분자끼리 더하면 3이되서 3/5”
42	언어	과자상황	형은 과자가 2/5만큼 있고 나는 1/5 있다. 이 과자를 합쳤더니 3/5였다.
43	언어	통상황	나의 밀가루통에 2/5, 친구 밀가루통에 1/5가 있다면 친구와 나의 밀가루를 합치면 3/5
44	언어	떡상황	1/5의 떡이 있는데 아빠가 2/5떡을 줌
45	언어	사과상황	어떤 사람이 사과 2/5먹고, 또 1/5를 먹으면 두 사람이 먹은 양은 3/5
46	언어	사과상황	사과 1개를 5쪽으로 잘라 형은 2개, 동생은 1개 먹을 때 형과 동생이 먹은 사과는 3/5
47	언어,비 개념	사과상황	사과가 5개 들어가는 자루에 2개, 1개 사과가 각각 들어있는데 이것을 합치면 3/5(비의 개념)
48	언어,비 개념	사과상황	사과 5개가 있는데 어떤 사람이 2개 가지고 나는 1개 가졌다. 2명이 가진 양?
49	언어,비 개념	설명	2/5는 5개 중 2개, 1/5는 5개 중 1개, 이를 합치면 5개 중 3개 바로 3/5(비상황)
50	언어,통 분	설명	분모는 같으니 분자만 2 더하기 1은 3이므로 3/5
51	언어,통	설명	2 더하기 1은 3이므로 3/5

	분		
52	그림	사각형	2/5직사각막대, 1/5직사각막대
53	그림	사각형	2/5직사각막대 + 1/5직사각막대
54	그림	사각형	2/5직사각막대 + 1/5직사각막대
55	그림	원하나	2/5원과 1/5원(등분이 아님)
56	그림	원날개	원 날개 4개가 한 묶음 <- 2개 묶음
57	그림	원날개	2/5, 1/5 => 3/5(분모 분자를 원날개로 표현)
58	그림	원날개	2/5, 1/5 => 3/5(분모 분자를 원날개로 표현)
59	그림	1	2/5, 1/5 => 3/5(분모 분자를 1로 표현)
60	언어	설명	분모는 같으니 5, 분자는 2와 1을 합쳐 2, 2/5???
61	언어	설명	5와 5를 통분 후 통분 분수를 더함
62	언어	사탕상황	막대사탕 2개 당 막대사탕 1개를 더함
63	언어		분수의 덧셈
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	직사각형	5등분 된 직사각형 중 2개 색칠된 것과 5등분 직사각형 1개 색칠된 것을 한 묶음으로 동그랗게 묶음
67	그림	직사각형	5등분된 직사각형 하나에 빨간색으로 2개 색칠한 후 검정색으로 하나 색칠
68	그림	구역모양	5부분으로 점선으로 나눈 것 중 3부분 색칠(등분이 아님)
69	그림	직사각형	5등분된 직사각형에 2칸 색칠한 후 다른 색으로 한칸 더 색칠 "1/5을 2개 더한것 더하기 1/5 1개"
70	그림	직사각형	5등분 된 직사각형 중 2개 색칠된 것과 5등분 직사각형 1개 색칠된 것과 10칸 중 3칸 색칠된 것
71	그림, 언어	날개 원	"5명이 오기로 했는데" 2명이 온 중에 1명이 더 음 (비의 개념)
72	그림	직사각형	5등분된 직사각형에 2개 색칠한 후 다른 무늬로 하나 색칠
73	그림	원	5부분으로 나눈 원 중 2칸에 색칠된 것과 1칸 색칠된 것 (등분도 아니고 2/5,1/5만 표시)
74	그림, 화살표	직사각형	5등분된 직사각형 2개 칠해진 것과 1개 칠해진 것에 화살표는 직사각형 5등분의 3개 칠해진 것
75	언어	물	수만이는 2/5L의 물을 마신뒤 1/5L를 또 마셨다.
76	그림	원	5부분으로 나눈 원 중 2칸에 색칠된 것과 1칸 색칠된 것 (등분도 아니고 2/5,1/5만 표시)
77	그림	원	5부분으로 나눈 원 중 2칸에 색칠된 것과 1칸 색칠된 것과 3칸 색칠된 것을 차례대로 표시 (등분이 아님)

78	그림	직사각형	5등분 된 직사각형 중 2개 색칠된 것과 5등분 직사각형 1개 색칠된 것 (2/5, 1/5만 나타냄)
79	언어	계란 문장제	다섯 개짜리 계란판에 계란 3개가 깨져 계란이 2개 있을 때 계란을 하나 더 넣으면?
80	그림, 화살표	원	2개 색칠된 5등분 원과 1개 색칠된 5등분 원을 묶어 5등분 중 3개 색칠된 원으로 화살표 표시
81	그림	원	5부분으로 나눈 원 중 3칸에 색칠 (등분 아님)
82	그림, 화살표	날개 원	원이 9개, 7개 묶음을 화살표하면 총 16개의 원(알 수 없음)
83	그림	직사각형	5등분된 직사각형 하나에 검정색으로 2개 색칠한 후 빨강색으로 하나 색칠
84	그림, 화살표	직사각형	직사각형을 점선으로 5등분 한 후 2개 색칠 -> 한 칸 더색칠하는 모습->5등분 중 3칸 색칠됨
85	그림	직사각형	5등분된 직사각형에 2개 색칠한 후 다른 무늬로 하나 색칠
86	그림, 화살표	직사각형	5등분된 직사각형에 3개에 색칠이 된 칸 중 마지막 한 칸에 옆에 있는 5등분 직사각형 중 1개 색칠된 칸에서 화살표로 연결
87	그림, 기호	직사각형	점선으로 5등분한 직사각형을 그려놓고 옆에 두칸 + 한칸의 직사각형을 그려놓음
88	그림, 기호	날개 원	원 2개와 1개를 묶고 원 5개 분의 3개 표시
89	그림, 숫자	수직선	수직선 1을 5등분하여 2/5와 1/5 표시해 3칸이 3/5임을 표시
90	그림, 언어	날개 원	직사각형 안에 원 2개와 다른 직사각형에 원 1개가 들어있고 “과자 2개와 한 개를 같이 먹기”라고 써짐
91	언어	피자 상황	피자 2/5조각이 있었는데 친구가 안먹겠다고 1/5조각을 가지고 오면 합쳐서 3/5이 된다
92	그림	직사각형	5등분된 직사각형의 3칸에 색칠 2칸에 “2/5”, 1칸에 “1/5”
93	그림, 언어, 기호	직사각형	5등분된 직사각형 중 2개에 색칠된 것+ 1개 색칠된 것= 직사각형 5등분 중 3개 색칠된 것 “분모는 놔두고 분자끼리 더하면 3/5이다”
94	그림, 숫자	날개 원	5등분된 원에 2개 색칠해서 2/5표시, 1개 색칠해서 1/5 표시
95	언어	설명	2/5와 1/5는 분모가 똑같으니까 그냥 더해주면 된다
96	그림, 화살표	직사각형	5등분된 직사각형 2개 칠해진 것과 1개 칠해진 것에 화살표로 직사각형 5등분의 3개 칠해진 것
97	그림, 숫자, 언어	직사각형	5등분된 직사각형 3개 / 2개 색칠 “2/5”, 1개 색칠 “1/5”, 3개 색칠 “3/5”, “2/5와 1/5을 더하면 3/5이 된다”
98	그림, 언어	원	원 5등분 중 2개 색칠 “만큼 농장에 소가 있는데” 5등분 중 1개 색칠 “만큼 더 들어와서” 3개 색칠 “이 된 것”
99	그림, 언어	날개 원	원 두 개와 한 개의 빵이 식탁에 있으면 모두 3개이므로 3/5이다
100	그림	원	5등분 된 원 중 3칸 색칠

8번	방 법	모 델	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
1	그림	원하나	3/4원에서 1/4원조각을 화살표로 뺌
2	그림	원하나	3/4원, 1/4원, 2/4원
3	그림	원하나	3/4원에서 한 조각 빼서 -> 2/4원
4	그림	부분원	3/4원을 세부분 나눠 조각당 "1/4" 적고 2조각만 묶어 "1/2"
5	그림	원날개	원 4개 묶음 중 3개 색칠 -> 1개를 뺌
6	그림	원날개	원 4개 묶음 중 3개 색칠 -> 1개를 뺌
7	그림	원날개	원 4개 묶음 중 3개를 다시 묶고 -> 1개를 뺌
8	그림	원날개	4개 원 중 2개 색칠
9	그림	원날개	4개 고기 중 1개는 상자 속에 있고 1개를 다른 사자가 먹어 나머지 사자가 2개 먹음(비의 개념)
10	그림	사과,X	4개 묶음에 사과3개와 X하나에서 사과 1개를 빼면 사과 2개, X 2개가 한 묶음(2/4)
11	그림	사각형	2/4직사각막대
12	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4
13	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4
14	그림	사각형	3/4직사각막대 -> 1/4직사각막대
15	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대
16	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4직사각막대
17	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4직사각막대
18	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4직사각막대
19	그림	사각형	3/4직사각막대, 1/4직사각막대 =>2/4직사각막대
20	그림	사각형	3/4직사각막대-1/4직사각막대 = 2/4직사각막대
21	그림	사각형	3/4직사각막대-1/4직사각막대
22	그림	사각형	3/4직사각막대(2*2)에서 1칸을 뺌
23	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 뺌
24	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 뺌
25	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 뺌
26	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 뺌
27	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 뺌
28	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 빼서 2/4직사각막대
29	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 빼서 2/4직사각막대
30	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 빼서 2/4직사각막대
31	그림	사각형	3/4직사각막대에서 1칸을 빼서 2/4직사각막대
32	그림	사각형	4등분 직사각막대 3칸은"3/4", 1칸은"1/4"

33	그림	수직선	전체가 3/4수직선 3칸에 "1/4"표시
34	그림	수직선	전체가 3/4수직선 3칸에 "1/4"표시
35	그림	수직선	전체가 3/4수직선 3칸에 "1/4"표시
36	그림	삼각형	삼각형 4개 중 3개를 묶고 그 중 1개를 뺌
37	그림	수직선	전체 3/4 수직선 3칸 중 한 칸이 "1/4"로 뺌
38	그림과 언어	원하나	3/4원에서 하나를 먹음
39	그림과 언어	원하나	3/4원에서 1/4원을 뺌다.
40	언어	피자상황	피자가 3/4있는데 1/4 먹으면 2/4 즉 1/2가 남음
41	언어	달걀상황	달걀 12개를 4개씩 3묶음으로 나눈 것 중 한 묶음을 팔면 남은 것은?
42	언어	사과상황	사과 3/4중에 1/4을 먹으면 남은 사과는?
43	언어	주스상황	주스 3/4 중 동생이 1/4를 주어 2/4가 되었다
44	언어	주스상황	주스 3/4 중 동생이 1/4를 주어 2/4가 되었다
45	언어	사탕상황	오늘 3/4 사탕먹고, 언니는 1/4 사탕 먹음, 내가 먹은 사탕은 언니가 먹은 사탕보다 얼마나 많이 먹었나?
46	언어, 통분	설명	분모가 같으니 분자끼리 뺌다
47	언어, 통분	설명	통분한 분수를 뺌다.
48	언어, 통분	설명	분모가 4이니가 바로 3에서 1을 빼준다. 그러면 2/4
49	언어, 통분	설명	분모가 4이니가 바로 3에서 1을 빼준다. 그러면 1/2
50	언어, 통분	설명	3/4와 1/4는 분모가 같으므로 분자만 빼서 2/4가 나오는데 약분하면 1/2
51	언어, 통분	설명	분자를 빼면 2, 그럼 2/4이고 약분하면 1/2
52	언어, 통분	설명	3 빼기 1 = 2/4는 1/2
53	언어	상황 (비개념)	4조각 중 3조각이 있는데 그 중 1개를 먹으면 2개가 남아 2/4가 되고 약분하면 1/2
54	그림	사각형	사각형 2개씩 묶음이 2개(??)
55	그림( 분자)	사과	3개 중 하나를 가져가서 2개 남음

56	그림(분자)	사과	3개 중 하나를 가져가서 2개 남음
57	언어(분자)	사탕상황	사탕 3개에서 사탕 1개를 먹음
58	그림, 답	반원	반원
59	그림, 답	사각형	사각형 반에 색칠
60	그림	원날개	원날개로 3/4(분모, 분자 표현) 분자에서 1개 빼면 2/4
61	그림	원날개	3/4, 1/4 -> 2/4 -> 1/2 (분모 분자를 원으로 표현)
62	언어	사탕상황	사탕 4개가 있는데 2개를 가져가는 걸 실수로 3개를 가져와 1개를 놓고 왔다.
63	언어		분수의 뺄셈
64	무응답		
65	무응답		
66	그림, 화살표	직사각형	3/4직사각형모델에서 한칸 엑스포->2/4모델
67	그림, 화살표	직사각형	3/4->3/4직사각형에서 한칸만 다른색->한칸이 없어짐->2/4->1/2모델
68	그림	사람모형	사람을 4부분으로 나눠서 한부분을 떼버림(3/4표현)
69	그림	직사각형	4등분된 직사각형 중 3칸 색칠 뒤 1칸을 다른 색으로 색칠“분자가 3이었는데 1을 빼서 2/4가 됨”
70	그림	직사각형	3/4, 1/4, 2/4 직사각형 모델 차례로 제시
71	그림, 언어	총, 총알	총알 4개 들어가는 탄환에 총알이 3개 들어있는데 1개 쏘(비의 개념)
72	그림	직사각형	4등분 직사각형 중 3칸에 색칠하고 그 세칸을 또 4등분해서 1칸만 색칠(오개념)
73	그림	원	원 3개 중 하나를 없애면 2개가 남음(분자만 생각)
74	그림	원통	원통 하나가 4등분->2등분이 됨(뭘의미하는지 모름)
75	그림, 화살표	원	피자 전체 4조각 중 3조각만 있을 때 한명이 1조각 먹으면 반이 남음
76	그림	원	3/4원모델과 1/4원모델만 표현
77	그림	원	3/4원모델과 1/4원모델, 2/4원모델(연관짓진 않음)
78	그림	직사각형	2*2직사각형에서 3칸에 색칠했다가 한칸만 엑스포
79	언어	구슬, 케이스 문장제	구슬 4개가 들어가는 케이스에 구슬 3개가 있는데 하나가 깨졌을 때 남는 구슬은?

80	그림, 화살표	원	3/4원모델 중 1조각을 빼는 화살표, 그러면 2/4원모델이 됨
81	그림, 화살표	사과	사과를 4등분 중 3개 색칠된 것 중에서 1조각을 먹으니 2조각 남음
82	그림	원	원6개??
83	그림, 화살표	직사각형	3/4 직사각형모델에서 1칸을 묶어 화살표로 빼버림
84	그림, 화살표	직사각형	2*2 점선으로 나뉜 직사각형에 3칸 색칠하고 한칸 화살표로 날리고 화살표로 2칸만 남은 2*2 직사각형모델
85	그림, 화살표	원	3/4원모델 중 1조각을 빼서 화살표, 그러면 2/4원모델이 됨
86	그림	직사각형	3/4직사각형 모델에서 1/4조각을 엑스포함
87	그림, 언어	원, 피자	피자 3/4조각을 이웃에게 1/4조각 주면 2/4 즉 1/2남음(원으로도표현)
88	언어	물 문장제	민수는 자전거를 타면서 물을 3/4만큼 있는 물을 1/4정도 먹으면 남은물은?
89	그림, 화살표	원	3/4원모델에서 한조각빼면 1/2원모델이 됨
90	그림, 화살표	직사각형	네 개 아이스크림 중 하나 점선 표시, 화살표후 두 개 점선 표시 (비의개념)
91	그림, 화살표	원,사람	3/4원모델에서 사람이 1/4조각을 가져가 2/4원모델로 남음
92	그림, 언어	직사각형	3/4직사각형모델 중 1/4조각을 빼는 화살표/ “3/4중1/4이 없어지면 남는것은 2/4인데 2/4는 1/2과 같다”
93	언어	설명	분모는 그냥놔두고 분자끼리만 빼면 2니까 2/4 즉, 1/2이 된다.
94	그림, 언어	원	3/4원모델에서 1/4조각에 화살표해서 없어짐이라고 씀
95	언어	설명	3/4과 1/4은 덧셈과 같이 분모가 똑같으니까 그냥 빼줌
96	그림	직사각형	3/4직사각형 모델에서 화살표해서 1/3 직사각형 모델이 됨
97	그림, 화살표	원	3/4원모델에서 1/4조각을 화살표로 버림
98	그림, 언어	원	3/4원모델“에” 1/4모델“만큼 줄어든 것” = 2/4모델
99	그림, 언어	원	원3개 와 1개가 있는데 내가 1개 먹었다.(분자만생각)
100	그림	직사각형	2*2 직사각형에 2칸 색칠(답만 표현)

[부록 6] 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 개념 이미지 유형 분석

6번	방법	모델	$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$
1	그림	사각형	1/3직사각막대 <-2/5직사각막대 => 11/15직사각막대
2	그림	사각형	11/15직사각막대(3등분 선으로 그음)
3	그림	사각형	15등분 직사각막대에 5칸 색칠에 6칸 색칠 추가= 11/15직사각막대
4	그림	사각형	5/15직사각막대, 6/15직사각막대 는 11/15직사각막대
5	그림	사각형	5/15직사각막대, 6/15직사각막대-> 11/15직사각막대
6	그림	사각형	5/15직사각막대에 6개의 직사각형 칸이 추가됨
7	그림	사각형	11/15직사각막대(5칸“1/3”, 6칸“2/5”표시)
8	그림	사각형	11/15직사각막대
9	그림	사각형	11/15직사각막대
10	그림	사각형	11/15직사각막대
11	그림	수직선	15칸의 수직선에서 5칸“1/3”, 6칸 “2/5”
12	그림	수직선	15칸의 수직선에서 5칸“1/3”, 6칸 “2/5”해서 합치면 “11/15”
13	그림	수직선	15칸의 수직선에서 5칸“1/3”, 6칸 “2/5”해서 합치면 “11/15”
14	그림	수직선	15칸의 수직선에서 5칸“1/3”, 6칸 “2/5”해서 합치면 “11/15”
15	그림	수직선	15칸 수직선 중 5칸, 6칸 표시해서 11칸에 표시
16	그림	수직선	15칸 수직선 중 11칸에 표시
17	그림	원날개	5*3 배열의 날개원 5개와 6개를 합치면 15개 중 11개
18	그림	원날개	5*3 배열의 날개원에서 5개, 6개 묶음
19	그림	원날개	15개 원에서 5개, 6개 다른 모양으로 체크
20	그림, 통분	사각형	$1/3 \Rightarrow 5/15, 2/5 \Rightarrow 6/15 \Rightarrow 11/15$ (모두 직사각막대로 표현)
21	그림, 통분	원날개	5/15(분모,분자가 원날개로 표시)에 분자에 6개 더 화살표
22	그림, 통분	원날개	$1/3 \Rightarrow 5/15, 2/5 \Rightarrow 6/15 \Rightarrow 11/15$ (분모,분자 모두 원개수로)
23	언어, 통분	설명	3과 5의 최소공배수가 분모, 분자는 최소공배수를 자신과 나눈 값으로 곱함
24	언어, 통분	설명	3과 5를 같은 수가 되게 곱하고 분자도 곱하면 5/15, 6/15이 나오는데 이 둘을 합치면 11/15

