碩士學位論文

피타고라스 정리의 증명법 고찰

指導教授　鄭 承 達

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 珉 廷

2004年　8

피타고라스 정리의 증명법 고찰

指導敎授 鄭 承 達

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2004年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 金 珉 廷

金珉廷의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2004年 7月 日

審 査 委 員 長 ______________________ 印

審 査 委 員 ______________________ 印

審 査 委 員 ______________________ 印

목 차

그 림 목 차

Ⅰ.서론

1. 연구의 필요성 및 목적

2001년부터 적용되는 제7차 교육과정은 21세기의 정보화 사회를 주도해 갈 인재 양성을 하는 것을 목적으로 하여, 학습자 중심의 교육이 이루어질 수 있도록 개정 되었다.

우리나라의 교육은 홍익인간의 이념 아래 모든 국민으로 하여금 인격을 도야하고, 자주적 생활 능력과 민주 시민으로서 필요한 자질을 갖추게 하여 인간다운 삶을 영위하게 하고, 민주 국가의 발전과 인류 공영의 이상을 실현하는 데 이바지하게 함을 목적으로 하고 있다.

이러한 교육 이념을 바탕으로, 교육 과정이 추구하는 인간상은 전인적 성장의 기반 위에 개성을 추구하는 사람 , 기초 능력을 토대로 창의적인 능력을 발휘하는 사람, 폭넓은 교양을 바탕으로 진로를 개척하는 사람, 우리 문화에 대한 이해의 토대 위에 새로운 가치를 창조하는 사람, 민주 시민 의식을 기초로 공동체의 발전을 공헌하는 사람이다.

모든 학문의 토대가 되는 수학 교육 목표는 새로운 생각을 해내고 사고력과 그것을 실천에 옮겨 가치 있는 것을 창출해 내는 창의 적인 인간을 육성하는데 있다. 그러므로 학교에서의 기하교육은 공간 지각력의 향상, 물리적 세계에 대한 이해, 수학적 개념의 표현 수단으로서의 기하학적 언어, 연역적인 증명 등 기하의 여러 측면이 고려되어야 한다.

현행 중등학교의 기하 내용에서 중요한 피타고라스 정리는 인류 역사상 가장 오래된 수학 정리들 중의 하나로 현재까지 370여 가지 이상의 증명 방법이 발견되었으며 지금도 새로운 증명 방법들이 계속 발견되고 있다.

따라서 본 논문에서는 창의적인 인간 육성을 위해 수학의 기초적인 개념, 원리 , 법칙을 이해하고 사물의 현상을 다양한 방법으로 관찰하고 사고 할 수 있는 능력 배양의 일환으로 피타고라스의 다양한 증명들을 증명법의 접근방법에 따라 종합기하, 해석기하, 벡터기하 변환기하로 분류 연구 하고자 한다.

2. 기하학의 접근 방법에 따른 분류

기하학을 기하의 발달단계에 따라 잠재적 기하, 서술적 기하, 연역적 기하로 분류하기고 하고, 힐버트가 제시한 다섯가지 공리군으로 분류하기도 하며 접근방법에 따라 종합기하, 해석기하, 벡터기하, 변환 기하로 뷴류하기도 한다. 또, 평행선 공준에 의한 유클리드 기하, 비유클리드 기하로 분류한다. 이와같이 여러 가지 방법에 의하여 기하학은 분류되고 있다.

본 장에서는 접근방법에 따른 기하학의 분류에 대해서 알아보고자 한다.

1) 종합기하

종합 기하란, 유클리드 기하와 같이 좌표를 쓰지 않고, 도형적 조작을 연구의 수단으로 하여 도형의 성질을 연구하는 기하학이다. 즉, 종합기하는 입체도형을 그리고, 이들이 가지는 성질을 해석하고, 인간의 활동에 기하를 응용하는 활동을 강조한다. 합동, 닮음 개념을 공부하고 이들 사이의 관계를 탐구하며 주어진 가정하에서 이끌어낸 도형들 사이의 관계와 성질을 이끌어 낸다. 도형에 관하여 대수적인 관점에서 접근하기도 하는데 해석기하, 벡터기하, 변환기하가 여기에 속한다.

2) 해석기하

해석기하란, 좌표를 도입하여 도형의 성질을 연구하는 기하학의 한 영역이다. 데카르트(Descartes,R.:1596~1650)가 해석 기하학의 방법을 발견한 후 기하학의 연구는 급속히 발달 하기 시작하였다. 해석 기하학은 대수학과 기하학의 개념을 연결한 것으로 서 도형의 연구 뿐만 아니라 대수학의 연구에서 많은 공헌을 하고 있다.

3) 벡터기하

벡터기하학이란 벡터를 이용하여 도형의 성질을 규명하는 방법이다. 고전적 또는 발생적으로 보면 벡터란 방향과 크기를 가진 유향 선분으로서 3차원 공간을 포함한 n차원 공간의 성질을 다루는데 편리하다. 특히, 벡터를 이용하면 3차원 공간의 도형의 방정식이나 그 성질을 연구하는데 매우 편리하므로 현대 기하학 연구에 중요한 영역을 차지하고 있다.