25	언어, 통분	설명	3과 5를 같은 수가 되게 곱하고 분자도 곱하면 5/15, 6/15이 나오는데 이 둘을 합치면 11/15
26	언어, 통분	설명	3과 5를 같은 수가 되게 곱하고 분자도 곱하면 5/15, 6/15이 나오는데 이 둘을 합치면 11/15
27	언어, 통분	설명	분모가 달라서 15로 통분하면 5/15, 6/15이 나오는데 분자끼리 더하면 11/15
28	언어, 통분	설명	분모가 달라서 15로 통분하면 5/15, 6/15이 나오는데 분자끼리 더하면 11/15
29	언어, 통분	설명	1/3과 2/5를 통분한 후 분자끼리 더한다
30	언어, 통분	설명	1/3과 2/5를 통분한 후 분자끼리 더한다
31	언어, 통분	설명	분모를 통분하고 분자도 똑같은 수로 곱한 뒤 더하면 11/15
32	언어, 통분	사탕 상황	사탕 15개 중 한사람이 5개, 다른 한 사람 6개 가짐, 두명이 가진 양
33	그림과 언어, 통분	사과 자루 상황	분모가 3인 자루는 큰 사과를 3개 넣거나 작은 사과를 15개를 넣을 수 있고, 분모가 5인 자루는 중간 크기 사과 5개 넣거나 작은 사과 15개 넣을 수 있음. 15는 3의 5배로 분모 3의 자루에는 5/15로 고치고, 작은 사과 5개, 2/5는 6/15로 바꿔 5와 6이 하나로 합쳐 11/15가 됨
34	그림	사각형	1/3직사각막대, 2/5직사각막대
35	그림	사각형	1/3직사각막대, 2/5직사각막대
36	그림	사각형	1/3직사각막대, 2/5직사각막대
37	그림	사각형	1/3직사각막대, 2/5직사각막대=> 11/15직사각막대
38	그림	사각형	1/3직사각막대 <- 2/5직사각막대
39	그림	사각형	1/3직사각막대 <- 2/5직사각막대
40	그림	사각형	1/3직사각막대, 2/5직사각막대 한 묶음
41	그림	사각형	1/3직사각막대 + 2/5직사각막대
42	그림	사각형	1/3직사각막대 + 2/5직사각막대
43	그림	원하나	1/3원과 2/5원의 피자 있다.
44	그림	원하나	1/3원과 2/5원을 합친다

45	그림	원하나	$1/3$ 원, $2/5$ 원
46	그림	원하나	$1/3$ 원, $2/5$ 원
47	언어	문제	사탕 $1/3$ 이 있었는데 동생이 나한테 $2/5$ 를 주었다.
48	언어	문제	사과 $1/3$ 이 있었는데 아빠가 나한테 $2/5$ 를 주었다.
49	언어	문제답	나는 피자를 $1/3$ 만큼 먹었고 동생은 $2/5$ 를 먹어 피자 양을 확인했더니 $11/15$ 만큼 먹었다.
50	언어	문제답	나는 오늘 쌀의 $1/3$ 만큼 먹었고 친구는 $2/5$ 를 먹어 오늘 먹은 쌀은 모두 $11/15$ 먹었다.
51	언어	문제답	어떤 사람이 사과 $1/3$ 을 먹고, 어떤 사람이 사과 $2/5$ 를 먹었다면 두 살마이 먹은 사과는 $11/15$ 이다.
52	언어	답	$11/15$
53	그림	사각형	$1/8$ 직사각막대, $3/8$ ?
54	그림	사각형	$1/3$ , $2/5$ , $2/3$ 직사각막대(??)
55	그림	날개	$5/15$ , $11/15$
56	그림	원날개	3개 중 하나에 색칠된 원뿔음 <- $3/5$ 원뿔음??
57	그림	원날개	15개 원 중 3개와 6개에 색칠( $1/5+2/3$ ??)
58	그림	원하나	$1/3$ 원+ $2/5$ 원(등분이 아님)
59	그림	사람	빌딩을 $1/3$ 하고, 사람 5명 중 2명이 들어감(??)
60	그림	원날개	분모에 원15개, 분자 1
61	언어	설명	$1/3$ 과 $2/5$ 를 통분한 후 분자끼리 더하면 $13/15$ (??)
62	언어	설명	분수의 덧셈
63	무응답		
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	직사각형	1개 색칠된 3등분 직사각형, 2개 색칠된 5등분직사각형을 원으로 묶음
67	그림, 화살표	직사각형	1개 색칠된 3등분 직사각형과 2개 색칠된 5등분 직사각형은 각각 화살표로 5개, 6개 색칠된 15등분 직사각형에 연결되고 다시 화살표로 11개 색칠된(5개,6개 각각 다른 색임) 15등분직사각형으로 표현
68	그림	구역모양	점선으로 18등분해서 7개 색칠 ????
69	그림, 언어	직사각형	15등분 직사각형에 검정색으로 6개, 파란색으로 5개 색칠 " $1/3$ 과 $2/5$ 을 통분해서 $5/15, 6/15$ . 그래서 분자 5더하기 6을 해서 $11/15$ "

70	그림	직사각형	8등분 직사각형에 3개 색칠(분자와 분모를 그대로 더함)
71	그림	원	15등분된 원 중 11개 색칠(답만 표현)
72	그림	직사각형	15등분의 직사각형 중 11개 색칠(답만 표현)
73	그림	원	원을 3등분한 것 중 1개 색칠, 5부분중 2개 색칠(등분 아님) (1/3과 2/5만 표현)
74	그림	원통 (물통)	1L짜리 물통에 눈금이 1/3만큼 물이 들어있는데 2/5만큼 물이 든 물통을 비움
75	언어	피자상황	만수와 호준이는 피자 1/3을 먹고 엽승이와 현상이는 2/5를 먹었다.
76	그림	원	5부분으로 나눈 원에 3개 색칠됨(등분아님), 3등분 원에 하나 색칠
77	그림	원	1개 색칠된 3등분 원과 2개 색칠된 5부분원, 11개 색칠된 15부분 원(등분안됨)
78	그림	직사각형	1개 색칠된 3등분 직사각형, 2개 색칠된 5등분 직사각형(1/3과 2/5만 표현)
79	언어	구슬, 주머니	구슬이 15개 들어가는 구슬주머니가 2개 있는데 하나는 5개, 하나는 6개가 들어있다. 이 구슬들을 모두 한 주머니로 옮겨 담으면? 11/15 (비의 개념)
80	그림, 화살표	원	1개 색칠된 3등분 원과 2개 색칠된 5등분 원을 묶어 15등분 중 11개에 색칠된 직사각형에 화살표로 연결
81	그림	직사각형	11개 색칠된 15등분 직사각형, 1개 색칠된 3등분 직사각형, 2개 색칠된 5등분 직사각형 차례로 표현됨 (연관성을 제대로 표현 못함)
82	그림	원	원 22개???
83	그림	직사각형	3*5 직사각형에 파란색으로 5개, 빨간색으로 6개 칠함(통분한것임)
84	그림, 언어	직사각형	특이하게 2*7에 옆에 사각형이 하나더 붙은 모양으로 15등분 도형을 만들(점선으로 나눔) 5개 색칠하고 6개 색칠해서 화살표로 "겹치기"(용어부적절)하여 점선으로 13등분된 중 9개 색칠
85	그림	직사각형	직사각형 3칸 중 1칸에 색칠, 이어서 점선으로 5칸 중 2칸에 색칠
86	언어, 그림	통분, 직사각형	"똑같이 만들려면 최소공배수를 이용. 그럼 15가됨" 15등분 직사각형 중 11칸 색칠
87	언어, 그림	직사각형	3*5 직사각형을 통해 "1/3은 5/15와 같다", "2/5는 6/15와 같다"를 읽. "그러므로 5/15와 6/15을 더하면 11/15이 된다"
88	그림, 기	원	분자를 15개의 원으로 표현하고 분모를 11개의 원으로 표현

	호		
89	그림, 숫자	수직선	수직선 15등분 중 5칸에 “1/3”, 6칸에 “2/5” 밑에 표시, 위에는 11칸에“11/15”
90	그림, 선	직사각형	1개 색칠된 3등분 직사각형, 2개 색칠된 5등분 직사각형을 서로 연결해서 11개 색칠된 15등분 직사각형에 연결
91	언어	설명	1/3과 2/5는 5/15와 6/15과 같기 때문에 5/15와 6/15을 합치면 11/15이 된다.
92	언어, 그림, 숫자	직사각형	“1/3과 2/5를 분모끼리 통분하여 1/3은 5/15로 2/5는 6/15으로 만든 후 계산함”, 15등분 직사각형에 11개 색칠 5개(“5/15”),6개(“6/15”)
93	언어	설명	3과 5의 최소공배수는 15인데 1/3=5/15, 2/5=6/15이다. 5/15+6/15를 하면 11/15가 된다
94	그림, 언어	원, 사과상황	원을 3등분한 것 중 1개 색칠, 5등분 중 2개 색칠(제대로 표현못함), “사과를 3개로 나눈 것중의 1개와 사과를 5조각으로 나눈것중의 하나를 합한 것”
95	언어	설명	1/3과 2/5는 분모가 다르기 때문에 통분하고 더한다
96	그림, 화살표	직사각형	3등분 직사각형 1개 색칠은 15등분직사각형 5칸 색칠에 화살표로 연결, 5등분 직사각형 2개 색칠은 15등분 6칸 색칠에 화살표로 연결해 화살표로 마지막 15등분 직사각형 11칸 색칠
97	그림, 숫자, 언어	직사각형	1개 색칠(“1/3”)된 3등분 직사각형과 2개 색칠(“2/5”)된 직사각형, “1/3과 2/5를 더한다”
98	그림, 언어	원, 설명	1개 색칠된 3등분 원“에” 2개 색칠된 5등분 원“만큼 더 커진 것(숫자가)”
99	그림, 언어	물병, 물상황	3부분 중 하나에 색칠“과”5부분중 둘에 색칠“만큼의 물이 있다. 물이 3과 5의 공배수를 구하면 15이다. 칸이 15개있는 물통에 이 물들을 부으면”5칸,6칸에 색칠된 물통(15칸도 아님)“이다”(등분된 물통도 아님)
100	그림	직사각형	15등분의 직사각형 중 11개 색칠(답만 표현)

7번	방 법	모 델	$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
1	그림	원하나	$3/4$ 원 < $1/2$ 원
2	그림	원하나	$3/4$ 원 < $1/2$ 원
3	그림	원하나	$3/4$ 원과 $1/2$ 원
4	그림	원하나	$3/4$ 원과 $1/2$ 원을 합친다
5	그림	원하나	$3/4$ 원과 $1/2$ 원의 피자가 있다.
6	그림	원하나	$3/4$ 원과 $1/2$ 원 => 1개 원과 $1/4$ 원 색칠
7	그림	원하나	$3/4$ 원과 $1/2$ 원 => 1개 원과 $1/4$ 원 색칠
8	그림	부분원	$3/4$ 원 < -반원, 원하나와 $1/4$ 원
9	그림	부분원	$3/4$ 원과 반원( $1/4$ 원씩 나눔), “ $5/4$ ”, “1과 $1/4$ ”
10	그림	사각형	$3/4$ 직사각형 < $1/2$ 직사각형
11	그림	사각형	$3/4$ 직사각형 , $2/4$ 직사각형
12	그림	사각형	$3/4$ 와 $1/2$ (점선으로 $2/4$ 만듬)은 $4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대가 된다
13	그림	사각형	$3/4$ 와 $1/2$ (점선으로 $2/4$ 만듬)은 $4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대가 된다
14	그림	사각형	$3/4$ 와 $1/2$ 는 $5/4$ 직사각막대가 된다
15	그림	사각형	$3/4$ 와 $1/2$ 는 $5/4$ 직사각막대가 된다
16	그림	사각형	$3/4$ 와 $1/2$ 는 $4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대가 된다
17	그림	사각형	$3/4$ 와 $2/4$ 는 $4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대가 된다
18	그림	사각형	$3/4$ 와 $2/4$ 는 $4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대가 된다
19	그림	사각형	$3/4$ 직사각막대와 $1/2$ -> $2/4$ 직사각막대 => $5/4$ (1과 $1/4$ )
20	그림	사각형	$3/4$ 직사각막대와 $1/2$ -> $2/4$ 직사각막대 => $5/4$ (1과 $1/4$ )
21	그림	사각형	$4/4$ 와 $1/4$ 직사각막대에 3칸에 “ $3/4$ ”, 2칸에 “ $1/2$ ” 표시
22	그림	사각형	3칸 색칠 직사각형( $2*2$ ) < - 1칸 색칠 직사각형( $2*1$ )
23	그림	사각형	3칸 색칠 직사각형( $2*2$ ) + 2칸 색칠 직사각형( $2*2$ ) = 전체 색칠( $2*2$ ), 1칸 색칠( $2*2$ )
24	그림	수직선	전체 2고 1이 4칸으로 나뉜 수직선에 3칸 “ $3/4$ ”, 2칸 “ $1/2$ ” 표시하고 표시한 부분 합하면 “ $5/4$ ”
25	그림	수직선	수직선 4칸은 실선, 1칸은 점선 3칸은 “ $3/4$ ”, 2칸 “ $1/2$ ” 로 1과 $1/4$ 표시
26	그림	사과,x	사과3개와 X한 개 묶음( $3/4$ ) < - 사과 2개 X 2개 묶음( $2/4$ ),

			사과 4개 묶음 하나(1)에 사과1개 X3개(1/4)
27	그림	원날개	원4개 중 3개 색칠된 묶음에 4개 중 2개 색칠된 묶음을 화살표로 표시(비의 개념)
28	그림	치킨	치킨 4개 중 3개, 다른 박스에 4개 중 2개를 악어가 먹으면 악어가 먹은 치킨 개수는?(비의 개념)
29	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더함
30	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더함
31	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더함
32	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더함
33	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더함
34	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더한 뒤 대분수로 만듦
35	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더한 뒤 대분수로 만듦
36	언어,통분	설명	사분의 삼과 이분의 일을 통분시켜 분자끼리 더한 뒤 대분수로 만듦
37	언어,통분	설명	4와 2를 통분하여 통분한 분수 더함
38	그림,통분	원날개	$\frac{3}{4} < -$ 분자에 2만 더하면 = $\frac{5}{4} = 1$ 과 $\frac{1}{4}$ (분모분자를 날개원으로 표현)
39	그림	원날개	$\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \rightarrow \frac{5}{4}, 1$ 과 $\frac{1}{4}$ (분모분자를 날개원으로 표현)
40	그림	원날개	4개 묶음 중 3개 색칠 <- 2개 묶음 중 1개 색칠
41	그림	사각형	3칸 색칠 직사각형(2*2)과 1칸 색칠 직사각형(2*1)는 5개 색칠 직사각형(2*3) (기준을 정하지 못함)
42	그림	사각형	$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 직사각막대
43	그림	사각형	$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 직사각막대
44	그림	사각형	$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 직사각막대

45	언어, 통분	공식	$3/4+1/2=3/4+2/4= 5/4=1과1/4(통분)$
46	언어	문제	사과 3/4먹고, 1/2 더 먹으면 1과 1/4
47	언어	문제	주스 3/4먹고, 동생이 1/2 더 먹으면 5/4
48	언어	문제	주스 3/4먹고, 동생이 1/2 더 먹으면 5/4
49	그림	사각형	1직사각형과 1/4직사각막대
50	그림	사각형	1직사각형과 1/4직사각막대
51	그림	부분원	원 하나와 1/4원'반의 반원'
52	그림	원날개	4개 원이 한 묶음(1)과 원 하나(1/4)
53	언어	답	피자 1판과 피자를 4조각으로 나눈 것 중 한 조각
54	그림	사각형	6등분 직사각막대의 5칸이 색칠(5/6?)
55	그림	사각형	6등분 직사각막대의 3칸 색칠(3/6?)
56	그림	도형	도형들로 $3/4 \rightarrow 1/4 \rightarrow 1$ 표현(?)
57	그림	원날개	원4개 중 3개 묶음, 2개 묶음(겹치게 표현해서 모르겠음)
58	그림	원하나	원 하나와 1/2원?
59	그림	원하나	원 하나와 4/8원?
60	그림	수직선	전체 10등분된 수직선에 3칸이 "1/2"?
61	숫자	숫자	1(?)
62	언어	상황	쿠키 만들기 위해 초콜릿은 3/4 쓰고 동생은 1/2 썼는데 동생과 내가 쓴 초콜릿은 1과 1/2이다(틀림)
63	언어		분수의덧셈
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	직사각형	3/4, 1/2 직사각형 모델을 묶음
67	그림, 화살표	직사각형	3/4(빨강), 1/2(파랑) 직사각형모델이 화살표로 3/4, 2/4 다시 화살표로 3빨강, 1파랑 색칠된 4등분 직사각형과 파란 작은 1칸 직사각형 그림
68	그림	직사각형, 원	밑에 8개 원, 위에 10개 원, 가운데 길다란 직사각형으로 10/8표현
69	그림, 언어	직사각형	4등분 직사각형 1칸 색칠, 4등분 직사각형 4칸 색칠에 파란 색으로 1칸 덧색칠 "3더하기 2는 5, 5/4는 1과1/4"
70	그림	직사각형	$3/4+1/2=4/6(분자 분모 더한 것을 각각 직사각형으로 표현)$

71	그림	원	전체 색칠된 원과 1개 색칠된 4등분 원(답만 표현)
72	그림	직사각형	3칸 색칠된 4등분 직사각형에 색칠안된 한칸의 반을 다른 무늬로 색칠
73	그림	원	묶음 안에 원 세 개와 점선 원 2개, 옆에 그냥 원 5개(분자만 표현)
74	그림	직육면체 물통	3/4가 든 1L물통에 1/2물통을 비움(결과X)
75	그림	직사각형, 비커	3개 색칠된 4등분 직사각형에 반이 담긴 비커 붓는 장면(결과X)
76	그림	원	3개 색칠된 4등분 원과 1개 색칠된 2등분 원(3/4, 1/2만 표현)
77	그림	원	3개 색칠된 4등분 원과 1개 색칠된 2등분 원, 전체 색칠된 4등분 원과 1개 색칠된 4등분 원(연관성을 나타내지는 않음)
78	그림	직사각형	2*2직사각형에 3칸 색칠, 2등분 중 1개 색칠 직사각형(3/4, 1/2만 표현)
79	그림, 언어	구슬, 케이스	4개가 들어가는 구슬케이스에 구슬이 각각 3개, 2개가 들어있으며 이것들을 합쳐 옮기면 하나가 다차고 뚜껑에는 하나가 들어감(비?)
80	그림, 화살표	수직선, 원	3칸 색칠된 4칸 수직선과 1칸 색칠된 2칸 수직선을 묶어 전체 색칠된 원과 4등분 중 한 칸에 색칠된 원에 화살표로 연결
81	그림	원	4등분된 원 2개가 3칸, 2칸 색칠되어 있고 옆에 전체 원 하나와 1개 색칠된 4등분 원이 있음(연관성 나타내진 않음)
82	그림	원	18개의 원???
83	그림	직사각형	3/4직사각형 모델에 남은 1칸을 반으로 나누어 색칠
84	그림, 화살표	직사각형	2*2 점선으로 나뉜 직사각형중 3개에 색칠, 점선으로 2등분된 1칸 색칠된 직사각형에 화살표로 “겹치기”(용어부적절), 화살표로 점선으로 2*2된 전체 색칠 직사각형과 1개 색칠된 사각형 그림
85	그림	직사각형	4등분된 직사각형중 3칸 색칠, 점선으로 2칸 더 해서 한 칸에 색칠
86	그림, 언어	직사각형	똑같이 하려면 최소공배수를 알아봄, 8등분 직사각형 전체 색칠+8등분 직사각형중 2개만 색칠
87	그림, 언어	원	3/4원모델 “에서” 2/4원모델 “을 더하면 4등분한게 5개 있으므로 1과 1/4

88	언어	물 문장제	철수와 영희가 같은 물병에 꼭 물을 담아왔습니다. 철수와 영희는 산에 올라가며 물을 마셨는데 정산에 도착해보니 철수 3/4, 영희 1/2 남았다. 두사람의 남은 물을 더하면?
89	그림, 화살표	원	3개 색칠된 4등분 원에 1개 색칠된 2등분 원을 화살표로 들여놓으면 전체 원 하나와 1개 색칠된 4등분 원이 됨
90	그림, 언어	직사각형, 삼각형, 원	4칸 도시락에 3칸 김밥(원), 2칸 도시락에 1칸 삼각김밥(삼각형), 선으로 합치게 연결해서 총 8칸에 원 6개, 삼각형 2개, 다른 2칸에 삼각형 1개, 원 1개
91	언어	설명	3/4과 1/2은 3/4과 2/4와 같기 때문에 합치면 5/4 즉, 1과 1/4이 된다.
92	그림, 언어	직사각형	“3/4과 1/2를 분모끼리 통분하여 1/2은 2/4로 분모를 같게 하고 계산함” 4등분 된 직사각형 전체에 색칠, 또 하나의 4등분 직사각형 한칸 색칠
93	언어	설명	4와 2의 최소공배수는 4니까 3/4+2/4를 하면 5/4 즉, 1과 1/4이다.
94	그림, 숫자	원	4등분 원 2개에 빨간색으로 2칸 색칠“1/2”, 파란 색으로 3칸 색칠“3/4”해서 5/4!
95	언어	설명	3/4과 1/2은 분모가 다르기 때문에 통분을 한 뒤 더한다
96	언어	설명	4등분중에 4과 2등분한 1을 합친것(결과X)
97	그림, 화살표	원	3/4 원모델에 1/2 원모델이 화살표로 들어감(결과X)
98	그림, 언어, 기호	원	3칸 색칠된 4등분 원“에” 2등분된 1칸 색칠 원“만큼 커진 것” = 전체 색칠 원+4등분 중 하나 색칠된 원
99	그림, 언어	직사각형	직사각형 4등분 중 2개씩 길게 잘라 1/2로 만들면 1/2 1개와 1/4한개가 되고 1/2 직사각형 모델을 그려 “1/2이 2개 있고 1/4이 한 개 있다“
100	그림	직사각형	전체 색칠된 직사각형과 1칸 색칠된 4등분 직사각형(답만 표현)

9번	방 법	모 델	$\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$
1	그림	사각형	15등분 직사각막대에 12칸에 색칠해서 5칸 빼기
2	그림	사각형	15등분 직사각형막대 12칸에 색칠해서 5칸 빼기
3	그림	사각형	15등분 직사각형막대 점선으로 5등분해서 4부분 색칠하고 실선으로 3등분해서 1부분 뺌
4	그림	사각형	$12/15$ 직사각막대 - $5/15$ 직사각막대 = $7/15$ 직사각막대
5	그림	사각형	$12/15$ 직사각막대, $5/15$ 직사각막대 는 $7/15$
6	그림	사각형	$3*5$ 직사각형에 12칸 색칠해서 다른 색으로 5칸을 칠해 뺌
7	그림	사각형	$5*3$ 직사각형에 12칸 색칠하고 5칸을 뺌
8	그림	원날개	$5*3$ 배열의 원 중 12개를 묶은 뒤 5개를 묶어 뺌
9	그림	원날개	15개의 원 중 12개에 색칠한 뒤 색칠된 5개를 뺌
10	그림	수직선	15칸 수직선 3개, “ $4/5$ ”, “ $1/3$ ”, “ $7/15$ ”
11	그림	수직선	15칸 수직선 12칸에 선택 중 5칸 빼기
12	그림	수직선	전체 $1/5$ 단위로 수직선을 나눈뒤 한칸을 또 3칸씩 나뉘 $4/5$ 에서 $1/3$ 부분을 뺌
13	그림	수직선	전체 $1/5$ 단위로 수직선을 나눈뒤 한칸을 또 3칸씩 나뉘 $4/5$ 에서 $1/3$ 부분을 뺌
14	그림	수직선	전체 15등분 된 수직선에서 12칸“ $4/5$ ” 중 5칸“ $1/3$ ”을 빼서 “ $7/15$ ”
15	그림, 통분	원통	$12/15$ 통에서 $5/15L$ 를 비우면 $7/15L$ 남음
16	그림, 통분	사각형	$4/5 \rightarrow 12/15$ , $1/3 \rightarrow 5/15$ 해서 $\Rightarrow 7/15$
17	언어, 통분	설명	$4/5$ , $1/3$ 을 통분 후 분자끼리 뺌다
18	언어, 통분	설명	$4/5$ , $1/3$ 을 통분 후 분자끼리 뺌다
19	언어, 통분	설명	분모를 통분하여 분자끼리 뺌다.
20	언어, 통분	설명	통분으로 $12/15$ , $5/15$ 를 만들고 분자를 빼서 $7/15$
21	언어, 통분	설명	통분으로 $12/15$ , $5/15$ 를 만들고 분자를 빼서 $7/15$
22	언어, 통분	설명	통분으로 $12/15$ , $5/15$ 를 만들고 분자를 빼서 $7/15$
23	언어,	설명	통분으로 $12/15$ , $5/15$ 를 만들고 분자를 빼서 $7/15$

	통분		
24	언어, 통분	설명	통분으로 12/15, 5/15를 만들고 분자를 빼서 7/15
25	언어, 통분	설명	통분으로 12/15, 5/15를 만들고 분자를 빼서 7/15
26	언어, 통분	사탕상황	사탕이 15개 있는데 12개를 갖고 왔는데 5개를 다시 놓음
27	언어, 통분	설명	최소공배수 15로 분모를 만들어 분자의 차를 구함
28	그림, 문제	사각형	과자 4/5직사각막대가 있었는데 1/3을 먹음
29	그림, 문제	사각형	떡 4/5직사각막대가 있었는데 1/3을 먹음
30	그림, 문제	사각형	4/5직사각막대가 있는데 1/3막대를 뺌
31	그림, 문제	사각형	4/5직사각막대가 있는데 1/3막대를 뺌
32	그림, 문제	사각형	4/5직사각막대가 있는데 1/3막대를 뺌
33	그림, 문제	사각형	4/5직사각막대, 1/3막대
34	그림, 문제	사각형	4/5직사각막대, 1/3막대
35	그림, 문제	원하나	4/5에서 1/3을 뺌
36	그림, 문제	원하나	4/5원, 1/3원
37	그림, 문제	원하나	4/5원, 1/3원
38	그림, 문제	원하나	4/5에서 1/3을 먹음
39	언어, 문제	문제	4/5에서 1/3을 뺌
40	언어, 문제	문제	나는 돈을 4/5를 가지고 있었는데 언니에게 1/3주었다
41	언어, 문제	문제	사과 4/5 중 1/3을 먹으면 남은 사과는?

	문제		
42	언어, 문제 답	문제	나는 들판의 4/5를 가졌고 동생은 들판의 1/3을 가졌다. 내 땅은 동생의 땅보다 7/15만큼 많다.
43	언어, 문제 답	문제	아빠가 나에게 사과 4/5를 주셨는데 그 중 1/3을 엄마가 드셨다
44	언어, 문제 답	문제	나는 과자가 4/5있었는데 형한테 1/3 주어서 7/15가 됨
45	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
46	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
47	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
48	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
49	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
50	그림, 답	사각형	7/15 직사각막대
51	그림, 답	수직선	15등분 수직선의 7칸 선택
52	숫자, 답	숫자	7/15
53	그림( 분자)	사과	사과 12개 중 5개 뽑
54	그림	사각형	15등분 중 12칸에 "4/5", 5칸 "1/3"을 더함
55	그림	사각형	4/4 직사각막대 - 1/3직사각막대
56	그림	사각형	3칸 직사각막대, 2칸 직사각막대(?)
57	그림	사각형	4/5직사각막대, 1/3직사각막대(정확하지 않음)
58	그림	사각형	4/5직사각막대, 1/3직사각막대, 2/5막대(?)
59	그림	원하나	12등분 원 중 5칸 색칠
60	그림	원날개	4/5-1/3=7/15(분모,분자 원날개로 표시)
61	그림	수직선	4/5 수직선에서 1/3 뽑(2/5 부분에 1/3이라고 표시)
62	언어,	설명	15로 통분해서 12, 5는 17/15는 1과 2/15

	통분		
63	언어	설명	분수의 뺄셈
64	무응답		
65	무응답		
66	그림, 선	직사각형	4/5 직사각형과 1/3 직사각형만 표현
67	그림, 화살표	직사각형	4/5직사각형(색칠)과 1/3직사각형(색칠)을 위 아래로 그려서 12/15 직사각형에서 5칸을 뺌
68	그림		알수없음
69	그림, 언어	직사각형	15등분 된 12칸 색칠된 것 중 5칸을 다른 색으로 색칠 제외 "통분하고 뺀 것"
70	그림	직사각형	4/5와 1/3 직사각형 모델만 그림
71	언어	상황	사탕이 15개 있는 곳에서 사탕 12개를 샀다. 그 후 동생에게 5개 주었더니 7개가 남았다.
72	그림	직사각형	5등분 된 직사각형에 4개 색칠하고 남은 한 칸을 3칸으로 나눠서 1칸에 색칠
73	그림	원 낱개	원 12개 중 5개 제외
74	그림, 언어, 숫자	직사각형 휘발유	4/5L찬 휘발유통에 1/3L 제한인 차 기름을 넣는 모습
75	언어	상황	수만이는 등산을 가는데 물을 4/5L를 가지고 갔다. 산정상에 올라가는 동안 1/3L를 먹었다
76	그림	원	5부분 원(등분X)에 4개 색칠, 1/3 원
77	그림	원	4/5 원과 1/3원 그리고 15칸 중 12칸에 색칠됨(등분X)
78	그림	직사각형	15등분된 직사각형에서 12개에 색칠하고 5개를 뺌
79	언어	문장제	사탕 15개 패키지에서 12개가 들어있는데 그 중 5개를 먹었다면 남은 사탕은?
80	그림	수직선	5칸중 4칸에 색칠, 다른 수직선에 3칸 중 1칸에 색칠 -> 15칸 중 7칸 색칠
81			답 안 씀
82	그림	원	원 15개랑 12개 그려놓고 5개 지움
83	언어	문장제	소희가 등산가는데 물을 4/5L를 가지고 갔다. 하지만 경사가 높아 물을 1/3L 마셨다 몇 L 남았을까?

84	그림, 화살 표	직사각형	3*5 직사각형(점선구분)에 12칸(통분)색칠->1/3칸을 빼면->7칸만 남음
85	그림, 화살 표	직사각형	5등분된 직사각형 중 4칸에 색칠된 것과 안 색칠된 1칸 중 색칠 2, 안한 것 1 를 1/3를 뺐
86	그림, 언어	직사각형	“최소공배수 이용 15”, 15등분 직사각형에 4칸 색칠된 것에 1칸 빼기(통분할 때 분자안함)
87	그림, 언어	직사각형	3*5 직사각형에서 12칸 색칠된 것 “에서” 5칸 칠한 “부분을 빼면(3부분으로 나눈것 중 하나)” 7/15
88	언어	문장제	영수가 4/5만큼 사탕을 가지고 있었는데 거기서 1/3을 먹어 남은 사탕은 몇입니까?
89	그림, 숫자	수직선	수직선 15칸 중 12칸을 4/5로 표시하고 5칸을 빼면 7/15가 남음
90	그림	원(피자)	4/5원, 1/3원 -> 작은 부분의 피자 5조각 남았음(전체 그리지 않음)
91	그림, 설명	수직선	통분한 후 “12/15-5/15와 같다” 수직선 15등분 중 12칸을 “전체”로 표시한 후 5칸을 가져감
92	언어, 그림	직사각형	4/5와 1/3를 분모끼리 통분한 후 4/5는 12/15로 1/3은 5/15로 하고 12/15에서 5/15를 없애야 하는 7/15 남는다. 직사각형 모형으로 표현
93	언어	설명	5와 3의 최소공배수는 15니까 12/15-5/15이다. 그러면 7/15이다.
94	그림, 언어	원	원을 5개로 나눠 4칸에 색칠(등분이 안됨) 중 1칸을 뺐
95	언어	설명	분모가 다르기 때문에 통분한 뒤 빼준다
96	언어	설명	5등분으로 한 4개와 다른 3등분으로 한 1을 뺐 것
97	그림, 화살 표	원	4/5 원과 1/3원을 그리고 1/3원 화살표로 빠져나가는 표시
98	그림, 언어	원,설명	4/5 원에 1/3원 만큼 작아짐
99	그림, 언어	직사각형, 답설명	4/5직사각형, 1/3직사각형 그림에 “5와 3의 최소공배수는 15니까 12/15, 5/15이다”
100	그림	직사각형	7/15 직사각형(색칠)로 답만 표현

10번	방 법	모 델	$1\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$
1	그림	사각형	직사각형 1개와 4등분된 직사각형(한칸은 점선으로 5등분으로 총 20등분) 3칸 색칠 => 직사각형 1개와 20등분 중 7칸 색칠
2	그림	사각형	직사각형 1개와 15/20, 8/20 => 1과 7/20
3	그림	사각형	1과 20분의 7직사각막대(20칸인데 5등분 되어있음)
4	그림	사각형	직사각형 1과 5*3 직사각형(7칸 색칠)
5	그림	사각형	직사각형 1과 5*3 직사각형에 15칸 색칠 중 8칸 빼기
6	그림	사각형	5*3 직사각형 한 개는 전체 색칠, 다른 한 개는 15칸 색칠 중 8칸 빼기
7	그림	원하나	1과 3/4원에서 1원을 5등분해서 2칸 빼기
8	그림	수직선	1과, 15칸인 3/4 수직선에서 8칸“2/5”를 빼면 1과 7/20
9	그림	수직선	수직선 4개, 1, 3/4(15/20), 2/5(8/20), 7/20
10	그림	수직선	35/20=1과3/4에서 2/5=8/20을 빼면 27/20=1과7/20
11	언어, 통분	설명	20개 중 35개에서 20 중 8을 뺀다.
12	언어, 통분	설명	20개 중 35개에서 20 중 8을 뺀다.
13	언어, 통분	설명	20개 중 35개에서 20 중 8을 뺀다.
14	언어, 통분	설명	대분수를 가분수로 고쳐 통분해 분자끼리 뺀다
15	언어, 통분	설명	대분수를 가분수로 고쳐 통분해 분자끼리 뺀다
16	언어, 통분	설명	대분수를 가분수로 고쳐 통분해 분자끼리 뺀다
17	언어, 통분	설명	4와 5를 통분한 다음 통분한 분수를 뺀다
18	언어, 통분	설명	1과3/4=1과 15/20에서 2/5=8/20을 빼면 1과7/20
19	언어, 통분	설명	1과3/4=1과 15/20에서 2/5=8/20을 빼면 1과7/20
20	언어, 통분	설명	1과3/4=35/20 에서 2/5=8/20을 빼면 27/20

	통분		
21	언어, 통분	설명	1과 3/4=35/20 에서 2/5=8/20을 빼면 27/20
22	언어, 통분	설명	1과 3/4=35/20 에서 2/5=8/20을 빼면 27/20
23	그림, 문제	사각형	1과 3/4 - 2/5 직사각막대
24	그림, 문제	사각형	1과 3/4 - 2/5 직사각형
25	그림, 문제	사각형	1과 3/4 - 2/5 직사각형
26	그림, 문제	사각형	1과 3/4, 2/5 직사각형
27	그림, 문제	사각형	1과 3/4 -> 2/5 직사각형
28	그림, 문제	사각형	1과 3/4 -> 2/5 직사각형
29	그림, 문제	원하나	1과 3/4, 2/5원
30	그림, 문제	원하나	1과 3/4, 2/5원
31	그림, 문제	원하나	1과 3/4원 중 2/5원 먹음
32	그림, 문제	원하나	1과 3/4원 중 2/5원 먹음
33	그림, 문제	원하나	1과 3/4원 중 2/5원 뺀다
34	그림	원날개	원 35개에서 8개 빼기(분자만 생각)
35	그림, 문제	도형	1과 3/4원에서 2/5 직사각막대 버리기
36	언어, 문제	설명	1과 3/4에서 2/5를 뺀 값
37	언어, 문제	상황	과자 1과 3/4가 있는데 동생에게 2/5 나눠줌

	계		
38	언어,문제	상황	사과 1개와 4개로 쪼갠 것 중 3개를 가져 5개를 쪼갠 것 중 2개를 빼면?
39	언어,문제	상황	사과 1과 $\frac{3}{4}$ 중 $\frac{1}{3}$ 을 먹으면 남은 사과는?
40	그림,답	사각형	1과 $\frac{7}{20}$ 직사각막대
41	그림,답	사각형	1과 $\frac{7}{20}$ 직사각막대
42	그림,답	수직선	사각형 1과 $\frac{7}{20}$ 수직선
43	숫자,답	숫자	1과 $\frac{7}{20}$
44	숫자,답	숫자	1과 $\frac{7}{20}$
45	그림	사각형	직사각형 하나와 $\frac{15}{20}$ , $\frac{8}{20} = \frac{7}{20}$ (직사각형 한 개X)
46	그림	사각형	1과 $\frac{3}{5}$ 막대(?)
47	그림	사각형	1과 $\frac{15}{20}$ 막대
48	그림	사각형	$\frac{7}{20}$ 막대
49	그림	사각형	1과 $\frac{3}{4}$
50	그림	사각형	1과 $\frac{3}{4}$
51	그림	원날개	1과 7개의 원(분자만 생각)
52	그림	원날개	1과 $\frac{6}{2} - \frac{8}{2} = 1과 \frac{7}{2}$ (분자분모 원표현)
53	그림	원날개	1과 $\frac{3}{4}$ , $\frac{2}{5}$ 를 표현한 듯 합(분자분모 원표현)
54	그림	원날개	1과 $\frac{3}{4}$ , $\frac{2}{5}$ , $\frac{7}{20}$ 표현(분자분모 원표현)
55	그림	수직선	$\frac{3}{4}$ 에서 한칸을 ' $\frac{2}{5}$ '로표시
56	언어	상황	공 35개에서 동생이 8개를 가져가 28개 남았다(분자,답X)
57	언어	상황	1과 $\frac{15}{20}$ kg 짜리 눈덩이 중 $\frac{6}{20}$ kg을 머리 만드는데 써서 1과 $\frac{9}{20}$ kg남았다
58	숫자		13500원??
59	언어		분수의 빨셈
60	무응답		
61	무응답		
62	무응답		

63	무응답		
64	무응답		
65	무응답		
66	그림, 화살표	직사각형	1과 3/4 직사각형 모델 그리고 거기서 화살표해서 2/5모델 그림
67			답안씀
68			답안씀
69	그림, 언어	직사각형	직사각형 2개 (20등분) 중 하나는 다 색칠 다른 하나는 1칸 색칠, 총 21/40칸 있는데 8/40칸이 사라짐 (2개라는 것을 1개로 착각)
70	그림	원, 직사각형	1 직사각형, 3/4원, 2/5직사각형
71	언어	상황	왼쪽 성에서 20명+15명 기사, 오른쪽 성에서는 8명 선수 출전, 얼마나 더 나왔는지 알아보면 왼쪽 성에서 27명 더 나옴(분자만 비교)
72	그림	직사각형	5등분된 직사각형 전체 색칠, 3/4직사각형에 전체 색칠된 것 중 2조각을 다른 모양으로 색칠
73	그림	원	1과 3/4, 2/5 원 (등분도 안되어있고 1에는 색칠도 안됨)
74	그림	원	1과 3/4원모델과 2/5원모델 그리고 그것을 먹는 모습을 그림
75	그림, 소수	직사각형 물통	1.75L 물이 들어있는 물통에 컵으로 물을 마심(컵 안이 얼마지 표시x)
76	그림	원	3/4, 2/5 원
77	그림	원	1과 3/4 원, 2/5원, 1과 7/20원(등분 아님)
78	그림	직사각형	5*4 직사각형 다 색칠된 것과 3/4 색칠(첫숫자만 사용)
79			답안씀
80	언어	뺄셈의미 설명	7/4(가분수)에서 2/5가 사라진 것(제거)
81	그림	원	알 수 없는 그림
82	그림	원	원 20개
83	그림, 화살표	직사각형	(소수) 1.75L 물 -> 2/5 직사각형 먹음
84	언어	뺄셈의미 설명	1과 3/4에서 2/5만큼이 없어졌다.