4) 변환기하

변환이란, 간단히 말해서 도형을 움직이는 것을 의미하며 여기에는 사영변환, 닮음변환, 합동변환 등이 있다. 변환 기하학적 접근은 기하학적 사고를 정적인 것에서 동적인 조작으로 변화시킬 뿐만 아니라, 변환의 합성과 군의 구조에 대한 학습 경험을 제공함으로써 기하와 대수의 구조적 유사성을 음미할 수 있는 기회를 제공 할 수 있다.

3. 피타고라스의 생애 및 업적

고대 그리스의 철학자이며, 수학자. 남이탈리아의 그리스 식민지 크로톤에서 비밀교단을 결성하고, 그 후 메타폰티온으로 이주하여 그곳에서 생애를 마쳤다. 당시의 밀의종교(密儀宗敎)의 형식에 따라 절제, 질박, 심신의 단련을 목표로 하고, 신들과 양친, 친구, 계율에 대하여 절대적 신실과 자제과 복종을 설파하였다. 그의 종교적 교의는 윤회와 사후의 응보로서 동시에 인간과 동물과의 유사성을 강조하고 육식을 금하였다. 이론적 방면의 연구에서는 음악과 수학을 중시하였는데, 음악에서는 일현금(一絃琴)에 의하여 음정이 수비례를 이루는 현상을 발견하고 음악을 수학의 한 분과로 보았다.

저서를 남기지 않았기 때문에 그의 업적이 그 자신의 것인지 또는 초기 제자들의 것인지의 구별은 이미 아리스토텔레스 시대에 확인할 수 없게 되었다. 오늘날에는 제자인 필로라오스와 기타 학자들의 저술의 단편에 의하여 당시 피타고라스와 그 일파의 업적이 알려져 있다. 피타고라스는 만물의 근원을 '수(數)'로 보았다. 그 수는 자연수를 말하는 것으로 이들 수와 기하학에서의 점과를 대응시켰다. 예컨대, 자연수 계열의 연속항의 임의의 항까지의 합은 삼각형수이고, 마찬가지로 기수계열의 합은 정사각형수, 우수계열의 합은 직사각형수라는 방법으로 정의하였다. 또 완전수, 인수의 합, 비례와 평균의 연구, 상가평균, 조화평균 등도 분류하였다. '피타고라스의 정리'도 그 자신의 업적인지 제자들의 업적인지는 불분명하며 그의 증명법도 오늘날에는 알려져 있지 않다(오늘날의 그 정리의 증명법은 유클리드에 유래한다). 그런데 이의 정리에서 의외로 곤란한 문제가 발생하였다. 즉, 정사각형

의 한 변과 그의 대각선과의 관계에 대한 문제이다. 이 경우 대각선의 길이는, 한 변을 1이라 할 때 $\sqrt{2}$가 되어 약분이 불가능한 무리수가 된다. 이것은 자연수만을 수로 생각한 피타고라스와 그의 제자들에 있어서는 극히 난 문제였기 때문에 수로부터 제외시켰던 것이다. 또 피타고라스와 그의 제자들은 임의의 삼각형의 내각의 합이 2직각(180°)과 같음을 발견하고 이를 증명하였다.

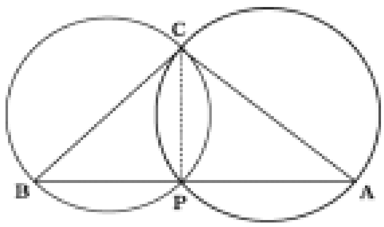
'플라톤의 다면체'로 불리는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체를 알고 있었다고 한다. 정십이면체는 정오각형의 작도를 필요로 하지만 한 선분을 중외비(中外比)로 끊는 문제로 환원시켜 이 작도에 성공하였다. 그리하여 피타고라스는 이 정오각형에서 생기는 성형오각형을 그의 교단의 휘장으로 채택하였다고 한다. 피타고라스가 수학에 기여한 공적은 매우 크며, 그의 영향은 플라톤, 유클리드를 거쳐 근대에까지 미치고 있다. 천문학에서는 지구가 구형임을 확신하고, 또 중심화의 주위에 지구와 태양 및 기타 행성이 원궤도로 회전한다는 일종의 지동설을 제창하였으나, 다른 학자들의 인정은 받지 못하였다.

Ⅱ.피타고라스정리의 접근방법에 따른 다양한 증명법

1.해석기하

1) 원을 이용한 증명법

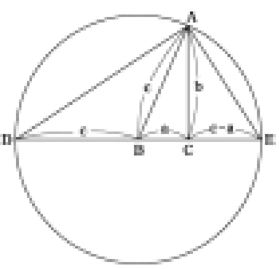
(1) 증명 I (Scott Brodie)



〈그림1〉

△ABC를 각 C에서 빗변 $\overline{AB}$에 수선을 내려 수선의 발을 P라 놓으면 $\angle CPB$는 직각이므로 점 P는 지름이 $\overline{BC}$ 인 원의 원주 위에 위치한다. 마찬가지로 $\angle CPA$도 직각이므로 점 P는 지름이 $\overline{CA}$인 원의 원주 위에 있다. 그러므로 두 원의 교점은 삼각형의 두 변 $\overline{BC}, \overline{CA}$의 교점과 점 P와 일치한다. 그리고 점 P 는 $\overline{AB}$ 위에 있다. $\triangle ABC$ $\overline{AB}=c$, $\overline{CB}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{PB}=x$, $\overline{PA}=y$ 라면 , 각 C는 직각이고 $\overline{BC}$는 지름이 $\overline{AC}$ 인 원의 접선이므로 $a^2=xc$, 마찬가지로 $\overline{AC}$는 지름이 $\overline{BC}$ 인 원의 접선이므로 $b^2=yc$ 이다. 따라서 두 식을 더하면 $a^2+b^2=xc+yc=(x+y)c=c^2$ 이고 $x+y=c$이므로 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