85			답 안씀
86	그림, 언어	직사각형	최소공배수 이용 20, 20등분인 직사각형에 2개 색칠(알 수 없음)
87	그림, 언어	직사각형	4등분된 직사각형을 5등분 더 해서 20등분으로 만들어 8/20을 뺌
88	그림	직사각형	1과 3/4 직사각형 모델에서 2/5 직사각형 모델을 물고기가 먹음
89	그림, 숫자	수직선	3/4수직선에 2/5를 빼면 9/20이 남는데 거기에 1을 더함
90	그림, 언어	직사각형	apple주스 1병과 3/4직사각형을 5명의 아이들 중 2명이 먹음, 통분 뒤 답을 직사각형 모델로 나타냄(비의 개념과 양의 개념을 혼용)
91	언어	상황(통분)	줄라맨이 35/20 중에서 8/20을 가져가 버려서 27/20이 남았다
92	언어	폴이(통분)	대분수 가분수 고치고 통분시킨 뒤 8/20을 없애면 답이 나옴
93	언어	폴이(통분)	1과 3/4을 가분수로 고치면 7/4이고 4와 5의 최소공배수는 20이니까 35/20-8/20이다. 그럼 27/20=1과7/20이 된다.
94	그림,화 살표	원	색칠된 원 하나와 3/4 원 중 다른 색으로 5등분 중 2개 뺌(답을 알 순 없음)
95	언어	폴이(통분)	대분수를 가분수로 고친 뒤 통분하고 빼준다. 만약 가분수이면 대분수로 고쳐준다.
96	언어	뺄셈의미 설명	1개와 4등분으로 한 3과 5등분으로 한 2개를 뺀 것
97	그림,화 살표	원	1과 3/4 원, 2/5 원 화살표
98	그림, 언어	뺄셈의미 설명	1과 3/4에서 2/5만큼 줄어든것=1과 1/3
99	그림, 언어	직사각형	지우개 1개와 3/4, 2/5 이만큼 잘라내면 20등분 직사각형에서 8칸 다른 모양으로 색칠하고 7칸 남음
100	그림	직사각형	3개의 전체 직사각형과 5등분 중 한 칸에만 색칠됨

[부록 7] 분수의 곱셈 개념 이미지 유형 분석

11번	방법	모델	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$
1	그림	사각형	6등분 중 3칸에 1/2, 3칸 중 2칸에 "2/3" 이니까 1/3
2	그림과 언어	사각형	2/3직사각막대에서 반을 나누면 1/3이 된다.(역연산)
3	그림	원하나	1/2원에서 색칠한 부분을 2/3으로 나누면 2/6원
4	그림	수직선	전체 1 수직선을 반으로 나눠 한 칸을 다시 3등분해서 2칸
5	그림	수직선	전체 1 수직선을 반으로 나눠 한 칸을 다시 3등분해서 2칸
6	그림	수직선	전체 1 수직선을 반으로 나눠 한 칸을 다시 3등분해서 2칸
7	그림	수직선	전체 1 수직선을 반으로 나눠 한 칸을 다시 3등분해서 2칸
8	그림, 약분	원날개	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 에서 분자2와 분모 2를 1로 하면 1/3(분모분자원표현)
9	그림, 약분	원날개	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 에서 분자2와 분모 2를 1로 하면 1/3(분모분자원표현)
10	언어	설명	1/2이 2/3개 있다.
11	언어	상황	피자 1판을 3명이서 먹는데 친구 1명이 와서 주라고 해서 2명이 자기의 반을 주었다.(역연산)
12	언어	공식	분자는 분자, 분모는 분모끼리 곱한 후 최대공약수로 나눔
13	언어	약분	분모와 분자끼리 곱한 뒤 나눔 값을 약분
14	언어	약분	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 에서 분자,분모로 약분되는 것을 찾아 약분 후 곱한다.
15	언어	약분	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 에서 분자2와 분모 2를 1로 하면 1/3
16	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 1/3
17	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 1/3
18	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 1/3
19	언어	약분	약분해서 1/3
20	그림과 언어	원하나	엑스자로 2분모와 2분자를 약분하면 1/3
21	그림,문제	사각형	1/2, 2/3 직사각막대
22	그림,문제	사각형	1/2, 2/3 직사각막대
23	그림,문제	사각형	1/2, 2/3직사각막대
24	그림,문제	사각형	1/2, 2/3 직사각막대를 곱한다.

25	그림, 문제 답	사각형	1/2 곱하기 2/3직사각막대 =>1/3
26	그림, 문제 답	사각형	1/2 곱하기 2/3직사각막대 =>1/3
27	그림, 문제	원하나	1/2원에서 2/3 원을 곱했다.
28	그림, 문제	원하나	1/2원에서 2/3 원을 곱했다.
29	언어, 문제	문제	사과1/2를 2/3으로 곱한 것
30	언어, 문제	문제	사과1/2를 2/3으로 곱한 것
31	언어, 문제	문제	2 중 1을 3중 2로 곱한 것
32	그림, 답	원날개	1/3(분모분자 원으로 표현)
33	그림, 답	사각형	1/2 곱하기 2/3 =>1/3
34	그림, 답	사각형	1/2 곱하기 2/3 =>1/3
35	그림, 답	사각형	1/2 곱하기 2/3 =>1/3
36	그림, 답	사각형	1/3직사각막대
37	그림, 답	사각형	1/3직사각막대
38	그림, 답	사각형	1/3직사각막대
39	그림, 답	사각형	1/3직사각막대
40	숫자, 답	숫자	1/3
41	숫자, 답	숫자	1/3
42	언어, 답	상황	사과 3개 중 하나
43	그림과 언어	원하나	1/2원에 2/3을 더해줌
44	그림	원하나	1/2원

45	그림	원날개	아래 6개, 위에 2개(2/6을 표현하려는듯)
46	그림	원날개	아래 6개, 위에 2개(2/6을 표현하려는듯)
47	그림	원날개	6개 원 중 3개 색칠
48	그림	원날개	알수없는 분수표현
49	그림	수직선	전체 1/2 수직선을 6등분해서 2칸“1/3”(1/6임)
50	그림	사각형	9사각형 7개
51	그림	사각형	사각형 2개
52	그림과 언어	사각형	1/2직사각막대를 2/3만큼 더한다.
53	숫자	숫자	1과 3/6
54	언어	설명	2와 3을 통분하여 분수를 곱함
55	언어	상황	1/2L 음료수를 3명 중 2명에게 1/3씩 나눠줌
56	언어		분수의 곱셈
57	무응답		
58	무응답		
59	무응답		
60	무응답		
61	무응답		
62	무응답		
63	무응답		
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	직사각형	1/2, 1/3 직사각형(알수없음)
67			답안씀
68	그림	직사각형	2*4 직사각형에서 2칸 색칠
69	언어	풀이 설명	분모 분자끼리 곱함
70	그림	직사각형	1/2, 2/3 = 3/6
71	그림	원(피자)	3/6 피자, 4/6 피자 -> 다 색칠된 원 2개
72	그림	직사각형	직사각형 반에 색칠하고 거기서 3등분해서 2칸에 색칠
73	그림	원	1/2와 1 원 (알 수 없음)
74	그림,화살표	직사각형	1/2 직사각형 모델 2개 -> 색칠된 직사각형 1를 3등분->1/3모델
75			답없음
76	그림	원	1/2원, 2/3원(등분 아님)
77	그림	원	1/2원, 2/3원, 1/3원 (그냥 숫자만 나타냄)

78	그림	원	6등분 원에서 2칸 색칠
79			답안씀
80	언어	설명	1/2을 2/3로 곱한 것
81	그림	원	알 수 없는 그림
82	그림	원	원 4개
83	그림	직사각형	직사각형의 반과 반을 3등분해서 2개 색칠된 것(더하기와 착각)
84	언어	설명	1/2가 2/3만큼 있다.
85			답 안씀
86	그림	직사각형	1/3 직사각형 (답만 나타냄)
87	그림, 언어	직사각형	1/2이 2/3개 있으면 6칸 중 2칸 색칠, 6개 중 2개이므로 2/6 즉 1/3임
88	그림, 언어	원	1/2와 2/3 원 모델을 “곱하면?”
89	그림,숫 자	수직선	1/2와 2/3을 표시한 후 답을 1/3으로 표시(과정은 안나옴)
90	그림,화 살표	직사각형	1/2,2/3 -> 1/3 모델
91	그림, 언어	설명,원	1/2이 2/3만큼 있으면 1/3이다. (2/3이 색칠된 원)
92	언어	약분설명	곱하기는 그냥 분자끼리, 분모끼리 곱하고 약분을 하면 1/3이 된다.
93	언어	약분설명	곱하기는 그냥 분자끼리, 분모끼리 곱하고 약분을 하면 1/3이 된다.
94	그림	원	원에 반 색칠하고 그 반을 3개로 나눈 중에 2개
95	언어	풀이 설명(약 분)	1/2곱하기 2/3는 1/2에 분모와 2/3에 분자와 같기 때문에 서로 약분해주면 1이 된다. 그럼 1/2은 1/1이 되고 2/3는 1/3이 되니까 1/3
96	언어	설명(약 분)	2등분으로 한 1과 3등분으로 한 2개를 곱하여 약분한것
97	그림	원	1/2, 2/3, 2/3, 2/3 원 그려짐
98	그림, 언어	원	1/2에 2/3만큼 수를 배로 늘인것=1/3(분수만 원모델로 그림)
99	그림	직사각형	초콜렛 1/2 중 2/3에 색칠
100	그림	삼각형(답)	1/3 삼각형

12번	방 법	모 델	$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$
1	그림	사각형	6등분 중 3칸에 1/2, 4칸에 "4/3" 이니까 2/3
2	그림	사각형	4등분 직사각막대 한칸당 1/3, 1/2로 나누면 "2/3"(역연산)
3	그림과 언어	사각형	3/3, 1/3 직사각막대에서 반을 나누면 2/3이 된다.(역연산)
4	그림	원하나	1/2원 -> 4/6원
5	그림	수직선	전체 1인 수직선을 반으로 나눠 반을 3등분한 뒤 1/2 뒤에 한 칸 더 해서 4칸에 표시(2/3)
6	그림	수직선	전체 1인 수직선을 반으로 나눠 반을 3등분한 뒤 1/2 뒤에 한 칸 더 해서 4칸에 표시(2/3)
7	그림	수직선	전체 1인 수직선을 반으로 나눠 반을 3등분한 뒤 1/2 뒤에 한 칸 더 해서 4칸에 표시(2/3)
8	그림	수직선	전체 1인 수직선을 반으로 나눠 반을 3등분한 뒤 1/2 뒤에 한 칸 더 해서 4칸에 표시(2/3)
9	그림	수직선	전체 1인 수직선을 반으로 나눠 반을 3등분한 뒤 1/2 뒤에 한 칸 더 해서 4칸에 표시(2/3)
10	그림, 약분	원날개	$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ 에서 분자 4는 분모 2의 두배라 2는 1로, 4는 2로 하면 2/3(분모분자원표현)
11	그림, 약분	원날개	$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ 에서 분자 4는 분모 2의 두배라 2는 1로, 4는 2로 하면 2/3(분모분자원표현)
12	그림	원날개	6개 원 중 4개 색칠
13	언어	설명	1/2이 4/3개 있다.
14	언어	상황	피자 1판과 1/3판이 있는데 친구가 와서 반을 먹음(역연산)
15	언어	공식	분자는 분자, 분모는 분모끼리 곱한 후 최대공약수로 나눔
16	언어	약분	분모와 분자끼리 곱한 뒤 나눔 값을 약분
17	언어	약분	분모와 분자를 약분해서 분모, 분자끼리 곱함
18	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 2/3
19	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 2/3
20	언어	약분	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 2/3
21	언어	약분	$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ 에서 분자 4는 분모 2의 두배라 2는 1로, 4는 2로 하면 2/3
22	언어	약분	약분해서 2/3
23	그림과 언어	원하나	엑스자로 2분모와 4분자를 약분하면 2/3
24	그림, 문제	사각형	1/2, 1과 1/3 직사각막대
25	그림, 문제	사각형	1/2, 3/3과 1/3 직사각막대

26	그림, 문제답	사각형	1/2 곱하기 4/3(1넙은칸은점선)직사각막대 =>2/3
27	그림, 문제	사각형	1/2 곱하기 1과 1/3직사각막대
28	그림, 문제	사각형	1/2 곱하기 1과 1/3직사각막대
29	그림, 문제	사각형	1/2 곱하기 1과 1/3직사각막대
30	그림, 문제	원하나	1/2원과 1과 1/3 원
31	그림, 문제	원하나	1/2원에서 1과 1/3 원을 곱했다.
32	그림, 문제	원하나	1/2원에서 1과 1/3 원을 곱했다.
33	그림과 언어, 문제답	사각형	1과 1/3에서 1/2직사각형을 나눈다. 그러면 2/3이 된다.
34	언어, 문제	문제	사과1/2를 사과 1개와 1/3으로 곱한 것
35	언어, 문제	문제	사과1/2를 사과 1개와 1/3으로 곱한 것
36	언어, 문제	문제	1/2 곱하기 4/3은 2/3
37	언어, 문제	문제	2 중 1을 3중 4로 곱한 것
38	숫자, 답	숫자	2/3
39	숫자, 답	숫자	2/3
40	그림, 답	원날개	2/3(분모분자 원으로 표현)
41	그림, 답	사각형	2/3직사각막대
42	그림, 답	사각형	2/3직사각막대
43	그림, 답	사각형	2/3직사각막대
44	언어, 답	상황	사과 3개 중 2개
45	그림,	원날개	아래 6개, 위에 4개(4/6을 표현하려는듯)

	답		
46	그림	원날개	알수없는 분수표현
47	그림, 문제	사각형	1/2, 3/4직사각막대
48	그림, 문제	사각형	1/2, 1과 1/2직사각막대를 곱한다.
49	그림	사각형	사각형 11개
50	그림	사각형	사각형 4개
51	그림	사각형	4/7 직사각막대
52	그림	사각형	알수 없는 분수 표현
53	언어	설명	2와 3을 통분하여 분수를 곱함
54	언어		분수의 곱셈
55	무응답		
56	무응답		
57	무응답		
58	무응답		
59	무응답		
60	무응답		
61	무응답		
62	무응답		
63	무응답		
64	무응답		
65	무응답		
66	그림	직사각형	1/2 3/3 직사각형(알 수 없음)
67			답안씀
68	그림	직사각형	2*4 직사각형 모델에서 4칸 색칠(알 수 없음)
69	언어	풀이방법 설명	분모 분자끼리 곱함
70	그림	원, 직사각형	1/2, 1 직사각형, 1/3원
71	그림	원	반원, 3/4 원, 4등분 원 다 색칠 4개
72	그림	직사각형	반에 색칠하고 3등분해서 4칸 색칠
73	그림	원	1/2와 3/4원모델
74	그림	직사각형	1/2 직사각형 모델 4개-> 색칠된 직사각형 2개-> 2개 직사각형 붙여 3등분->2/3직사각형
75			답없음
76	그림	원	1/3원
77	그림	원	1/2 원, 1과 1/3원, 4/6원(등분 안됨)

78	그림	원	6등분에서 4개 색칠 원
79			답안씀
80	언어	곱셈의미 설명	1/2을 4/3로 곱한 것
81	그림	원	알 수 없는 그림
82	그림	원	원 5개
83	그림	직사각형	직사각형을 반으로 나눈것+ 반을 3등분으로 나뉘서 점선으로 하나 더표시(더하기작각)
84	언어	곱셈의미 설명	1/2가 4/3만큼 있다.
85			답 안씀
86	그림	직사각형	2/3 직사각형 모델 (답만 표시)
87	그림, 언어	직사각형	1/2 직사각형 모델이 1개와 1/3이 더 있으면 4/6 즉 2/3가 된다.
88	그림	원	1/2원, 2/3원(등분안됨), 1개원 -> 2/3
89	그림, 숫자	수직선	1/2 수직선표시 -> 1/3표시에 1을 화살표로 표시
90	그림, 화살표	직사각형	1/2, 3/3, 1 -> 4/4, 4/4, 4등분 아무 색칠 안된 직사각형(알수없음)
91	언어	곱셈의미 설명	1/2이 4/3만큼 있으면 2/3이다
92	언어	풀이방법 설명	분자, 분모끼리 곱하고 약분을 하면 2/3이다.
93	언어	풀이방법 설명	분자, 분모끼리 곱하고 약분을 하면 2/3이다.
94	그림	원	원을 1/2로 나눈 뒤 또 3등분해서 6등분. 거기에 4칸에 색칠
95	언어	풀이방법 설명(약 분)	1/2에 분모와 4/3에 분자를 약분하면 1/2는 1/1이 되고 4/3는 2/3이 된다. 그래서 답은 2/3
96	언어	곱셈의미 설명(약분 )	2등분으로 한 1과 3등분으로 한 4개를 곱하고 약분한 것
97	그림, 화살표	직사각형	1/2 < -3/4
98	그림, 언어	원	1/2에 1과 1/3만큼 수를 배로 늘림 = 2/3
99	그림, 언어	직사각형	초콜렛의 1/2이 4/3만큼 있다
100	그림	원	2/3 원

[부록 8] 자연수끼리의 나눗셈 개념 이미지 유형 분석

1번	방 법	모 델	8÷2의 개념 이미지
1	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
2	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
3	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
4	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
5	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
6	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
7	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
8	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
9	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
10	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
11	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
12	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
13	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
14	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
15	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
16	그림, 포함	원 낱개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음

17	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
18	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
19	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
20	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
21	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
22	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
23	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
24	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
25	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
26	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
27	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음
28	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음, 4묶음임을 언어로 나타냄
29	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음, 4묶음임을 언어로 나타냄
30	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음, 4묶음임을 언어로 나타냄
31	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 묶음, 4묶음임을 언어로 나타냄

32	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 선으로 나눔
33	그림과 언어, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 선으로 나눔
34	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개를 2개씩 선으로 나눔(원 4개에 대응)
35	그림, 포함	원 날개 일렬	원 8개 -> 2개씩 화살표로 빼서 4번이 빠짐
36	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
37	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
38	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
39	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
40	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
41	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
42	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
43	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
44	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
45	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
46	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개를 2개씩 묶음
47	그림, 포함	원 날개 2*4	원 8개에서 2개만 묶음

48	그림과 언어,포함	네모날개	“8을 2로 나눌거니까 2가 4개 포함되어 있다”/사각형 8개를 2개씩 묶음
49	그림,포함	네모날개 일렬	사각형 8개를 2개씩 묶음
50	그림,포함	네모 2*4	사각형 8개를 2개씩 묶음
51	그림,포함	네모 2*4	사각형 8개를 2개씩 묶음
52	그림,포함	네모 2*4	사각형 8개를 2개씩 묶음
53	그림,포함	직사각막대	8등분 직사각막대 2칸씩 나눔
54	그림,포함	직사각막대	8등분 직사각막대 2칸씩 나눔
55	그림,포함	직사각막대	8등분 직사각막대의 2칸에만 색칠
56	그림,포함	수직선	8등분 수직선을 2칸씩 나눔
57	그림,포함	피자, 접시	피자 8조각을 한 사람이 2조각씩 나누어 먹음 (4접시)
58	그림,포함	피자,접시,사람	피자 8조각을 한 사람이 2조각씩 나누어 먹음 (4접시)
59	언어,포함	사탕 상황	사탕 8개를 2개씩 나눠주면 몇 사람 먹을까?
60	그림,등분	원 날개 일렬	4개씩 2묶음
61	그림,등분	원 날개 일렬	4개씩 2묶음
62	그림,등분	원 날개 일렬	4개씩 2묶음
63	그림,등분	원 날개 일렬	4개씩 2묶음
64	그림,등분	원 날개 일렬	4개씩 2묶음

65	그림, 등분	원, 직사각 형	직사각형막대 2등분(전체 8, 부분4) 중 한 부분에 색칠, 원 8개 일렬 중 4개만 묶어 화살표
66	그림, 등분	원 낱개 일렬, 사람	4개씩 2묶음해서 두 사람에게 줌
67	그림, 등분	사탕, 사람	8개의 사탕을 2사람이 4개씩 묶어 가짐
68	그림, 등분	원 낱개	4개씩 2묶음
69	그림과 언어, 등분	원 낱개	4개씩 2묶음 그림, “8개의 꿀을 2명에서 나누어 가짐”
70	그림과 언어, 등분	원 낱개	8개의 원 낱개 그림, “8개의 원을 반으로 나눈다, 그 나눈 몫을 8에서 빼준다”
71	그림과 언어, 등분	원 낱개	8을 그리면 (원 낱개 8개 일렬) 이 된다. 이것을 두 묶음으로 묶으면 (4개씩 두묶음 그림)으로 된다.
72	그림, 등분	2*4직사각형	2*4 직사각형을 2등분으로 나눔
73	그림, 등분	직사각형막 대	8이라고 적힌 직사각형을 반으로 나누고 4라고 씀
74	그림, 등분	직사각형막 대	8등분 직사각형을 반으로 나눔 = 2등분 중 한부분(4등분)
75	그림, 등분	직사각형막 대	8등분 직사각형 중 4칸에만 색칠
76	그림, 등분	수직선	전체가 8인 수직선을 2등분하고 4,4 표시
77	그림, 등분	사과	사과 8개를 선으로 나눠 4개씩 2등분됨
78	그림, 등분	원 하나	하나의 원을 8등분해서 반, 반 다른 색 색칠
79	언어, 등분	과자상황	8개의 과자, 2명의 사촌동생이 놀러오면 한명당 몇 개 과자?
80	언어, 등분	사과상황	사과 8개를 두 개로 나누면 한 묶음 당 4개

81	언어, 등분	설명	8의 반
82	그림, 등분	직사각막대	8등분 직사각형 -> (나누면) 4칸
83	그림, 등분	직사각막대	8등분 직사각형 -> 4칸
84	그림, 등분	원 날개	8개의 원에서 화살표 4개 묶음만 나눔
85	그림	사각형 날개	사각형 4개
86	그림	사각형 날개	사각형 4개
87	그림	사각형 날개	사각형 4개
88	그림	원 날개	원 4개
89	숫자	답	4
90	숫자	답	4
91	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
92	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
93	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
94	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
95	언어, 문제	분수표현	8이 분자, 2가 분모->팔 나누기 이
96	언어, 문제	문제표현	8 나누기 2는 4
97	언어, 문제	문제표현	8 나누기 2는?
98	언어, 문제	문제표현	8을 2로 나눈다.
99	그림	직사각막대	직사각막대 8칸 = 2칸씩 3개?
100	언어	상황	사과 8박스 중 2박스를 나누어 삼촌에게 주었다.(8-2?)

2번	방 법	모 델	3+2의 개념 이미지
1	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
2	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
3	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
4	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
5	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
6	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
7	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
8	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
9	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
10	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
11	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
12	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
13	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
14	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
15	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
16	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
17	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
18	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)

19	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
20	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
21	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
22	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
23	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
24	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
25	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
26	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
27	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
28	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
29	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
30	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
31	그림, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
32	그림, 포함	수직선	3칸 중 2칸에만 표시
33	그림, 포함	사각형날개	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
34	그림, 포함	사람	3사람 중 2사람에 선 그음
35	그림, 포함	직사각막대	직사각막대 3칸 중 2칸 색칠
36	그림, 포함	사과,바구니	3개 중 2개 묶음, 하나가 남음(나머지)
37	언어, 포함	사과상황	사과 3조각 중 2개 나눠먹어 1조각 남음

38	그림과 언어, 포함	직사각막대, 배상황	3칸 중 2칸 색칠, “배3개 중 2개 포장하면 1봉지, 1개 남음”
39	그림과 언어, 포함	원 날개, 설명	3개 중 2개 묶음, “3개를 2개씩 나누면 한 묶음이 나오고 하나가 남는다. 그러므로 답은 자연수가 아님”
40	그림과 언어, 포함	원 날개, 설명	3개 중 2개 묶음, “3개를 2개씩 나누면 한 묶음이 나오고 하나가 남는다. 그러므로 답은 자연수가 아님”
41	그림과 언어, 포함	원 날개, 물체상황	3개 중 2개 묶음, “어떤 물체가 3개 있다. 2개씩 나누면 1개되고 1개가 남음”
42	그림과 언어, 포함	원 날개	3개 중 2개 묶고 하나도 묶음 “는 1과1/2이다”
43	그림, 포함	직사각막대	직사각막대 3칸 중 2칸 색칠 후 안칠한 1칸에 “반”이라 표시하고 0.5
44	그림, 포함	직사각막대	직사각막대 3칸 중 2칸에 선을 긋고 남은 1칸과 점선으로 1칸 더 표시(1/2라는 표시인 듯)
45	그림, 포함	직사각막대	직사각막대 3칸 중 2칸에 “1”이라고 표시하고 남은 1칸 옆에 점선으로 1칸 더 표시(1/2라는 표시인 듯)
46	그림, 포함	원 날개	원 3개 중 2개 한 묶음, 나머지 하나도 묶고 점선으로 하나 더 표시해서 반을 나타냄
47	언어, 포함	설명	3을 2로 묶으면 1묶음과 1개 남음, 1개는 2의 반이니까 1묶음(2/2)과 2의 반(1/2)을 더하면 3/2이 나온다.
48	그림, 포함	원 날개	원 3개 중 2개 한 묶음, 나머지 하나도 묶고 화살표 하나를 반으로 나눠 0.5
49	그림, 포함	직사각막대	3칸 중 2칸에 색칠하고 = 2/3(3/2임)
50	언어, 포함	고구마상황	고구마 3개가 있는데 그 중 나하고 동생이 2개를 나누어 먹음
51	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나눠 묶음
52	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나눠 묶음
53	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나눠 묶음
54	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나눠 묶음

55	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 묶음
56	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 묶음
57	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 묶음
58	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 묶음
59	그림, 등분	원 날개	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 묶음
60	그림과 언어, 등분	원 날개	“사탕 3개를 2봉지에 나누면”, 원 1개와 반개가 봉투 안에 있음
61	그림, 등분	직사각막대	3개 중 가운데 하나는 반을 나뉘 색칠
62	그림, 등분	직사각막대	3개 중 가운데 사각형은 반반 다른 색으로 칠해 1.5, 1.5
63	그림, 등분	직사각막대	3칸 직사각막대 -> 1칸과 반칸(1.5)
64	그림, 등분	사과 날개	사과 3개 중 가운데 하나는 반을 자름
65	그림, 등분	사람,사탕	사탕 3개 중 가운데 하나는 반을 자르고 묶어 양쪽 사람 표시
66	그림, 등분	3*2직사각 형	3*2 직사각형을 7자로 반 나눔(1.5의 의미인 듯)
67	그림, 등분	직사각막대	2등분된 직사각막대(1.5,1.5,전체3표시)
68	그림, 등분	수직선	3이라고 표시된 1칸 수직선-> 1.5,1.5로 이등분된 수직선
69	그림, 등분	수직선	3이라고 표시된 1칸 수직선-> 1.5,1.5로 이등분된 수직선
70	그림, 등분	수직선	3이라고 표시된 1칸 수직선-> 1.5,1.5로 이등분된 수직선
71	그림, 등분	수직선	3이라고 표시된 1칸 수직선-> 1.5,1.5로 이등분된 수직선
72	그림, 등분	수직선	3이라고 표시된 1칸 수직선-> 1.5,1.5로 이등분된 수직선
73	그림과 언어, 등분	원 날개	원 3개, “3개의 동그라미를 반으로 나눈뒤 그 나눈 몫을 3에서 빼줌”

74	그림	사각형날개	2개의 사각형 중 1개와 반개에 색칠
75	그림	사각형날개	1.5를 사각형으로 표현
76	그림	사각형,원	사각형 1개와 원 반개색칠
77	그림, 등분	사각형,원	3L -> 사람얼굴원 2개- 1/2 직사각막대 "1과 1/2"
78	그림, 답	원날개	원 한 개와 반개 색칠
79	그림, 답	원날개	원 한 개와 반개 색칠
80	숫자	답	1...1
81	숫자	답	1과 1/2
82	그림문 제	원날개	원 한 개와 반개 색칠
83	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
84	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
85	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
86	그림, 문제	직사각형	문제를 그림으로 나타냄
87	언어, 문제	문제와답	삼나누기이느일과이분의일
88	언어, 문제	분수설명	2를 분모로하고 3을 분자로 하면 1과 1/2
89	언어, 문제	문제설명	삼을 이로 나눈다.
90	언어, 문제	문제설명	삼 나누기 이느?
91	그림	직사각막대	3칸 =3
92	그림	원 날개	큰 원 하나랑 작은 원 하나
93	그림	원 날개	원 두 개와 두 묶음
94	그림	반원	반원을 3등분함
95	그림	원하나	원 3등분 색칠
96	그림	원 날개	원 3개 묶음 -> 2개 묶음
97	그림	사과,원	사과 3개 대비 원 2개
98	그림	수직선	길게 1칸과 이어져있는 짧은 선(무언지 모름)
99	언어	물상황	물 3L를 두 병에 담그려면 한 병당 1L씩
100	언어	분수설명	2를 3으로 나눌 수 없으므로 뒤에 있는 2가 분모가 되어 분수가됨

3번	방 법	모 델	2÷2의 개념 이미지
1	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대 =1
2	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 “1”이라고 표시
3	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 전체 색칠해 “1”이라고 표시
4	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 전체 색칠
5	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 전체 색칠
6	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 전체 색칠
7	그림, 포함	직사각막대	2등분 직사각막대에 전체 색칠
8	그림, 포함	수직선	수직선 2칸이 하나
9	그림, 포함	사각형날개	사각형 2개를 한 묶음
10	그림, 포함	사각형날개	사각형 2개를 한 묶음
11	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
12	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
13	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
14	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
15	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
16	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
17	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음

18	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
19	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
20	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
21	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
22	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
23	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
24	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
25	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
26	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
27	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
28	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
29	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
30	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
31	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
32	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
33	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
34	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
35	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음

36	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
37	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
38	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
39	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
40	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
41	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
42	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
43	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
44	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음
45	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
46	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
47	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
48	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
49	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
50	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
51	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
52	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1
53	그림, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 는 1

54	그림, 포함	사람	사람 2명 / 사람 2명(사람2명을 하나로 보는 것을 나타낸 듯)
55	그림 과연 어, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음, “두개를 두 개씩 묶는다”
56	그림 과연 어, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음, “2개를 2개씩 나누면 한 묶음이 나온다.”
57	그림 과연 어, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음, “어떤 물체가 2개 있는데 두 개씩 한 묶음으로 나타내면 한 묶음이 된다”
58	그림 과연 어, 포함	원 날개	원 2개를 한 묶음 -> 원 1개에 대응, “원 두 개를 두 개의 한 묶음 씩하면 일이된다”
59	언어, 포함	배상황	배 2조각을 2개씩 나누어 먹음
60	그림, 등분	직사각막대	2등분 직사각형에 하나씩 1 표시
61	그림, 등분	직사각막대	2등분 직사각형에 하나씩 1 표시
62	그림, 등분	직사각막대, 저울	2등분 직사각형을 2개의 저울에 하나씩 올려놓음
63	그림, 등분	직사각막대	2등분 직사각형 중 하나에만 색칠
64	그림, 등분	원날개,사람	사람 하나에 원 하나씩
65	그림, 등분	사탕,사람	사람 하나에 사탕 하나씩
66	그림, 등분	원날개	원 2개 중 하나
67	그림, 등분	원날개	원 2개를 1개씩

68	그림, 등분	원날개	원 2개를 1개씩
69	그림, 등분	원날개	원 2개를 1개씩
70	그림, 등분	원날개	원 2개를 1개씩
71	그림, 등분	원날개	원 2개를 1개씩
72	그림, 등분	사과	사과 2개에 각각 1이라고 표시
73	그림, 등분	수직선	수직선 2칸에 1씩 표시
74	그림, 등분	수직선	수직선에 0,1,2 표시한 후 전체“2”표시
75	언어, 등분	공상황	친구들에게 공 2개를 두명에게 나누어주려면 1개씩 나눠줌
76	언어, 등분	압정상황	압정 2개를 선생님과 내가 나누어 사용함
77	언어, 등분	설명	2의 반
78	그림과 언어,등 분	원날개	원 2개, “2개의 동그라미를 반으로 나눈뒤 그 나눈 몫을 2에서 빼준다.”
79	그림과 언어,등 분	원날개	2를 oo로 표현한다. 이것을 2묶음으로 나누면 1묶음 당 1개
80	그림과 언어,등 분	양,목장	양 2마리를 2칸의 목장에 넣으려고 한다.
81	그림, 답	사각형	1개(답만)
82	그림, 답	사각형	1개(답만)
83	그림, 답	사과	1개(답만)

84	그림, 답	원	1개(답만)
85	그림, 답	원	1개(답만)
86	그림, 답	원	1개(답만)
87	그림, 답	원	1개(답만)
88	숫자, 답	답	1
89	언어, 문제	문제,답	이 나누기이는 일
90	언어, 문제	문제,답	이 나누기이는 일
91	언어, 설명	분수상황	2를 분모로하고 2를 분자로 하면 1이 된다.
92	언어, 설명	설명	2를 2로 나눈다.
93	그림, 문제	직사각막대	$2 \div 2 = 1$ (2를 직사각막대로 표시)
94	그림, 문제	직사각막대	$2 \div 2 = 1$ (2를 직사각막대로 표시)
95	그림, 문제	직사각막대	$2 \rightarrow$ (나누기) 1 (2,1을 직사각막대로 표시)
96	그림, 문제	직사각막대	2, 2 만 표시
97	그림 과언 어,문 제	직사각막대	2나누기 2는 1(숫자는 직사각막대)
98	언어, 문제	문제,답	이 나누기 1는?
99	그림	반원?	반원을 3등분 (뭘지 모르겠음)
100	숫자	공식?	$2=2$ (뭘 의미하는지 모름)

4번	방 법	모 델	1÷2의 개념 이미지
1	그림, 등분	직사각형	직사각형을 선으로 반 나눔
2	그림, 등분	직사각형	직사각형을 선으로 반 나눔
3	그림, 등분	직사각형	직사각형 반반에 "0.5"
4	그림, 등분	직사각형	직사각형 반반에 "0.5"
5	그림, 등분	직사각형	직사각형 반반에 "0.5"
6	그림, 등분	직사각형	직사각형 반에 색칠
7	그림, 등분	직사각형	직사각형 반에 색칠
8	그림, 등분	직사각형	직사각형 반에 색칠
9	그림, 등분	직사각형	직사각형을 반은 실선, 반은 점선으로 그리고 반에 "0.5"
10	그림, 등분	직사각형	직사각형 반 "0.5"
11	그림, 등분	직사각형	직사각형을 선으로 반 나눔
12	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
13	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
14	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
15	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
16	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
17	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔
18	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔-> 작은 원 두개
19	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눔 뒤 반반에 "0.5"

20	그림, 등분	원하나	원 하나에 화살표 반반 잘려진 원
21	그림, 등분	원하나	원 하나를 선으로 나누고 -> 반반 잘려진 원
22	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나눈 뒤 -> 반원 =>0.5
23	그림, 등분	원하나	원을 반씩 나눔
24	그림, 등분	원하나	원을 반씩 나눔
25	그림, 등분	원하나	원을 반씩 나눔
26	그림, 등분	원하나	원을 반씩 나눔
27	그림, 등분	원하나	원의 반에 동그라미
28	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나뉘 한쪽에 동그라미
29	그림, 등분	원하나	원을 선으로 반 나뉘 한쪽에 동그라미
30	그림, 등분	원하나	원의 반에 색칠=1/2
31	그림, 등분	원하나	원의 반에 색칠
32	그림, 등분	원하나	원의 반에 색칠
33	그림, 등분	원하나	원의 반에 색칠
34	그림, 등분	원하나	원의 반에 색칠
35	그림, 등분	원,사람	원을 선으로 반 나뉘 반쪽씩 2사람에게 나눠주는 그림
36	그림, 등분	원기둥	원기둥을 반으로 나눔
37	그림, 등분	수직선	전체 1에 반반 "0.5"로 표시
38	그림, 등분	수직선	전체 1에 반반 "0.5"로 표시
39	그림, 등분	수직선	전체 1에 반반 "0.5"로 표시

40	그림, 등분	수직선	전체 1에 반반 "0.5"로 표시
41	그림, 등분	수직선	전체 1에 반반 "0.5"로 표시
42	그림, 등분	수직선	전체 중 반에 "0.5"로 표시
43	그림, 등분	사탕, 사람	사탕 하나를 두사람이 나눠먹음
44	그림과 언어,등 분	원	원을 선으로 반 나눈 뒤 -> 반원 "어떠한 물체를 반으로 자르면 1의 반인 0.5가 된다.
45	그림과 언어,등 분	원	원을 선으로 반 나눈 뒤 -> 반원 "어떠한 물체를 반으로 자르면 1의 반인 0.5가 된다.
46	그림과 언어,등 분	원	원 하나 "1개의 동그라미를 반으로 나눈 뒤 1에서 그 몫을 빼줌
47	그림과 언어,등 분	원	원을 선으로 반 나눔 "1을 2로 나눈다"
48	그림과 언어, 등분	직사각형	직사각형 하나 ->(나누면) 직사각형 반에 색칠 "반"
49	언어, 등분	설명	한 도형에 반
50	언어, 등분	설명	1의 반
51	언어, 등분	설명	반
52	언어, 등분	피자상황	피자 한 조각을 2조각으로 나눠 먹음
53	언어, 등분	피자상황	피자 한 조각을 2명이 나눠 먹음
54	언어, 등분	빵상황	빵 하나를 둘이서 나눠먹음
55	언어, 등분	사과상황	사과 하나를 둘이서 나눠먹음
56	언어 등분	사탕상황	사탕 한 개를 2봉지에 나누면 1/2

57	언어, 등분	사과상황	사과 하나를 둘이서 나눠먹음
58	언어, 등분	물상황	물 1L를 둘이서 나눠먹으면 1/2L씩 먹음
59	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 실선원, 점선 원 하나씩
60	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 실선원, 점선 원 하나씩
61	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 실선원, 점선 원 하나씩
62	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 실선원, 점선 원 하나씩
63	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 원, 엑스포 하나씩
64	그림, 포함	원날개	한 묶음 안에 실선원, 점선 원 하나씩, "2개씩 묶기 위해 반개를 채운다"
65	그림, 포함	사각형	사각형 하나, ? 하나
66	언어	설명	1을 2로 나누지 못하기 때문에 소수점을 이용하여 나눈다
67	언어	설명	2로 1을 나눌 수 없으니까 2가 분모가 되어서 분수를 만든다
68	그림,문 제	직사각형	직사각형으로 1과 2만 표현, "1/2"
69	그림,문 제	직사각형	직사각형으로 1과 2만 표현
70	그림,문 제	직사각형	1 나누기 2는 0.5 (1과 2만 직사각형으로 표현)
71	그림,문 제	직사각형	1 나누기 2는 0.5 (1과 2만 직사각형으로 표현)
72	그림,문 제	직사각형	1 나누기 2는 2(1과 2 직사각형 표현)
73	언어 문제	문제	1 나누기 이는 이분의 일
74	언어 문제	문제	1을 2로 나눈다
75	언어 문제	문제	1을 2로 나눈 것
76	언어 문제	문제	1을 2로 나눈 것

77	언어 문제	문제	일 나누기 이는?
78	언어 문제	문제	1 나누기 2는 = 1/2입니다
79	그림	직사각형	직사각형 2개 = 2/1 =2(잘못됨)
80	그림	원날개	o / oo
81	그림	원날개	o ... o ??
82	그림	원날개	원 2개가 한묶음, 묶음이 5개(??)
83	그림	원날개	원 2개가 한묶음
84	그림	원날개	원 2개 중 하나에 동그라미
85	그림	원날개	원 2개를 하나씩 동그라미
86	그림	원 하나	원 하나
87	그림	원 하나	원 하나
88	그림	원 하나	원을 10등분함(??)
89	그림	사각형 하나	사각형 하나 ??
90	그림	빵,사람	빵 하나, 두 사람 -> 1<나머지>(??)
91	그림	사람	사람 2명
92	그림,답	원 하나	원 하나 =0.5
93	그림,답	사각형	0.5를 사각형으로 표현
94	숫자	1	1(뭘지모름)
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

5번	방 법	모 델	2÷4의 개념 이미지
1	그림, 등 분	직사각막대	전체 2인 직사각막대를 4등분하여 각각 0.5 표시
2	그림, 등 분	직사각막대	전체 2인 직사각막대를 4등분
3	그림, 등 분	직사각형	2개의 직사각형이 반씩 색칠되 있음
4	그림, 등 분	사탕, 사탕	사탕 2개를 4명이 나눠 먹음
5	그림, 등 분	사람, 원	원 2개를 4명이 나눠 먹음
6	그림, 등 분	사과	사과 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
7	그림, 등 분	사과	사과 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
8	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
9	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
10	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
11	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 반씩 나눠 반씩 4부분
12	그림, 등 분	원 날개	원을 반으로 점선으로 나눔, 2원이라 총 4부분
13	그림, 등 분	원 날개	원의 반씩 묶음 반원이라 총 4개
14	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔, 반원으로 잘라짐
15	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔, 반원으로 잘라짐
16	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔, 반원으로 잘라짐
17	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
18	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔

19	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
20	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
21	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
22	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
23	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
24	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔
25	그림, 등 분	원 날개	원 2개를 점선으로 반으로 나눔
26	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 각각 0.5 표시
27	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 각각 0.5 표시
28	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 각각 0.5 표시
29	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 각각 0.5 표시
30	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 각각 0.5 표시
31	그림, 등 분	수직선	전체 2인 수직선을 4등분하여 한 칸에 0.5 표시
32	그림과 언어, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔, 2를 4로 나눈다.
33	그림과 언어, 등 분	원 날개	원 2개를 선으로 반 나눔, 2개를 4개씩 나누면 작은 수를 큰 수로 나누는 것이므로 자연수가 될 수 없다. 그럼 4개 중 2개가 되고, 2개 중 한 개가 되므로 1/2이다.
34	그림과 언어, 등 분	사탕, 비닐	사탕 2개를 4봉지에 나누면 1봉지에 1/2개가 들어간다.
35	언어, 등분	사과상황	사과 2개를 가족 4명이 나누어 먹었음
36	언어, 등분	사과상황	사과 2개를 가족 4명이 나누어먹으려면 사과 반쪽씩 먹음

37	언어, 등분	사과상황	사과 2개 중 1개를 2명씩 먹음
38	그림,포함	원	4개 원 중 2개만 색칠
39	그림,포함	원	2개의 실선원, 2개의 점선원으로 한 묶음
40	그림,포함	원	2개의 실선원, 2개의 점선원으로 한 묶음
41	그림,포함	원	2개의 실선원, 2개의 점선원으로 한 묶음, 1/2
42	그림,포함	원	2개의 원과 2개의 엑스를 한 묶음
43	그림,포함	원	실선원 2개, 점선 원 2개를 각각 묶음
44	그림,포함	직사각형	한 묶음 안에 직사각형 2개와 ? 2개
45	그림,포함	직사각형	2*2 사각형에 가로로 긴 선으로 나눔
46	그림,포함	직사각형	2*2 직사각형의 반에 색칠
47	그림,포함	직사각막대	직사각막대 2개와 2개의 빗금
48	그림,포함	직사각막대	직사각형 2개와 점선으로 된 2개로 전체 4를 보면 0.5
49	언어, 답	분수	$2/4=1/2$
50	그림과 언어,포함	원	2개의 실선원, 2개의 점선원으로 한 묶음, 4개씩 묶기 위해 반개를 채운다
51	그림,등분	원,사각형	2L 직사각형물통에 4명 사람에게 나누면 1/2L
52	그림,포함?	원 날개	원 4개를 한 묶음으로 해서 2묶음 그림
53	그림,포함?	원 날개	4등분된 원이 2개
54	그림,포함?	원 날개	4등분된 원이 2개
55	언어	분수설명	4를 분모로하고 2를 분자로 해서 약분함
56	언어	소수설명	2를 4로 나누지 못하기 때문에 소수점을 이용해 나눈다.