(2) 증명Ⅱ



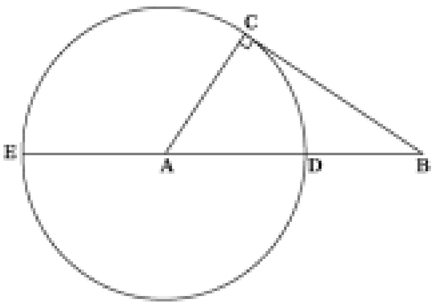
〈그림2〉

점 B를 중심으로 하고 반지름 c인 원안에 그림2와 같이 ∠BCA=90° 인 $\triangle ABC$를 그리고 $\overline{AC}=b$ $\overline{BC}=a$ 라 하자. 한편 $\overline{DE}$ 는 원의 지름이므 $\angle DAE=90°$ 이다. $\triangle DAC$와 $\triangle AEC$에서 $\angle ADC=\angle EAC$, $\angle DCA=\angle ACE$ 이므로 $\triangle DAC \backsim \triangle AEC$이다.

따라서 $\overline{DC}:\overline{AC}=\overline{CA}:\overline{CE}$ 이다.

그러므로 $c^2=a^2+b^2$이다.

(3) 증명Ⅲ



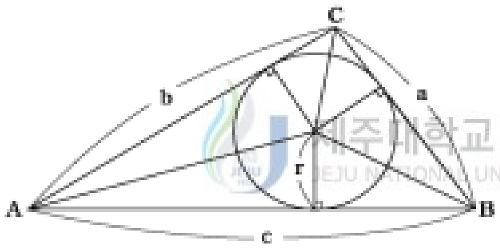
<그림3>

점 A를 중심으로 반지름 $\overline{AC}$인 원을 그린다. ∠ABC=90°이고 $\overline{BC}$는 접선이다. 따라서, 원의 접선과 할선의 관계에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{BD}\cdot\overline{BE}\\ &=(\overline{AB}-\overline{AD})(\overline{AB}+\overline{AE})\\ &=(\overline{AB}-\overline{AC})(\overline{AB}+\overline{AC})\\ &=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2\end{aligned}$$

따라서 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$ 이다

(4) 증명Ⅳ



<그림4>

그림4 에서 △ABC의 넓이를 두 가지 방법으로 구해보면

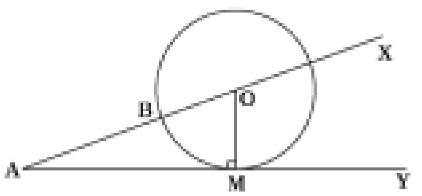
$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar$ 이다. 즉,

$ab=(a+b+c)r$ 이다.

또 $\overline{AB}$ 의 길 $c=(b-r)+(a-r)$이므로 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$ 이다.

따라서 $ab=(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)$이다. 그러므로 $c^2=a^2+b^2$ 이다.

(5)증명Ⅴ

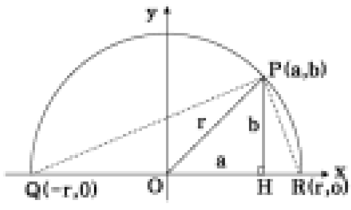


<그림5>

그림5에서 O는 원의 중심, M은 원과 $\overline{AY}$의 접점, B는 $\overline{AX}$ 의 교점 중 A에 가까운 점, M는 X와 가까운 점 그리고 $\overline{AX}$위에 O가 있다. 만약 $\overline{AM}=a$ $(a>0)$, $\overline{AB}=x$ $(x>0)$,

$\overline{MO}=b$ $(b>0)$라 두면 $\triangle MAB \backsim \triangle CAM$이다. 따라서 $\overline{AB}:\overline{AM} = \overline{AM}:\overline{AC}$ 이고 $\overline{AM}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AC}$ 이므로 $x^2+2bx-a^2=0$ 이다. 이차방정식을 풀면 $x = -b\pm\sqrt{b^2+a^2}$ 이다. x는 음수가 될 수 없으므로 $x = -b+\sqrt{b^2+a^2}$ 이다. $\triangle AMO$는 직각삼각형이고 $\overline{AO}=\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{AB}+\overline{MO}$ 이므로 $\overline{AO}=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 따라서 $\overline{AO}^2=\overline{AM}^2+\overline{OM}^2$ 이다.

(6) 증명Ⅵ



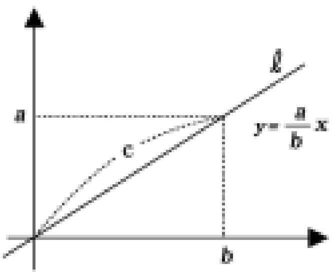
〈그림6〉

그림6에서 PQ의 기울기 $=\dfrac{b}{a+r}$, PR의 기울기 $=\dfrac{-b}{r-a}$이고 $PQ\perp PR$ 이므로

$\dfrac{b}{a+r}\cdot\dfrac{b}{a-r}=-1$ 이다. 따라서 $c^2=a^2+b^2$다.