57	언어,문제	문제	2나누기 4는 1/2입니다
58	언어,문제	문제	이 나누기 사는?
59	언어,문제	문제	2를 4로 나눈다
60	언어,문제	문제	이 나누기 사는 이분의 일
61	그림,문제	직사각막대	2 나누기 4는 이(계산 잘못함, 2와 4를 직사각막대로)
62	그림,문제	직사각막대	2를 4로 나누면 0.5 (2와 4가 직사각막대)
63	그림,문제	직사각막대	2 나누기 4는 0.5(2,4는 직사각막대)
64	그림,문제	직사각막대	2 나누기 4는 1/2(2,4는 직사각막대)
65	그림,문제	직사각막대	2와 4를 직사각막대로 표시, 1/2
66	그림,문제	직사각막대	2, 4
67	그림,답	원날개	원 2개 = 0.5
68	그림,답	원하나	원 반개
69	그림,답	사각형	사각형 반개에 색칠
70	그림,답	사각형	사각형 반개 = 0.5
71	언어,답	설명	한 도형의 반
72	그림,답?	원날개	원 2개 중 1개 반을 묶은 후 내보냄(0.5만 남김)
73	그림	직사각막대	2칸 직사각막대 2개 = 2
74	그림	직사각형	직사각형 2개->사각형을 3등분을 함(잘못함)
75	그림	사각형	큰 사각형 1개와 작은사각형 2개(??)
76	그림	전체원	10등분 된 원이 2개
77	그림	전체원	4부분으로 나뉨(등분 아님)
78	그림	원 날개	00/0000

79	그림	원 날개	원 2개
80	그림	원 날개	원 2개가 한 묶음으로 2묶음
81	그림	원 날개	원 2개 -> 4명의 사람이 나눠먹으면 -> 나머지 2(?)
82	그림	원 날개	원 4개에 2개를 화살표로 연결
83	그림	원 날개	원 4개가 한묶음, 묶음이 5개(??)
84	그림	원 날개	oo...oo??
85	그림	원 날개	원 2개
86	그림	원 날개	원 2개
87	그림	원 날개	원 4개를 2개씩 묶음
88	그림	원 날개	원 4개를 2개씩 묶어 원 2개와 대응
89	그림	사람	사람 4명을 2명씩 선으로 나눔
90	그림	사과	사과 2개
91	숫자	숫자	4 나누기 2
92	숫자	숫자	2
93	그림과 언어	원 날개	원 2개, 2개의 동그라미를 반으로 나눈 뒤 그 몫을 또 반으로 나누고 2 빼고 몫을 해줌
94	언어	문제	2를 4로
95	언어	설명	2의 반
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

[부록 9] (분수)÷(자연수)의 개념 이미지 유형 분석

6번	방법	모델	$\frac{1}{2} \div 2$ 의 개념 이미지
1	그림, 등분	반원	반 원을 또 반으로 나눈 1/4원을 하나씩 묶음
2	그림, 등분	반원	반 원을 또 반으로 나눈 1/4원을 하나씩 묶음
3	그림, 등분	반원	반 원을 또 반으로 나눈 1/4원을 하나씩 묶음
4	그림, 등분	반원	반원을 선으로 반 나누고->1/4원만 남김
5	그림, 등분	반원	반 원을 점선으로 반 나눔
6	그림, 등분	반원	반 원을 선으로 반 나눔
7	그림, 등분	반원	반 원을 선으로 반 나눔
8	그림, 등분	반원	반 원을 선으로 반 나눔
9	그림, 등분	반원	반 원을 선으로 반 나눔
10	그림, 등분	반원	반 원의 반에 동그라미
11	그림, 등분	반원, 원 하나	반원의 반에 색칠 -> 원 하나를 4등분(점선)하고 그 중 한 칸 색칠
12	그림, 등분	반원, 사람	반 원을 선으로 반 나누고 두 사람에게 화살표
13	그림, 등분	원 하나	원 하나를 반으로 나누고 -> 두 개로 나뉜 것에 또 반으로 나눔
14	그림, 등분	원 하나	원 하나를 반으로 나누고 -> 두 개로 나뉜 것에 또 반으로 나눔
15	그림, 등분	원 하나	원 하나를 반으로 나누고 -> 두 개로 나뉜 것에 또 반으로 나눔
16	그림, 등분	원 하나	1/2원(반점선)에서 그의 반에만 색칠
17	그림, 등분	원 하나	1/2원에서 그의 반에만 색칠-> 전체원에서 1/4에 색칠
18	그림, 등분	원 하나	원 반에 선을 긋고 한쪽 반의 반에 색칠
19	그림, 등분	원 하나	직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠
20	그림, 등분	직사각형	직사각형을 2등분하고 그 반쪽에 다시 반에 색칠
21	그림, 등분	직사각형	직사각형을 2등분하고 그 반쪽에 다시 반에 색칠
22	그림, 등분	직사각형	직사각형을 2등분하고 그 반쪽에 다시 반에 색칠
23	그림, 등분	직사각막대	직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠
24	그림, 등분	직사각막대	직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠
25	그림, 등분	직사각막대	직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠
26	그림, 등분	직사각막대	직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠

27	그림, 등분	직사각형	직사각형 2등분 중 반에 색칠->직사각형을 4등분 한 것 중 한 칸 색칠(2*2)
28	그림, 등분	직사각형	직사각형 2등분 "1/2" -> 직사각형을 4등분 "1/4" (1*4)
29	그림, 등분	직사각형	직사각형을 십자로 4등분 (2*2)
30	그림, 등분	직사각형	2*2 직사각형에 전체 1, 반을 1/2로 표시하고 그 중 가로로 반반 1/4로 표시
31	그림, 등분	수직선	전체 1/2인 수직선을 반반 나눠 각각 "1/4" 표시
32	그림, 등분	수직선	전체 1/2인 수직선을 반반 나눠 각각 "1/4" 표시
33	그림, 등분	수직선	전체 1/2인 수직선을 반반 나눠 각각 "1/4" 표시
34	그림, 등분	수직선	전체 1/2인 수직선을 반반 나눠 각각 "1/4" 표시
35	그림과 언어, 등분	비닐, 사탕	사탕 1/2개를 2봉지에 나누면 1개의 사탕의 1/4이 들어간다
36	그림과 언어, 등분	반원	반원, "2개씩 묶어 보세요"
37	그림과 언어, 등분	반원	반원의 반에 색칠(나머지반은 점선으로 전체원표시), "1/2을 2개씩 나누면 자연수가 나올 수 없고 그러면 1/2개는 2/4로 바꿔 2로 나누면 1/4"
38	그림과 언어, 등분	반원	반원, "반개의 동그라미를 반으로 나눈 뒤 그 묶을 반개의 동그라미 즉 0.5에서 빼줌"
39	언어, 등분	고구마상황	고구마 1/2가 있었는데 나와 동생이 1/2에 고구마를 반으로 잘라서 나누어 먹음
40	언어, 등분	설명	반의 반
41	그림, 포함	원 날개	1/2원에서 2개의 원을 점으로 만들어서 한 묶음으로 만들어 1/4원이 되게함
42	그림, 포함	원 날개	원 하나를 선으로 그리고 나머지 원은 점선으로 2개가 한묶음이 2묶음
43	그림과 언어, 포함	원 날개	원 하나를 선으로 그리고 나머지 원은 점선으로 2개가 한묶음이 2묶음, "1/2을 2개씩 묶기 위해 한 개 반을 채운다."
44	그림, 등분	물통(원통)	1/2L가 들어있는 물을 2통에 1/2씩 나누어 먹음
45	그림, 등분, 답	물통(원통)	1/2L 물통에서 1/2를 따르면 -> 1/4이 됨
46	그림, 등분, 답	원, 사각형	1/2L 물통에서 2명 먹으면 -> 2개 직사각형에 1/4이 됨
47	그림, 등분, 답	직사각형	작은 직사각형(1/2의미하는듯)->더작은 직사각형(1/4의미) = 0.25

48	그림,문제	직사각막대	1/2 나누기 2는 1/4 (1/2, 2만 표현)
49	그림,문제	직사각막대	1/2 나누기 2는 1/4 (1/2, 2만 표현)
50	그림,문제	직사각막대	1/2, 2만 표현
51	그림,문제	직사각형, 원	1/2, 2만 표현
52	그림,답	직사각형	직사각형?=0.25
53	그림,답	1/4원	1/4크기의 원
54	언어,역수 곱셈	푸는방법	1/2에서 나누기 2를 하면 곱하기로 바뀌면서 약수가 된다. 그 후 분모는 분모, 분자는 분자끼리 곱한다.
55	언어,소수 나눗셈	소수설명	1/2를 0.5로 고친 후 2로 나눔
56	언어,문제 와 답	문제와답	1/2 나누기 2는 1/4입니다.
57	언어,문제 와답	역수상황	1/2곱하기 1/2를 하면 1/4가 된다.
58	언어,문제	소수상황	1/2를 소수로 바꿔 5/10이 되면 0.5가 돼서 0.5를 2로 나눈다.
59	언어,문제	문제	이분의 일 나누기 이는?
60	언어,문제	문제	1/2를 2로 나눔
61	언어,문제	문제	이분의 일 나누기 이
62	언어,답	답	1/4
63	그림과언 어,문제	직사각형	1/2나누기 2에서 곱하기로 고쳐서
64	그림	사람,사과	사람 2명에 사과 2개씩
65	그림	직사각형	직사각형 2등분 전체에 색칠
66	그림	직사각형	직사각형 2등분 반에 색칠 -> 직사각형 하나 전체 색칠
67	그림	직사각형	2등분된 직사각형 안에 "1/2"라고 표시, 전체는 2?
68	그림	직사각형	직사각형 하나
69	그림	직사각형	직사각형 하나
70	그림	직사각형	직사각형 반개
71	그림	원하나	원 하나
72	그림	원하나	원 하나

73	그림	원하나	원 하나
74	그림	원하나	원 하나
75	그림	원하나	원 하나를 2등분
76	그림	원하나	원 하나를 2등분
77	그림	원하나	원 하나를 2등분
78	그림	1/4원	1/4원인데 이상한 사선을 그어놓음
79	그림	원날개	원 4개가 한 묶음
80	그림	원날개	원 2개가 한 묶음
81	그림	원날개	원 2개->1개
82	그림	원날개	원 5개
83	언어	설명	역수와 약분, 1
84	언어,문제 답	문제,답	이분의 일 나누기 이는 일
85	언어,문제 답	문제,답	이분의 일 나누기 이는 사가 된다.
86	언어,공식	역수상황	1/2곱하기1/2=4???
87	언어,답	숫자	2=4
88	숫자	숫자	4
89	숫자	숫자	1
90	숫자	숫자	2/1
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

7번	방 법	모 델	$\frac{1}{4} \div 2$ 의 개념이미지
1	그림,등분	1/4원	1/4원을 점선으로 이등분
2	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
3	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
4	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
5	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
6	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
7	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
8	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
9	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
10	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
11	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
12	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분
13	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분 후 1/8조각씩 동그라미
14	그림,등분	1/4원	1/4원을 선으로 이등분 -> 1/8조각 "1/8"
15	그림,등분	원 하나	8등분된 원 중 한칸에 색칠
16	그림,등분	원 하나	4등분된 원 중 한칸에 색칠하고 한 칸을 선으로 반 나눔
17	그림,등분	원 하나	점선으로 전체 원을 그리고 1/4원만 실선으로 표시 후 그 반에만 색칠
18	그림,등분	원하나, 사람	원의 1/4칸 빼고 색칠 후 색칠 안된 칸을 선으로 반 나눔 뒤 2사람 나눔
19	그림,등분	직사각막대	2*4직사각형에 세로로 4칸에 1/4표시, 가로에 1/8 표시
20	그림,등분	직사각막대	4등분된 직사각막대 중 한칸에 색칠 = 한칸 나누기 2 = 2등분
21	그림,등분	직사각막대	4등분된 직사각막대의 4칸을 점선으로 반으로 나눔(총 8칸)
22	그림,등분	직사각막대	4등분된 직사각막대 중 한 칸을 선으로 반 나눠 반에 색칠
23	그림,등분	직사각막대	8등분된 직사각막대 중 한칸에 색칠

24	그림,등분	직사각형	작은 사각형->더얇아진 사각형 = 0.125
25	그림,등분	직사각형	4등분된 직사각형(2*2)의 한 칸을 반으로 나눔
26	그림,등분	수직선	전체 1/4인 수직선을 반으로 나누고 각각 "1/8" 표시
27	그림,등분	수직선	전체 1/4인 수직선을 반으로 나누고 각각 "1/8" 표시
28	그림,등분	수직선	전체 1/4인 수직선을 반으로 나누고 각각 "1/8" 표시
29	그림,등분	수직선	전체 1/4인 수직선을 반으로 나누고 각각 "1/8" 표시
30	그림,등분	수직선	전체 1/4인 수직선을 반으로 나누고 각각 "1/8" 표시
31	그림,등분	수직선	4등분된 수직선에서 한 칸만 2등분 표시
32	언어,등분	설명	4개 중 1개를 2로 나눈다.
33	언어,등분	물 상황	물 1/4L를 2잔씩 나누면 1/8L
34	언어,등분	콜라 상황	콜라 1/4L를 2명이 먹으려고 하면 몇L 먹을까요?
35	언어,등분	감자상황	감자 1/4박스를 삼촌이 와서 반을 나눠주었다.
36	언어,등분	물건상황	4개 중에 한 개를 반으로 나눔
37	그림과언어,등분	원 하나	8등분된 원 중 한칸에 색칠, "1/4를 반으로 나눈다"
38	그림과언어,등분	원 하나	4등분된 원 중 한칸에 색칠, "1/4을 2개로 나누면" 8등분된 원 중 한 칸에 색칠 "1/8이 된다."
39	그림,포함	원날개	원 하나와 점선원 3개로 총 4개 원 한 묶음, 점선원4개 한묶음으로 2묶음
40	그림과언어,포함	원날개	원 하나와 점선원 3개로 총 4개 원 한 묶음, 점선원4개 한묶음으로 2묶음, "1/4을 2개씩 묶기 위해 한 개와 1/4의 나머지를 채운다"
41	그림,답?	원날개	원 8개에 원 하나 대응 (1/8?)
42	그림,문제	원 하나	1/4 나누기 2 (원으로 1/4, 2 표현)
43	그림,문제	원 하나	1/4 나누기 2 (원으로 1/4, 2 표현)
44	그림,문제	원 하나	1/4 나누기 2 (원으로 1/4, 2 표현)
45	그림,문제	직사각형	1/4 나누기 2 (직사각형으로 1/4, 2 표현)
46	그림,문제	직사각형	1/4 나누기 2에서 곱하기로 고쳐서 (직사각형으로 1/4, 2 표현)
47	그림,문제	직사각형	1/4 나누기 2로 나누면 1/2(답틀림) (직사각형으로 1/4, 2 표현)
48	그림,문제,답	직사각형	1/4, 2, 1/8 직사각형으로 표현
49	그림,문제	직사각형, 원	1/4는 직사각형, 2는 원으로 표현

50	그림,문제	직사각형, 원	1/4는 직사각형, 2는 원으로 표현
51	그림,문제	직사각형, 원	1/4는 직사각형, 2는 원으로 표현
52	언어,설명	푸는방법 설명	1/4에서 나누기 2를 하면 나누기가 곱하기로 바뀌어 뺏수가 역수가 된다 그것을 다시 곱하면 된다.
53	언어,설명	소수설명	1/4를 25/100으로 만들어 0.25 나누기 2를 한다.
54	언어,설명	소수설명	1/4를 0.25로 고친 후 2로 나눈다.
55	언어,문제	문제	1/4를 2로 나눈다.
56	언어,문제	공식,답	역수 = $1/4 \times 1/2 = 1/8$
57	언어,문제, ,답	문제,답	1/4를 2로 나누면 1/8이 된다.
58	숫자	답	1/8
59	숫자,답	공식,답	$1/4 \times 2/1 = 1/8$ (공식이틀림)
60	그림	원 하나	4등분 원 중에 한 칸에 색칠
61	그림	원 하나	$1/4 \rightarrow 2/4$
62	그림	원 하나	$1/4 \rightarrow 2/4$
63	그림	원 하나	4등분 원 중에 두 칸에 색칠
64	그림	원 하나	4등분 원 중에 두 칸에 색칠
65	그림	원 하나	1/4 원 $\rightarrow$ 1/6원
66	그림	원 하나	1/4 원 $\rightarrow$ 1/6원
67	그림	원 하나	2등분 원 중 반에 색칠
68	그림	원 하나	2등분 원 중 반에 색칠
69	그림	원날개	원 하나
70	그림	원날개	원 4개 중 2개 연결(??)
71	그림	원 날개	원으로 1/2 표현 (원래 밑에 4, 위에 1이었다가 밑에 2를 뺐)
72	그림	원 날개	원으로 1/2 표현 (원래 밑에 4, 위에 1이었다가 밑에 2를 뺐)
73	그림	사과상황	사과 8개 묶음
74	그림	직사각막 대	직사각막대 반에 색칠
75	그림	직사각막 대	4등분 직사각막대 = 2직사각막대 = 1개 사각형

76	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 중 한칸 색칠
77	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 중 두칸 색칠
78	그림	직사각막대	직사각막대 4칸 중 2칸을 자름, 한칸에 "1/4"
79	그림	직사각막대	직사각막대 4칸 중 2칸 씩 묶음
80	그림	직사각막대	직사각막대 4칸 중 2칸에 색칠
81	그림	직사각형	직사각형 2*2 4칸 중 한칸에 색칠
82	그림	직사각형	직사각형으로 1/2 표현 (선 하나에 아래는2, 위에는1)
83	그림	직사각형2*2	1/4 -> 2/4
84	그림	원통	1/4만큼 채워진 원통이 4개, 전체 물통 나누기 2
85	그림	알수없음	알수없음
86	언어	피자	피자 4조각을 2명에서 나눠먹음
87	언어	문제,답	사분의 일 나누기 이는 이(틀림)
88	언어	문제,답	영점이오 나누기 이 = 영점오(틀림)
89	숫자	숫자	2
90	숫자	숫자	8
91	숫자	숫자	1/4, 8
92	숫자	숫자	1/2
93	숫자	계산	$1/4 \times 1/2 = 6$ (틀림)
94	숫자	숫자	1250원(??)
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

8번	방 법	모 델	$\frac{1}{4} \div 4$ 의 개념이미지
1	그림, 등분	직사각형	2*2사각형 중 한칸 색칠 -> 4*4 사각형 중 한 칸 색칠
2	그림, 등분	직사각형	2*2사각형 중 한칸 색칠 -> 4*4 사각형 중 한 칸 색칠
3	그림, 등분	직사각형	4*4 사각형의 가로칸에 1/4, 세로칸에 1/16으로 표시
4	그림, 등분	직사각형	4*4 사각형 한 칸에 동그라미
5	그림, 등분	직사각막대	4등분 직사각막대 중 한 칸을 다시 4개로 나눈 것
6	그림, 등분	직사각막대	4등분 직사각막대 중 한 칸을 다시 4개로 나눈 것 중 하나 색칠
7	그림, 등분	직사각막대	4등분 직사각막대 4칸 모두 다시 4개로 점선으로 나눈 것
8	그림, 등분	원 하나	16등분한 원 중 한 칸에 색칠
9	그림, 등분	원 하나	16등분한 원 중 한 칸에 색칠
10	그림, 등분	원 하나	4등분 원 중 한 칸을 다시 4등분 한 것 중 한 조각 색칠
11	그림, 등분	원 하나	원 하나에서 1/4 조각을 떼서 1/4원조각을 4등분한 것
12	그림, 등분	원 하나	원 하나에서 1/4 조각을 떼서 1/4원조각을 4등분한 것
13	그림, 등분	원 하나	1/4 원을 4등분 한 것 중 하나에 색칠, 원 하나를 16등분 중 하나
14	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
15	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
16	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
17	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
18	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것

19	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
20	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
21	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
22	그림, 등분	1/4원조각	1/4원조각을 4등분한 것
23	그림, 등분	수직선	전체가 1인 수직선을 4등분한 뒤 1/4 수직선을 다시 4등분해서 1/16 표시
24	그림, 등분	수직선	전체가 1/4인 수직선을 4등분해서 1/16 표시
25	그림, 등분	수직선	전체가 1/4인 수직선을 4등분해서 1/16 표시
26	그림, 등분	수직선	전체가 1/4인 수직선을 4등분해서 1/16 표시
27	그림과언어, 등분	원 하나	16등분 원 중 4칸에 색칠된 상태, “1/4을 4개로 나누면 1/4이 4조각이 된다. 이것을 다른 곳도 4개씩 나누면 16조각이고 그 중 한 개가 1/16이다”
28	언어, 등분	수박상황	수박 4조각을 4명에서 나눠 먹음
29	언어, 등분	물상황	물 1/4를 4잔씩 나누면 1/16L
30	언어, 등분	빵상황	빵 1/4조각을 4조각으로 나눈것
31	언어, 등분	고구마상황	고구마 1/4가 있는데 4명이 고구마 1/4를 4등분해 나눠먹음
32	언어, 등분	설명	4개 중 1개를 4로 나눈다.
33	언어, 등분	설명	4개 중 한 개를 4개로 나눔
34	그림, 포함	원 날개	4개씩 한 묶음인 원 날개 중 하나만 실선원(1/4), 묶음이 총 4개
35	그림과언어, 포함	원 날개	4개씩 한 묶음인 원 날개 중 하나만 실선원(1/4), 묶음이 총 4개 “1/4을 4개씩 묶기 위해 3개와 1/4의 나머지를 채운다.”
36	그림,문제	직사각형	1/4 나누기 4 (직사각막대로 1/4, 사각형날개로 4 표현)
37	그림,문제	직사각형	1/4 , 4 , 1/16 표현

38	그림,문제	직사각막대	1/4 나누기 4을 곱하기 고쳐 풀기
39	그림,문제	원 하나	1/4 나누기 4 (원으로 1/4,4 표현)
40	그림,문제	원 하나	1/4, 4 표현
41	그림,문제	원 하나, 날개	1/4를 4으로 갈라먹음
42	그림,문제	원 하나, 날개	1/4를 4으로 갈라먹음
43	그림,문제	직사각형,원	1/4 나누기 4 (직사각막대로 1/4, 원날개로 4표현)
44	그림,문제	직사각형,원	1/4 나누기 4 (직사각막대로 1/4, 원날개로 4표현)
45	그림,문제,답	직사각형,원	1/4L 물을 4명이 나눠 먹으면 3/8L씩 먹음
46	언어,문제	문제	1/4을 4로 나눈다
47	언어,문제	문제	1/4을 4로 나누면 1/16이 된다
48	언어,문제	문제	사분의 일 나누기 사
49	언어,문제	문제	사분의 일 나누기 사
50	언어,문제	역수설명	1/4에서 나누기 4를 하면 곱하기로 바꿔 역수를 곱한다.
51	언어,문제	소수설명	1/4를 1/4*25를 해서25/100가 되면 0.25 나누기 2를 한다.
52	언어,문제	소수설명	1/4을 0.25로 고친 후 2로 나눈다.
53	그림	원 날개	16개의 원과 하나의 원 대응
54	숫자	답	1/16
55	숫자	답	역수 = 1/16
56	숫자	답	0.0625
57	그림	수직선	16등분 된 수직선 중 하나에 체크
58	그림,문제	직사각형	1/4을 4로 나누면 1
59	그림	직사각형	직사각형 하나

60	그림	직사각형	직사각형 하나
61	그림	2*2직사각형	1/4직사각형, 4/4 직사각형(색칠은 전체 안됨)
62	그림	직사각막대	16등분된 직사각막대
63	그림	직사각막대	4등분된 직사각막대
64	그림	직사각막대	4등분된 직사각막대
65	그림	직사각막대	4등분된 직사각막대의 한칸 색칠 (1/4)
66	그림	직사각막대	4등분된 직사각막대의 한칸 색칠 (1/4)
67	그림	직사각막대	4등분된 직사각막대, 한 칸에 "1/4"->1
68	그림	직사각막대	4등분된 직사각형 전체 색칠
69	그림	직사각막대	전체 4인 직사각막대의 한칸 색칠 = 한칸 ÷ 4 = 1칸이 4등분됨
70	그림	2*2직사각형	1/4
71	그림	원 하나	원 하나
72	그림	원 하나	원 하나
73	그림	원 하나	원 하나
74	그림	원 하나	원 하나
75	그림	원 하나	원 하나
76	그림	원 하나	사등분된 원이 전체 색칠
77	그림	원 하나	사등분된 원이 전체 색칠
78	그림	원 하나	사등분된 원 중 하나(1/4) -> 사등분된 원 전체(1)
79	그림	원 하나	원 하나에 조각(뭘 나타내는지 알 수 없음)이 화살표되어있음
80	그림	원 날개	원 4개
81	그림	원 날개	원 1개 / 원 4개 = 원 하나(4를 곱하는 것으로 착각해서 4를 빼는 표시)
82	그림	1/4원	1/4원을 4부분으로 나누긴 했는데 등분이 아님

83	그림	1/4원	1/4원을 4부분으로 나누긴 했는데 등분이 아님
84	그림	수직선	1/4가 전체에 4등분 되었으나 한 칸이 1/8로 적힘
85	언어	문제와답	사분의 일 나누기 사 = 일
86	숫자	답?	$1/4 * 1/4 = 16$
87	숫자	답?	$1/4 * 1/4 = 16$
88	숫자	답?	16
89	숫자	답?	16
90	숫자	답?	1
91	숫자	답?	1
92	숫자	답?	1
93	숫자	답?	1/10
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

9번	방 법	모 델	$\frac{3}{4} \div 2$ 의 개념이미지
1	그림, 등분	원 하나	3/4만 색칠 안하고 반으로 나눔
2	그림, 등분	원 하나	3/4 원(나머지는 점선으로 표시)을 2등분 중 한 부분에 색칠
3	그림, 등분	원 하나	3/4 부분에 색칠한 후 선으로 반 나눔
4	그림, 등분	원 하나	4등분원 3칸에 색칠 -> 8등분원 3칸 색칠
5	그림, 등분	원 하나	4등분원 3칸에 색칠 -> 8등분원 3칸 색칠
6	그림, 등분	원 하나	4등분원 3칸에 색칠해서 선으로 2등분
7	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
8	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
9	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
10	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
11	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
12	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
13	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
14	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
15	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분 (점선으로 한칸을 2등분해서 8등분으로 만들)
16	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분
17	그림, 등분	3/4원	3/4 원을 선으로 2등분 = 3/8

18	그림, 등분	3/4원	3/4 원에서 반에 등그라미
19	그림, 등분	3/4원	3/4원에서 X자로 8등분으로 만듦
20	그림, 등분	2*2직사각 형	3/4 직사각형을 대각선으로 반 자름
21	그림, 등분	2*4직사각 형	4등분된 직사각형에 3칸에 색칠한 부분에 "3/4", 가로로 반 나눠 "3/8"
22	그림, 등 분	2*4직사각 형	2*4 직사각형 중 2칸 엑스하고(3/4) 3칸 묶음 (3/8)
23	그림, 등분	직사각막대	4등분 직사각막대 = 3칸을 반으로 나눔
24	그림, 등분	직사각막대	3/4 직사각막대 -> 한 칸을 점선으로 2등분함
25	그림, 등분	직사각막대	3/4 직사각막대 = 3칸 ÷ 2 = 3칸을 반으로 나눠 다른 색으로 칠한 그림
26	그림, 등분	직사각막대	직사각막대를 4등분의 3칸 중 반에 색칠
27	그림, 등분	수직선	전체 3/4를 2등분해서 한 칸에 3/8
28	그림, 등분	수직선	전체 3/4를 2등분해서 한 칸에 3/8
29	그림, 등분	수직선	전체 3/4를 2등분해서 한 칸에 3/8
30	그림, 등분	수직선	전체 3/4 수직선을 8등분 한 것을 반으로 나눈 곳에 표시 "3/8"
31	그림과 언어, 등분	원 하나	8등분원 3칸 색칠, "3/4을 2개씩 나누면 3/8이 된다."
32	그림과 언어, 등분	원 하나	8등분원 3칸 색칠한 것 "3/4을 2개로 나누면"
33	언어, 등분	배상황	배 3/4 그중에 나랑 친구랑 나누어 먹음

34	언어, 등분	빵 상황	빵 3/4 조각을 2조각으로 나누는 것
35	언어, 등분	물상황	물 3/4L를 2컵씩 나누면 한 잔에 3/8L
36	언어, 등분	설명	3/4을 두 개로 쪼갠 값
37	언어, 등분	설명	4개 중 3개를 2로 나눈다
38	언어, 등분	설명	4개 중 3개의 반
39	그림, 포함	원날개	원 4개 중 3개 실선, 하나 점선 한 묶음, 다 점선 원 4개 한묶음
40	그림, 포함	원날개	원 4개 중 3개 실선, 하나 점선 한 묶음, 다 점선 원 4개 한묶음
41	언어	소수설명	3/4 분자의 25를 곱하고 75/100가 되면 0.75 나누기 2를 함
42	언어	소수설명	3/4를 0.75로 고치고 2로 나눈다.
43	언어	푸는방법	나누기를 곱하기로 고쳐 뒤에 수가 역수로 곱한다.
44	그림,문제	원 하나	3/4원과 1/2원 (역수취한 것까지 생각)
45	그림,문제	원 하나	3/4원과 1/2원 (역수취한 것까지 생각)
46	그림,문제	직사각형	3/4직사각막대와 사각형 2개
47	그림,문제	직사각형	3/4직사각막대 ÷ 사각형 2개
48	그림,문제	직사각막대	3/4직사각막대나누기 2칸 직사각막대
49	그림,문제	직사각형, 원	3/4직사각막대, 2개의 원
50	그림,문제	직사각형, 원	3/4직사각막대, 2개의 원 = 3/8
51	그림,문제,답	직사각형, 원	3/4L 물을 2명이 나눠 먹으면 3/8L씩 먹음
52	그림과 언어,문제	직사각형	3/4직사각막대에서 2로 나누면 3/8이 된다. (3/4만 직사각막대그림)

53	그림과 언어,문제	원 하나	3/4원 나누기 원 2개 (원만 그림표시)
54	그림과 언어,문제	원 하나	3/4원을 원 2개 로 나눔
55	언어	문제	3/4을 2로 나눈다.
56	언어	문제	사분의 삼 나누기 이
57	언어	문제	사분의 삼 나누기 이
58	언어	문제	사분의 삼 나누기 이
59	그림, 답	수직선	수직선 8등분 중 3칸 표시
60	그림, 답	원날개	원 세 개와 8개가 한 묶음
61	언어, 답	답	역수 = 3/8
62	언어, 답	답	0.375
63	언어, 답	답	3/8
64	언어, 답	답	3/8
65	언어, 답	답	3/8
66	그림	직사각막대	4등분 직사각막대
67	그림	직사각막대	4등분 직사각형을 반 나눔
68	그림	직사각막대	4등분 직사각형중 3칸 색칠
69	그림	직사각막대	4등분 직사각형중 3칸 색칠된 것과 4칸 중 2칸 색칠
70	그림	사각형	사각형으로 1과 1/2 표시
71	그림	사각형	사각형으로 3/2 표시
72	그림	2*2직사각형	사각형으로 1과 1/2 표시
73	그림	2*2직사각형	사각형으로 1과 1/2 표시

74	그림	2*2직사각형	사각형 3/4에 색칠 -> 6칸 중 3칸 색칠 (3/8)
75	그림	원, 직사각형	직사각형으로 1표시, 원으로 1/2 표시
76	그림	원 하나	원으로 1과 1/2 표시
77	그림	원 하나	원으로 1과 1/2 표시
78	그림	원 하나	원으로 1과 1/2 표시
79	그림	원 하나	원으로 1과 1/2 표시
80	그림	원 하나	원 하나 표시
81	그림	원날개	원 3개를 묶은 것이 2개
82	그림	원날개	원 4개 중 2개 묶음
83	그림	원날개	분모가 원 4개, 분자가 원 3개인데 분모에서 2, 분자에서 3 뺀(??)
84	그림	원날개	분모가 원 4개, 분자가 원 1개인데 분모 원 4개가 1개로 화살표 연결(?)
85	그림	원날개	원 3개 묶고 위에 원 2개(모름)
86	그림	사람, 원날개	원 4개 중 2개 제거 사람이 먹음, 2개와 3개(뭘언어하는지 모름)
87	언어	문제	사분의 일 나누기 사 = 일점오
88	언어	답	1과 1/4
89	그림과 언어, 문제	직사각형	3/4직사각막대에서 2로 나누면 1과 1/2
90	무응답		
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

[부록 10] (진분수)÷(진분수)의 개념 이미지 유형 분석

10번	방 법	모 델	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 의 개념 이미지
1	그림, 포함	원 하나	3/4색칠원 -> 1/2색칠원, 나머지 1/4색칠원 표시
2	그림, 포함	직사각막대	4등분된 직사각막대의 3칸을 선으로 표시한 뒤 1/2로 나눔
3	그림, 포함	직사각막대	4등분된 직사각막대의 3칸을 색칠한 뒤 그것을 2칸씩 나눔
4	그림, 포함	직사각막대	4등분된 직사각막대의 3칸을 선으로 표시한 뒤 2칸은 1, 1칸은 1/2 표시
5	그림, 포함	3/4원	3/4원을 반원과 1/4원으로 나뉘 1, 1/2
6	그림, 포함	3/4원	3/4원을 반원과 1/4원으로 나눔
7	언어, 포함	설명	3/4은 1/2이 1개 포함, 그러면 1/4이 남는데 1/4은 1/2에 반이므로 1과 1/2
8	언어, 포함	물컵상황	물3/4L를 1/2L 들이컵에 나누어 담으면 1과 1/2컵
9	그림, 역수곱	원날개	3개의 원과 1개의 점선원을 한 묶음으로 한 것이 2개
10	그림, 역수곱	원하나	3/4원이 2개
11	그림, 역수곱	원하나	3/4원이 2개
12	그림, 역수곱	원하나	3/4원이 2개
13	그림, 역수곱	원하나	3/4원이 2개
14	그림, 역수곱	원하나	3/4원이 2개
15	그림, 역수곱	수직선	6칸 수직선 중 3칸씩 '3/4' 표시
16	그림, 역수곱	수직선	6칸 수직선 중 3칸씩 '3/4' 표시
17	그림, 역수곱	수직선	3/4 표시된 한칸 수직선이 2개
18	언어, 역수곱	설명	4개 중 3개를 2로 곱한다.

19	언어, 역수곱	설명	$1/2$ 을 역수를 하여 $2/1$ 즉, 2로 바꾼 후 $3/4$ 와 곱함
20	언어, 역수곱	설명	$3/4$ 곱하기 2를 하고 약분을 하면 $3/2$ 이 된다. 대분수로 고치면 1과 $1/2$
21	언어, 역수곱	설명	나누기를 곱하기로 고쳐서 뒤에 수를 역수로 만든 후 곱함
22	그림, 통분	원날개	3개의 원을 2등분으로 나누어 1.5 표시
23	언어, 통분	설명	$3/4, 2/4 \rightarrow 3$ 나누기 2 $\rightarrow 1.5$
24	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 색칠원 나누기 $1/2$ 색칠원
25	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 색칠원 나누기 $1/2$ 색칠원
26	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 색칠원 나누기 $1/2$ 색칠원
27	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 색칠원 나누기 $1/2$ 색칠원
28	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 직사각막대, $1/2$ 직사각막대
29	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 직사각막대, $1/2$ 직사각막대
30	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 직사각막대, $1/2$ 직사각막대
31	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 직사각막대 나누기 $1/2$ 직사각막대
32	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 직사각막대 $\div$ $1/2$ 직사각막대
33	언어, 문제	문제	고구마 $3/4$ 중 $1/2$ 을 나누어 먹었다(?)
34	언어, 문제	문제	빵 $3/4$ 조각을 $0.5$ 조각으로 나눈 것
35	언어, 문제	문제	$3/4$ 을 $1/2$ 로 나눈 것
36	언어, 문제	문제	$3/4$ 을 $1/2$ 로 나눈 것
37	언어, 문제	문제	사분의 삼 나누기 이분의 일
38	언어, 문제	문제	사분의 삼 나누기 이분의 일

39	그림, 문제답	직사각막대	$3/4$ 직사각막대, $1/2 = 1$ 과 $1/2$
40	그림, 문제답	직사각막대	$3/4$ 직사각막대, $1/2 = 1$ 과 $1/2$
41	언어, 문제답	답	사분의 삼 나누기 이분의 일 = 일점오
42	그림, 답	직사각형	직사각형 1개와 $1/2$ 직사각형
43	그림, 답	직사각형	직사각형 1개와 $1/2$ 직사각형
44	그림, 답	직사각형	$1$ 과 $1/2$ (직사각형을 분모 분자로 표현)
45	그림, 답	직사각형	$1$ 과 $1/2$ (직사각형을 분모 분자로 표현)
46	그림, 답	원 하나	원 1개와 $1/2$ 원
47	그림, 답	원 하나	원 1개와 $1/2$ 원
48	그림, 답	원 하나	원 1개와 $1/2$ 원
49	그림, 답	원 날개	$1$ 과 $1/2$ (원을 분모 분자로 표현)
50	그림, 답	원 날개	$1$ 과 $1/2$ (원을 분모 분자로 표현)
51	숫자, 답	공식,답	$3/4 \times 2/1 = 1$ 과 $1/2$
52	숫자, 답	공식,답	$3/4 \times 2/1 = 1$ 과 $1/2$
53	숫자, 답	답	$6/4, 3/2, 1$ 과 $1/2$
54	숫자, 답	답	$1$ 과 $1/2$
55	숫자, 답	답	$1$ 과 $1/2$
56	숫자, 답	답	$1$ 과 $2/4$
57	숫자, 답	답	역수/약분 = $3/2 = 1$ 과 $1/2$
58	숫자, 답	답	3

59	그림	직사각형	4개의 직사각형 중 3개 색칠, 2등분 중 반쪽 색칠
60	그림	2*2직사각형	3/4원을 2등분함(3/8)
61	그림	직사각막대	3/4직사각막대
62	그림	직사각막대	3/4직사각막대
63	그림	직사각막대	3/4직사각막대
64	그림	직사각막대	3/4직사각막대-1/3막대
65	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 = 3칸을 반으로 나눔
66	그림	원 날개	3개의 원과 점선원 하나를 한 묶음, 점선원 4개 한 묶음 (3/8?)
67	그림	원 날개	2개 원 묶음에 원 하나씩 화살표
68	그림	원 날개	원 3개가 한 묶음, 묶음이 2개
69	그림	원 날개	4개 원과 2개 원(??)
70	그림	원 하나	원 하나
71	그림	원 하나	알수 없는부분으로 3/4원 나눔
72	그림	원 하나	알수 없는부분으로 3/4원 나눔
73	그림	원 하나	3/4원을 2등분함(3/8)
74	그림	원 하나	3/4원을 2등분함(3/8)
75	그림	원 하나	3/4원을 2등분함(3/8)
76	그림	원 하나	3/4원을 2등분함(3/8)
77	그림	원 하나	3/4원을 2등분함(3/8)
78	그림	원 하나	3/8 원
79	그림	원 하나	4등분 원 하나와 1/4
80	그림과 언어	원 하나	3/4원을 알수 없는 원(3/8?) 씩 나눔
81	그림과 언어	직사각막대	3/4에서 1/2을 나누면 3/8
82	언어	설명	분모는 분모끼리 나누면 3/2(예외 존재)
83	언어	설명	1/2의 두배와 1/4 두배를 합친다
84	언어	설명	1/2의 두배와 1/4 두배를 합친다
85	언어	설명	4개 중에 3개의 반
86	언어	문제	사분의 삼 나누기 이분의 이
87	무응답		
88	무응답		
89	무응답		
90	무응답		
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

11번	방 법	모 델	$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ 의 개념 이미지
1	그림, 포함	2*2직사각형	3/4직사각형->1/4 정사각형이 3개
2	그림, 포함	직사각막대	3/4직사각형에 1/4L로 3컵 나뉨
3	그림, 포함	직사각막대	3/4직사각막대 한 칸씩 묶어 총 3개
4	그림, 포함	직사각막대	4등분 직사각막대 중 3칸에 선을 그어 3칸에 "3" 표시
5	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원-> 1/4원 3개 나눔
6	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원-> 1/4원 3개
7	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원-> 1/4원 3개
8	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원에 1칸을 진하게 표시해서 포함되었음을 암시
9	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원에 선으로 3등분 나눔
10	그림, 포함	원 하나	4등분 중 3칸 색칠 원에 선으로 3등분 나눔
11	그림, 포함	3/4원	3/4원을 3등분
12	그림, 포함	3/4원	3/4원을 3등분->3
13	그림, 포함	수직선	4등분된 수직선 중 3칸에 '3/4', 한칸당 1/4, "3"
14	그림, 포함	수직선	4등분된 수직선 중 3칸에 '3/4', 한칸당 1/4, "3"
15	그림, 포함	수직선	4등분된 수직선 중 3칸에 '3/4', 한칸당 1/4, "3"
16	그림, 포함	수직선	4등분된 수직선 중 3칸에 '3/4', 한칸당 1/4, "3"
17	그림, 포함	수직선	4등분 중 3칸을 표시 '3/4' -> 수직선 "3"
18	그림, 역수곱	직사각막대	3/4직사각막대 4개는 4등분 직사각형 전체 색칠 3개가 된다.
19	그림, 역수곱	직사각막대	3/4직사각막대 4개는 4등분 직사각형 전체 색칠 3개가 된다.