2)적분을 이용한 증명법

(1) 증명Ⅰ



〈그림7〉

곡선의 길이를 계산하는 공식은

$l=\int_0^b |\gamma'(t)|\,dt$이다. 여기서 직선 l 의 방정식은 $\gamma(t)=(x, \dfrac{b}{a}x)$, $(o\le x\le b)$이다. 그러므로

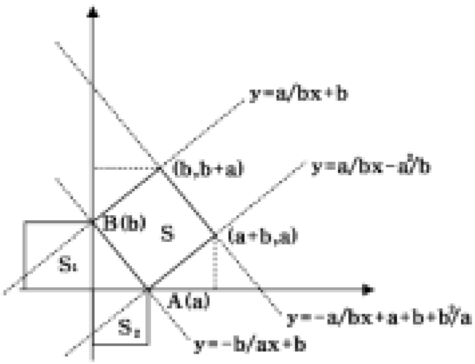
$c=\int_a^b\sqrt{1^2+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}\,dx$ 이다. 따라서

$$c=\int_0^b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\cdot x\,\Big|_{x=0}^{x=b}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\cdot b=\sqrt{a^2+b^2}$$

이므로 $c^2=a^2+b^2$ 이다.

(2) 증명Ⅱ



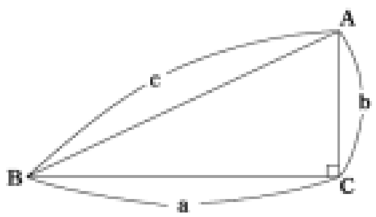
<그림8>

이 방법은 일차함수의 식으로 적분하여 정사각형의 넓이를 구해 봄으로써 증명하는 방법이다.

$$\begin{aligned} S= &\int_0^{a+b}\left(\frac{-b}{a}x+a+b+\frac{b^2}{a}\right)dx-\int_0^{b}\left(\frac{-b}{a}x+a+b+\frac{b^2}{a}\right)dx \\ &+\int_0^{b}\left(\frac{b}{a}x+b\right)dx-\int_0^{a}\left(\frac{-b}{a}x+b\right)dx-\int_a^{a+b}\left(\frac{a}{b}x-\frac{a^2}{b}\right)dx \\ &=a^2+b^2=S_1+S_2 \end{aligned}$$

2.벡터 기하

1) 벡터를 이용



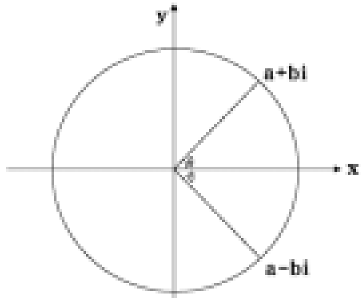
<그림9>

그림9에서 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ 이다.
$a=\|\overrightarrow{BC}\|$, $b=\|\overrightarrow{CA}\|$, $c=\|\overrightarrow{BA}\|$ 이라 하자

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\overrightarrow{BA}\|^2=\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\|^2 \\ &=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) \\ &=\|\overrightarrow{BC}\|^2+2(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA})+\|\overrightarrow{CA}\|^2 \end{aligned}$$

이다. $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{CA}$의 사잇각은 90°이므로 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=0$이다. 따라서 $c^2=a^2+b^2$ 이다.

2) 복소수 이용



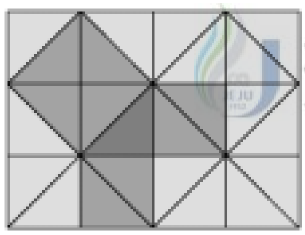
〈그림10〉

복소좌표 평면 위에서 반지름이 1인 원 위의 점을 $e^{i\theta}$로 표현할 수 있다. 즉, $a+bi=e^{i\theta}$ 이다. 만약 반지름이 c 라면 $a+bi=ce^{i\theta}$ $a-bi=ce^{-i\theta}$이다. 따라서 두 식을 곱하면 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

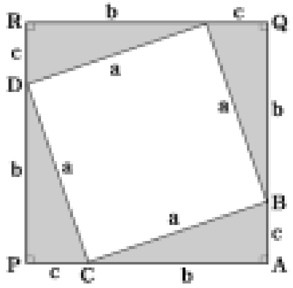
3. 변환기하학

1)합동

(1) 증명 I


〈그림11〉

피타고라스는 당시 사원의 보도 블록을 보고 이 정리의 힌트를 얻었다고 한다. 그림을 보자. 가장 진한색 직각삼각형의 주위를 유심히 보면, 빗변 위에 그려진 정사각형에는 보도 블록 4개가 들어가고 다른 변 위에 그려진 정사각형에는 각각 2 개씩 들어간다. 2+2=4는 너무도 자명하다. 이것은 직각이등변 삼각형의 경우이지만 피타고라스는 이것을 더욱 일반화하여 일반적인 직각삼각형의 경우에까지 적용했으리라는 추측이다.



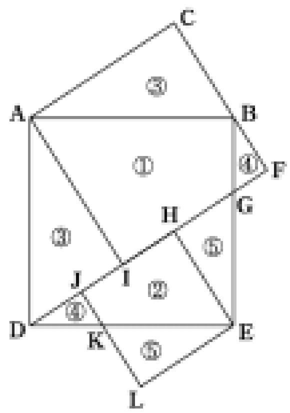
〈그림12〉

그림12에서 △ABC=△QEB=△RDE=△PCD이므로 □BEDC는 정사각형이다. 따라서 □AQRP=□BEDC + 4△ABC 이다. 그러므로

$$(b+c)^2=a^2+4\times\frac{bc}{2},\ b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$$

에서 $b^2+c^2=a^2$ 이 성립한다.

(2) 증명Ⅱ



<그림13>

그림13 에서 □ADEB, □AIFC, □ JLEH 는 정사각형 이다. 그러므로 각각의 면적은

$\square AIFC = \overline{AC}^2 =$①+③+④ ,

$\square JLEH = \overline{BC}^2 =$②+⑤ ,

$\square ADEB = \overline{AB}^2 =$①+②+③+④+⑤

이다. 따라서

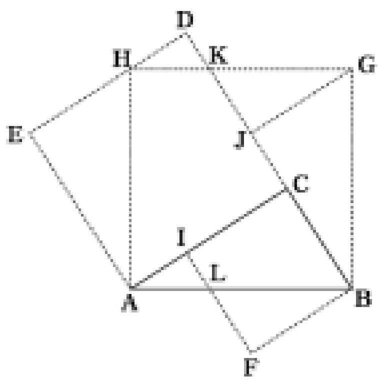
$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \square AIFC + \square JLEH$

=①+③+④+②+⑤

$= \square ADEB = \overline{AB}^2$

이다. 즉, $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이다.

(3) 증명Ⅲ

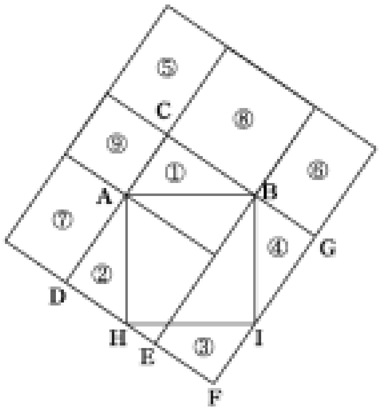


<그림14>

이 방법은 J.M.McCready 가 증명한 방법이다. 그림14에서 $\square HABG$ 는 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형이고 $\square EACD$ 는 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형이며 $\square IFBC$ 는 $\overline{CB}$를 한 변으로 하는 정사각형이다. 따라서 △DHK=△IAL , △KJG=△LFB , △JBG=△EAH이다. 그러므로 □HABG=□HACK+△JBG+△IAL+□ILBC+△KJG=□EACD +□IFBC 이다.

이것을 계산하면 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ 이다.

(4) 증명Ⅳ



<그림15>

이 방법은 Henry Boad 가 증명한 방법이다. 그림15 에서 ⑧,⑨는 정사각형이다.

△ABC≡HAD≡△IHF≡△BIG 이므로

①+②+③+④=⑥+⑦+⑧+⑥=□CDEB 이고

⑦+⑨=□BEFG 이다.

한편,

□AHIB

=□CDEB+□BEFG-{①+②+③+④}

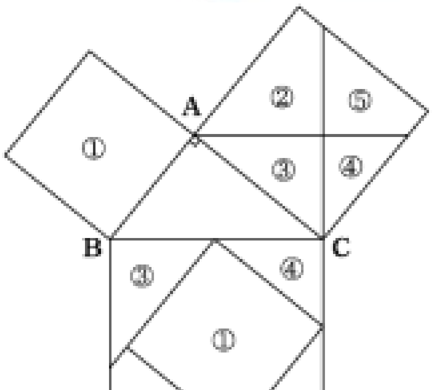
=⑧+⑥+⑦+⑨-{①+②+③+④}

=⑧+①+②+③+④+⑨-{①+②+③+④}

=⑧+⑨ 이므로

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ 이다.

(5) 증명Ⅴ

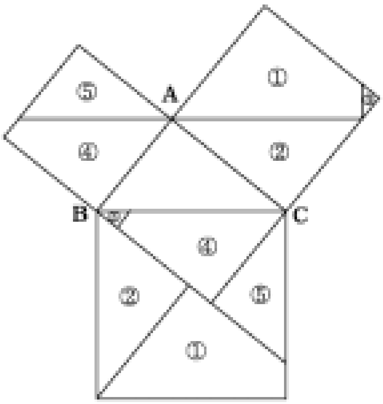


<그림16>

그림16 에서 직각삼각형 ABC 각 변의 길이를 한변으로 하는 정사각형을 작도한다. 변 $\overline{AC}$ 를 한변으로 하는 정사각형을 변 $\overline{BC}$ 에 평행한 직선과 수직인 직선을 그어 위 그림과 같이 자른 4조각과 $\overline{AB}$를 한변으로 하는 정사각형을 $\overline{BC}$를 한변으로 하는 정사각형에 맞추면 꼭 들어맞게 된다. 따라서

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이다.

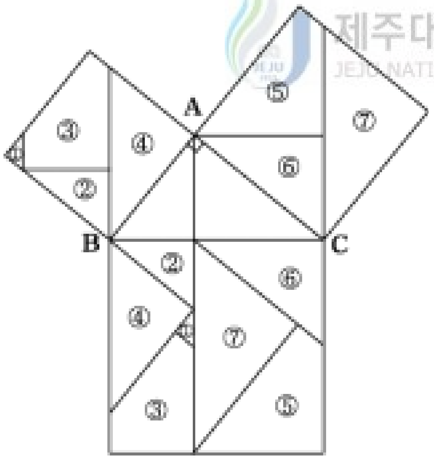
(6) 증명Ⅵ



<그림17>

캄파가 1902년에 발표한 증명 방법으로 직각 삼각형 ABC 의 각 변의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하고, 각 꼭지점 A, B, C를 지나고 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 평행선을 그으면 분활된 도형 ①, ②, ③, ④, ⑤의 넓이는 각각 같아져서 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합은 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같다. 따라서, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$이다.