20	그림, 역수곱	직사각막대	3/4직사각막대 4개는 4등분 직사각형 전체 색칠 3개가 된다.
21	그림, 역수곱	직사각형	3/4직사각막대와 4라고 적힌 직사각형
22	그림, 역수곱	원 하나	3/4원 4개
23	그림, 역수곱	원 하나	3/4원 4개
24	그림, 역수곱	3/4원	3/4원 4개
25	그림, 역수곱	3/4원	3/4원 4개
26	그림, 역수곱	원 낱언어	3개의 원과 한 개의 점선원을 하나로 묶은 것이 4개
27	언어, 역수곱	설명	나누기를 곱하기로 바꾼 뒤 뒤에 수가 역수가 되니까 약분을 하고 곱한다.
28	언어, 역수곱	설명	1/4을 역수를 하여 4/1 즉, 4로 바꾼 후 3/4과 곱한다
29	언어, 역수곱	설명,답	1/4을 역수한 후 약분할 분자 4와 분모 4를 약분 답은 3/1
30	언어, 역수곱	설명,답	4개 중 3을 4로 곱한다
31	언어, 역수곱	설명,답	$3/4 \times 4/1 = 3$
32	언어, 역수곱	설명,답	$3/4 \times 4/1 = 3$
33	언어, 역수곱	설명,답	$3/4 \times 4/1 = 3$
34	언어, 역수곱	설명,답	역수/약분 = 3
35	그림, 통분	원날개	3 나누기 1 = 3
36	언어, 통분	설명	3 나누기 1 = 3
37	그림, 문제	직사각막대	3/4, 1/4
38	그림, 문제	직사각막대	3/4, 1/4
39	그림, 문제	직사각막대	3/4, 1/4

40	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 나누기 $1/4$
41	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 나누기 $1/4$
42	그림, 문제	직사각막대	$3/4$ 나누기 $1/4$
43	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 원, $1/4$ 원
44	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 원, $1/4$ 원
45	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 원, $1/4$ 원
46	그림, 문제	원 하나	$3/4$ 원, $1/4$ 원
47	언어, 문제	문제	사분의 삼 나누기 사분의 일
48	언어, 문제	문제	사분의 삼 나누기 사분의 일
49	언어, 문제	문제	$3/4$ 을 $1/4$ 로 나눈다
50	언어, 문제	빵상황	빵 $3/4$ 조각을 $0.25$ 조각으로 나누는 것
51	언어, 문제	사탕상황	사탕 $3/4$ 봉지 중 $1/4$ 를 동생에게 나누어줌
52	그림, 답	원 날개	원 3개
53	그림, 답	원 날개	원 3개
54	그림, 답	원 날개	원 3개
55	그림, 답	원 날개	원 3개
56	그림, 답	원 날개	원 3개
57	그림, 답	원하나,원날개	4등분 중 3칸 색칠 원 -> 원 3개
58	그림, 답	직사각막대	3
59	그림, 답	직사각막대	$3/4$ 에 $1/4$ 을 나누면 $3(3/4, 1/4$ 직사각막대표현)

60	그림, 답	직사각형	직사각형 3개
61	그림, 답	직사각형	직사각형 3개
62	그림, 답	직사각형	직사각형 3개
63	그림, 답	직사각형	직사각형 3개
64	그림, 답	직사각형	직사각형 3개
65	그림, 답	사과	사과 3개
66	언어, 문제답	문제와답	사분의 삼 나누기 사분의 일 = 3
67	언어, 문제답	문제와답	사분의 삼 나누기 사분의 일 = 3
68	언어, 문제답	문제와답	3/4에서 1/4로 나누면 3이 된다.
69	숫자, 답	답	3
70	숫자, 답	답	3
71	그림	2*2직사각형	3/4, 1/4 -> 3/16직사각형(3/16)
72	그림	직사각막대	3/4직사각막대에 1개 색칠 막대 포함(?)
73	그림	직사각막대	3/4
74	그림	직사각막대	1/4
75	그림	직사각막대	3/16
76	그림	원 하나	4등분 원이 3개(??)
77	그림	원 하나	4등분 원 한 칸을 3등분-> 3
78	그림	원 하나	3/4원을 이상하게 3등분(??)
79	그림	3/4원	3/4원을 이상하게 선으로 나눔?
80	그림	3/4원	3/4원을 이상하게 선으로 나눔?
81	그림	3/4원	3/4원이 4등분(3/16)

82	그림	원 날개	4개, 4개(??)
83	그림	원 날개	3개 원과 1개 점선원이 한 묶음
84	그림과 언어	원 하나	3/4 나누기 3/4(?)
85	언어	설명	분모끼리 나누고, 분자끼리 나누면 3이 나옴(오개념계산법)
86	언어	설명	4개 중에 3개를 4개로 나눔
87	언어	설명	4개 중에 3개를 4개로 나눔
88	숫자	숫자	3/4
89	무응답		
90	무응답		
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

13번	방 법	모 델	$\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ 의 개념 이미지
1	그림, 포함	원 하나	4등분 원 중 한칸에 색칠 -> 1/8원 2개
2	그림, 포함	원 하나	4등분 원 중 한칸에 색칠, 8등분 원 중 한칸에 색칠
3	그림, 포함	2*4직사각형	2*4직사각형 두칸에 색칠
4	그림, 포함	1/4 원	1/4원을 선으로 2등분
5	그림, 포함	1/4 원	1/4원을 선으로 2등분
6	그림, 포함	수직선	전체 1을 4등분한 것 중 1칸을 2등분해서 1/8
7	그림, 포함	수직선	전체 1을 4등분한 것 중 1칸을 2등분해서 1/8
8	그림, 포함	수직선	전체가 1/4인 수직선은 1/8칸이 2개
9	그림, 포함	수직선	전체가 1/4인 수직선은 1/8칸이 2개
10	그림과 언어, 포함	원 하나	4등분 원 중 한칸에 색칠 후 그 한칸을 2등분한 8등분 원, “4개 중 1개를 8개 중 1개로 나눈다”
11	그림과 언어, 포함	문제와답	2/8원을 1/8원으로 나누면 2가 나온다.
12	언어, 포함	피자상황	피자 1/4조각을 1/8씩 나눠먹으면 몇 명 먹을까?
13	그림, 역수곱	직사각막대	1/4직사각막대 8개는 4등분 직사각막대 4/4직사각막대 2개가 된다
14	그림, 역수곱	직사각막대	1/4직사각막대 8개는 4등분 직사각막대 4/4직사각막대 2개가 된다
15	그림, 역수곱	원 날개	실선원 하나와 점선원 3개가 한 묶음인데 8묶음이 있음
16	그림, 역수곱	1/4원	1/4원이 8개

17	그림, 역수곱	1/4원	1/4원이 8개
18	언어, 역수곱	설명	1/4 곱하기 8은 2가 된다
19	언어, 역수곱	설명	1/4이 8개 있는 값
20	언어, 역수곱	설명	나누기를 곱하기로 바꿈
21	언어, 역수곱	설명	나누기를 곱하기로 바꾸면 뒤에 수가 역수가 되어 약분하고 곱함
22	언어, 역수곱	설명	나누기를 곱하기로 바꾸면 뒤에 수가 역수가 되어 약분하고 곱함
23	언어, 역수곱	설명	1/8을 역수하여 8로 바꾼 후 1/4로 곱함
24	그림, 통분	직사각막대	2/8직사각막대, 1/8직사각막대
25	그림, 통분	직사각막대	2/8직사각막대, 1/8직사각막대 -> 2
26	그림, 통분	직사각막대	2/8직사각막대, 1/8직사각막대 -> 2
27	숫자, 통분	숫자	1/4, 1/8 <-통분 2/8, 1/8 = 2
28	그림, 문제	직사각막대	1/4직사각막대 <- 1/8직사각막대
29	그림, 문제	직사각막대	1/4직사각막대 나누기 1/8직사각막대
30	그림, 문제	직사각막대	1/4직사각막대 나누기 1/8직사각막대
31	그림, 문제	직사각막대	1/4직사각막대 나누기 1/8직사각막대
32	그림, 문제	직사각막대	1/4직사각막대, 1/8직사각막대
33	그림, 문제	원 하나	1/4원을 1/8원으로 나눔
34	그림, 문제	원, 직사각형 하나	1/4원 나누기 1/8 직사각형
35	언어, 문제	빵상황	빵 1/4조각을 1/8조각으로 나누는 것

36	언어, 문제	감상항	감 1/4조각이 있었는데 그 중 1/8을 더 쪼개 친구랑 나눠먹었음
37	언어, 문제	문제	사분의 일 나누기 팔분의 일
38	언어, 문제	문제	1/4을 1/8로 나눔
39	언어, 문제	문제	1/4을 1/8로 나눔
40	언어, 문제	문제	1/4을 1/8로 나눔
41	그림, 답	원날개	원 2개
42	그림, 답	원날개	원 2개
43	그림, 답	원날개	원 2개
44	그림, 답	원날개	원 2개
45	그림, 답	원날개	원 2개
46	그림, 답	사과	사과 2개
47	그림, 답	원하나,원날개	1/4원 -> 원 2개
48	그림, 답	직사각형	직사각형 2개
49	그림, 답	직사각형	직사각형 2개
50	그림, 답	직사각형	1/4직사각형(2*2) -> 직사각형 2개
51	그림, 답	수직선	4등분된 수직선"1/4" -> 2가 전체인 수직선
52	그림, 답	배그림	배모양 2개
53	숫자, 답	숫자	2
54	숫자, 답	숫자	2
55	숫자, 답	숫자	2

56	숫자, 답	숫자	2
57	숫자, 답	숫자	역수=2
58	숫자, 공식답	숫자	$1/4 * 2 / 1 = 2$
59	숫자, 공식답	숫자	$1/4 * 2 / 1 = 2$
60	그림, 문제답	직사각막대	$1/4$ 직사각막대 나누기 $1/8$ 직사각막대는 2
61	그림, 문제답	직사각막대	$1/4$ 직사각막대, $1/8$ 직사각막대= 2
62	언어, 문제답	문제답	$1/4$ 을 $1/8$ 로 나누면 2가 된다
63	언어, 문제답	문제답	$1/4$ 나누기 $1/8$ 는 2
64	그림	원하나	$1/4$ 원 - 2(?)
65	그림	원하나	$1/4$ 원(?)
66	그림	원하나	$1/4$ 원(?)
67	그림	원하나	$1/4$ 원을 8부분 나눔(등분도 아니고, $1/32$ )
68	그림	원하나	$1/4$ 원-> $1/4$ 원만 자르고, $1/4$ 가 2개(?)
69	그림	원하나	$3/4$ 원이 2개(?)
70	그림	원하나	$1/4$ 원을 8등분( $1/32$ )
71	그림	원하나	$1/4$ 원을 8등분( $1/32$ )
72	그림	$1/4$ 원	$1/4$ 원 하나
73	그림	원날개	원 하나
74	그림	원날개	원 4개, 원 8개(??)
75	그림	원날개	실선원2,점선원2 묶음이 4개
76	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 한 칸을 8등분 ( $1/32$ )
77	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 한 칸을 8등분 ( $1/32$ )

78	그림	직사각막대	8등분중 4칸에 '1/4' 표시
79	그림	직사각막대	8등분중 4칸에 '먹은 것', '남은 것'
80	그림	직사각막대	1/4직사각막대 = 1칸 나누기 1/8 = 1/8? (1/32같은)
81	그림	직사각막대	4등분 직사각막대 전체 색칠
82	그림	직사각막대	1/4직사각막대 8개 -> 4/4 직사각막대 3개
83	그림	직사각형	분모에 직사각형 2개, 분자에 직사각형 1개
84	언어	설명	4 중 1개를 8개로 나누었다.(1/32)
85	언어	문제	4나누기 팔분의 일(??)
86	숫자	숫자	1
87	숫자	숫자	1/4, 1/8, 32
88	숫자	숫자	1/4, 1/8, 1/32
89	무응답		
90	무응답		
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		

[부록 11] (자연수) $\div$ (분수)의 개념 이미지 유형 분석

12번	방법	모델	$3\div\frac{1}{2}$ 의 개념이미지
1	그림, 포함	직사각형	직사각형 3개를 다 2등분해서 1/2 직사각형이 총 6개
2	그림, 포함	직사각형	직사각형 3개를 다 2등분해서 1/2 직사각형이 총 6개
3	그림, 포함	직사각형	직사각형 3개를 다 2등분해서 1/2 직사각형이 총 6개
4	그림, 포함	원 하나	2등분된 원 3개, 이걸 1/2원으로 나누면 6이 나옴
5	그림, 포함	원 하나	2등분된 원 3개
6	그림, 포함	원 하나	원 3개-> 반원으로 6개로 분리
7	그림, 포함	원 하나	원 3개-> 반원으로 6개로 분리
8	그림, 포함	수직선	전체 3인 수직선을 1/2단위로 나눠 총 6칸
9	그림, 포함	수직선	전체 3인 수직선을 1/2단위로 나눠 총 6칸
10	언어, 포함	피자상황	피자 3판이 있는데 1/2씩 나누어 먹음
11	언어, 포함	물상황	3L 물병에서 1/2L씩 덜어 나눠주면 몇 명이 마실 수 있을까?
12	그림과 언어, 포함	수직선	전체 3인 수직선을 1/2로 나눠 "1/2이 6개이므로 답은 6이다."
13	그림과 언어, 포함	원 하나	원 3개 -> 2등분된 원 3개 "1/2이 6개 들어있음" -> 6
14	그림과 언어, 포함	직사각막대	직사각막대 3칸에 반을 선으로 나눔 "3을 1/2개로 나누면 이게 6개가 된다."
15	그림, 역수곱	원날개	3개원 묶음이 2개
16	그림, 역수곱	원날개	3개원 묶음이 2개

17	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
18	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
19	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
20	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
21	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
22	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
23	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
24	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
25	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
26	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
27	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
28	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
29	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개
30	그림, 역수곱	원날개	3개월 묶음이 2개->6개
31	그림, 역수곱	초콜렛	초콜렛 3개가 있는데 3개를 더 사음
32	숫자, 역수곱	숫자	3이 2개
33	언어, 역수곱	설명	1/2을 역수로 하여 2로 바꾼 후 3과 곱함
34	언어, 역수곱	설명	3 곱하기 2하면 6이다
35	언어, 역수곱	설명	3이 2개 있는 값
36	언어, 역수곱	방법설명	나누기를 곱하기로 바꾼 뒤에 수가 역수가 된다. 그 수를 같이 곱하면 된다

37	언어, 역수곱	설명	$1/2$ 을 역수하면 $2$ , $3*2=6$
38	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
39	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
40	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
41	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
42	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
43	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
44	그림, 문제	직사각막 대	3직사각막대 나누기 $1/2$
45	그림, 답	원날개	원 3개 $\rightarrow$ 6개
46	그림, 답	원날개	원 3개 $\rightarrow$ 6개
47	그림, 답	원날개	원 6개
48	그림, 답	원날개	원 6개
49	그림, 답	원날개	원 6개
50	그림, 답	원날개, 직 사각막대	원 3개, $1/2$ 직사각막대 $\Rightarrow$ 6
51	그림, 답	직사각형	직사각형 3개 $\rightarrow$ 6개
52	그림, 답	직사각형	직사각형 6개
53	그림, 답	직사각형	직사각형 6개
54	그림, 답	직사각형	직사각형 6개
55	그림, 답	사과	사과 6개
56	언어, 답	숫자	역수=6

57	언어, 답	숫자	6
58	언어, 답	숫자	6
59	언어, 답	숫자	6
60	언어, 답	숫자	6
61	언어, 답	숫자	6
62	그림, 문제답	직사각막 대	3직사각막대 나누기 1/2(인것 같음) = 6
63	언어, 문제답	문제답	3에서 1/2을 나누면 6이 된다
64	언어, 문제답	문제답	3 나누기 1/2은 6이다
65	언어, 문제답	문제답	3 나누기 1/2은 6이다
66	그림	직사각막 대	3 직사각막대를 반 나눔 (1과 1/2)
67	그림	직사각막 대	3 직사각막대를 반 나눔 (1과 1/2)
68	그림	직사각막 대	3직사각막대 에 1/2를 나누면 0.6(??)
69	그림	직사각막 대	3직사각막대 -> 1과 1/2막대
70	그림	직사각막 대	3직사각막대 -> 1과 1/2막대
71	그림	직사각형	3개의 직사각형 중 하나와 반개 (1과 1/2)
72	그림	직사각형	큰 직사각형과 작은 직사각형 (1과 1/2?)
73	그림	직사각형	분모에 3개 직사각형, 분자에 2개 직사각형(??)
74	그림	원날개	원 3개를 선으로 2등분 함, (1과 1/2)
75	그림	원날개	원 3개를 선으로 2등분 함, (1과 1/2)
76	그림	원날개	원 3개 중 한 개와 반개에 색칠(1과 1/2)
77	그림	원날개	원 3개 중 한 개와 반개를 묶음(1과 1/2)
78	그림	원날개	큰 원 하나와 작은 원 하나(1과 1/2?)

79	그림	원날개	원 3개, 원 2개 (1과 1/2?)
80	그림	원 하나	3/4와 1/2 원
81	그림	원 하나	3/4와 1/2 원
82	그림	수직선	전체 3인 수직선의 반을 나눔 (1.5)
83	그림	수직선	3이라고 적힌 수직선 -> 수직선 총 3개 (?)
84	언어	설명	3의 반
85	언어	설명	3개를 2개로 나눔
86	언어	설명	3은 그대로 있고, 1/2은 역분수한다.
87	숫자	숫자	1/6
88	숫자	숫자	1과 1/2
89	무응답		
90	무응답		
91	무응답		
92	무응답		
93	무응답		
94	무응답		
95	무응답		
96	무응답		
97	무응답		
98	무응답		
99	무응답		
100	무응답		