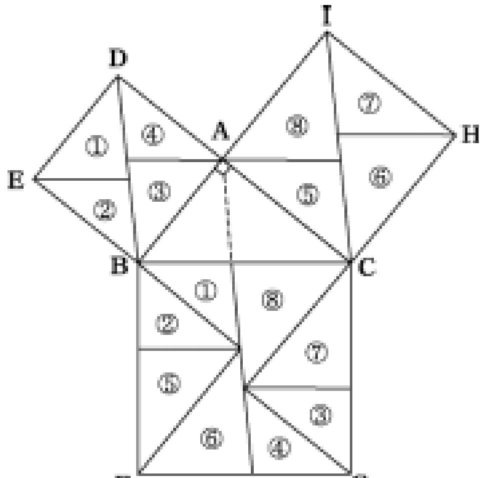
(7) 증명Ⅶ



<그림18>

그림18 에서 직각삼각형 ABC의 각변의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하고, $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$를 한 변으로 하는 정사각형을 $\overline{BC}$에 평행인 직선과 수직인 직선으로 그림과 같이 7조각으로 나누면 $\overline{BC}$를 한 변으로 하는 정사각형에 들어맞게 맞출 수 있다. 따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이다.

(8) 증명Ⅷ

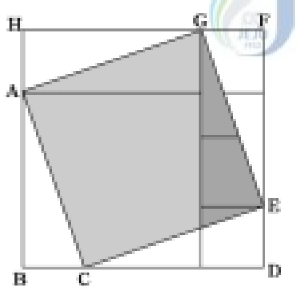


<그림19>

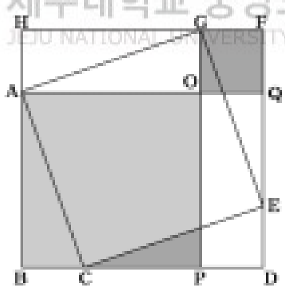
직각삼각형 ABC 의 각 변의 길이를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하고, 변 AB, 변 AC를 한변으로 하는 정사각형을 대각선 DE, 와 IC로 각각 나누고 꼭지점 E, A, 와 A, H에서 $\overline{BC}$에 평행한 선을 그어 각각 4조각으로 나눈 8조각으로 $\overline{BC}$를 한변으로 하는 정사각형에 꼭 들어맞게 맞출 수 있다.

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$이다.

(9) 증명Ⅸ



<그림20-1>

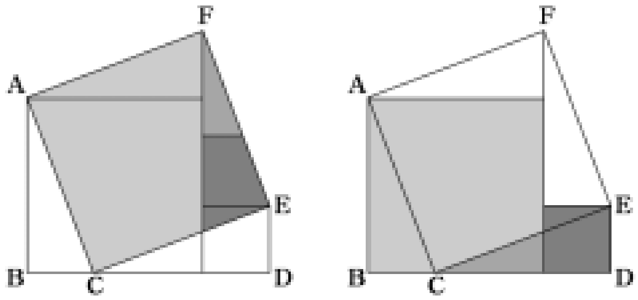


<그림20-2>

그림 20-1 에서 $\triangle ABC$, $\triangle CDE$, $\triangle EFG$, $\triangle GHA$는 모두 합동인 삼각형이다. 그림 20-1에서 $\square ACEG$ 는 $\overline{AC}$ 를 한변을 하는 정사각형이다. 그림 20-2에서 $\square ABPO$ 와 $\square GOQF$는 $\overline{AB}$, $\overline{GD}$ 를 한변으로 하는 정사각형이다. 그림 20-1의 $\square ACEG$을 분할하여 그림 20-2 에 맞추면 빈틈 없이 맞는다.

따라서 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이다.

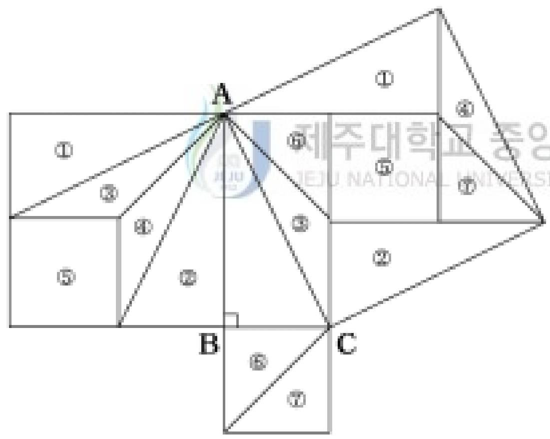
(10) 증명 X



<그림20-3>

$\overline{AC}$를 한변으로 하는 정사각형을 분할하여 변 $\overline{BC}(=\overline{ED})$, 변 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형에 꼭 맞출 수 있다. 따라서, 피타고라스 정리가 성립한다.

(11) 증명XI

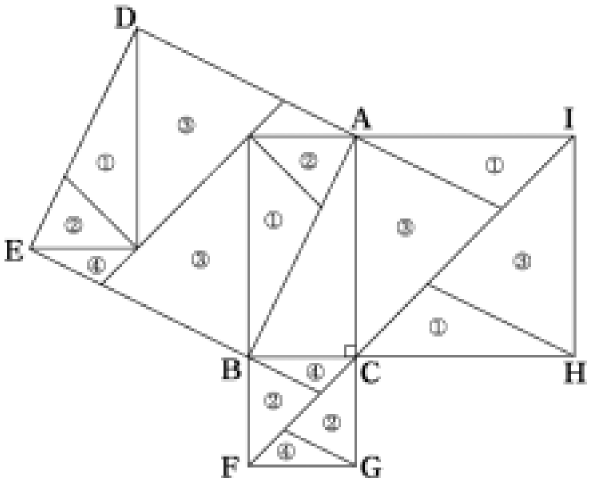


<그림21>

Liu Hui 의 방법으로 그림21에서 $\triangle ABC$에서 변 AB, 변 BC를 한변으로 하는 정사각형을 그림과 같이 분할하여 변 AC를 한변으로 하는 정사각형을 꼭 맞게 맞출 수 있다. 따라서

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이다.

(12) 증명Ⅻ



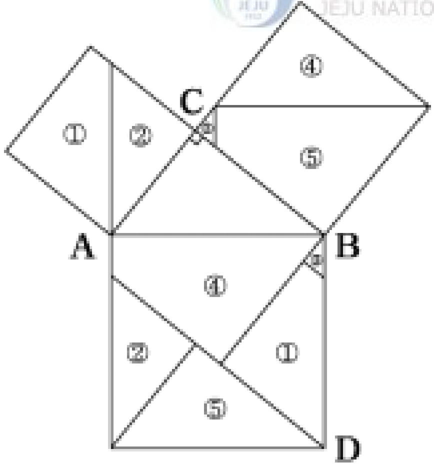
<그림22>

그림22 에서 △ABC는 ∠C 가 직각인 직각삼각형이고 □DEBA는 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형, □BFGC는 $\overline{BC}$ 를 한 변으로 하는 정사각형, □ACHI를 네 쌍의 합동인 도형으로 나누면 □DEBA를 빈틈없이 그림과 같이 채울 수 있다.

따라서

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ 가 성립한다.

(13) 증명XⅢ

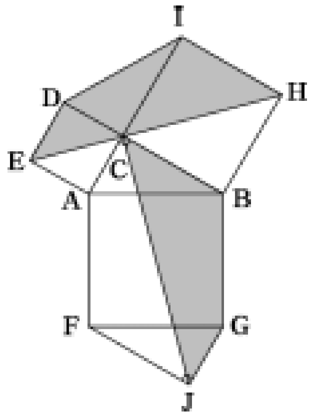


<그림23>

기원전 900년경 아나리지(Annairizi)가 증명한 방법으로 그림23에서 △ABC는 ∠C 가 직각인 직각삼각형이다. 각각의 변을 한 변으로 하는 정사각형을 작도하고, 점 B를 지나고 $\overline{AC}$에 평행선을, 점 D를 지나고 $\overline{BC}$에 평행선을 그으면①, ②, ③, ④, ⑤의 넓이가 각각 같아서

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$이다.

(14) 증명ⅩⅣ



〈그림24〉

레오나르도 다 빈치(Leonardo da Vinci, 1452-1519)는 이탈리아의 화가, 조각가, 건축가, 시인 음악가로 르네상스의 만능인 이였다. 어릴 때부터 수학, 음악, 회화 외에도 모든 학문에 있어 다재다능을 보였다. 예술의 제분야 뿐만 아니라, 학문 기술 등의 넓은 범위에 비류(比類) 없을 만한 연구심의 투철함을 보이는 등, 그의 관심은 자연 인간의 모든 면에 걸쳐 있었다. 그림24에서 $\square DEAC$, $\square AFGB$, $\square CBHI$는 한 변의 길이가 각각 AC, AB, BC인 정사각형이고, $\overline{AC} /\!/ \overline{JG}$, $\overline{BC} /\!/ \overline{FJ}$ 되게 하면

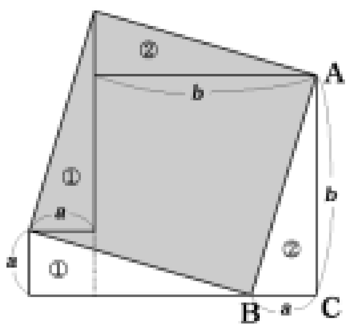
$\triangle ABC \equiv \triangle DIC \equiv \triangle GFJ$ 이고 $\square IDEH \equiv \square BAEH \equiv \square FACJ \equiv \square BGJC$ 이다.

따라서 육각형$ABHIDE$의 면적 = 육각형$AFJGBC$의 면적 이다.

그러므로 육각형$ABHIDE - 2\triangle ABC =$ 육각형$AFJGBC - 2\triangle ABC$ 이다. 즉,

$\square ACDE + \square CBHI = \square AFGB$ 이므로 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 임이 성립한다.

(15) 증명ⅩⅤ

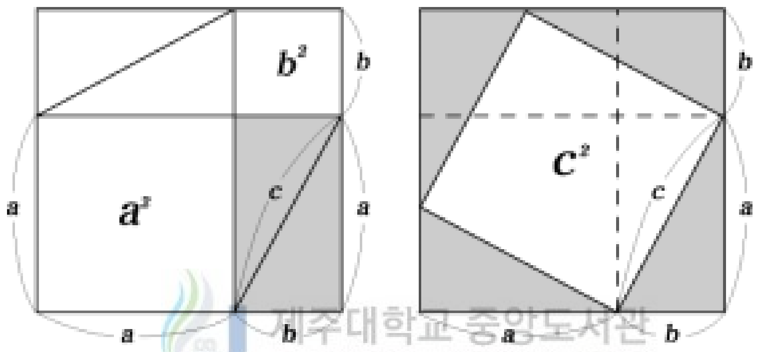


〈그림25〉

다케베(1664~1739)는 <不休綴 >을 저술하여 원주율 값을 소수점 아래 41자리까지 셈한 일본의 수학자이다. 매문정(梅文鼎 1633~1721)은 중국 청조의 수학자로, 자는 정구(定九), 호는 물암(勿庵)이다. 어릴 때부터 천문 산수(算數)에 흥미를 가지고, 고학(古學)의 부흥에 노력, 인도 및 회회(回回)의 역법(曆法), 또 서양(西洋)의 신법(新法)을 연구했다. 학(學)으로 종생(終生)하고 청대역산의 제일인자로 불린다. 그림25에서 $\triangle ABC$는 각 C가 직각인 직각삼각형이

고 그 세변을 각각 a, b, c로 한다. 다음에 그 빗변 AB위에 정사각형을 그리고, 그것을 그림과 같이 구분하여 ①의 부분을 아래의 ①, ②의 부분을 아래②의 위치로 옮겨 놓았다고 생각하면 빗변의 위쪽 정사각형은 분명히 a를 한 변으로 하는 정사각형과, b를 한 변으로 하는 정사각형을 합친 그림으로 옮겨진다. 이것으로 $c^2=a^2+b^2$ 이 되어 피타고라스의 정리가 증명된다.
이 방법은 이미 코라(Tabit ibn Qurra, 826~901)가 알고 있었다.

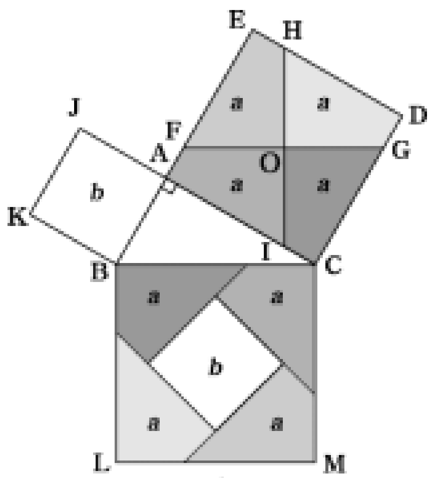
(16) 증명 XVI



<그림26>

한겔(H. Hankel, 1839~1837)이 증명한 방법이다. 직각을 낀 두 변의 길이가 a, b 이고 빗변이 c인 직각삼각형이 있다. 여기서 한 변의 길이가 a+b인 정사각형을 그리고, 그림의 왼편과 같이 금을 긋는다. 이 정사각형에는 원래의 직각삼각형 4개와 a를 한 변으로 하는 정사각형 한 개, b를 한 변으로 하는 정사각형 한 개가 있다. 그 다음에 한 변의 길이가 역시 a+b인 정사각형을 그리고 그림의 오른편과 같이 금을 긋는다. 이 정사각형 속에는 원래의 직각삼각형 4개와 한 변이 c인 정사각형이 있다. 위 두 정사각형은 합동이므로 네 개의 직각삼각형을 꺼낸 결과는
$a^2+b^2=c^2$ 이다.

(17) 증명 X Ⅶ

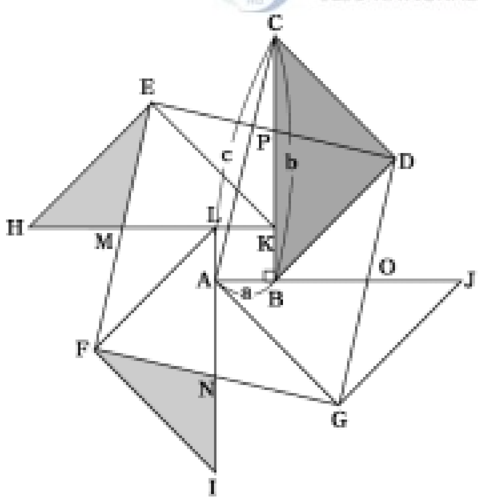


<그림27>

1830년경 영국인 아마추어 수학가인 헨리 페리갈에 의해 발견되어 1837년에 그에 의해 처음 발표되었다. 이것은 도형을 분할함으로써 피타고라스의 정리를 논증할 수 있는 여러 가지 방법 중에서 가장 훌륭한 방법의 하나이다. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} < \overline{AC}$ 일 때, 정사각형 $ACDE$의 대각선의 중점을 지나고 $\overline{BC}$에 평행하게 $\overline{FG}$를 긋고, $\overline{BC}$에 수직이 되게 $\overline{HI}$을 그어 같은 모양의 4조각으로 정사각형을 나눈 다음 이 네 조각과 정사각형 $KBAJ$를 정사각형 $BLMC$에 포개 놓으면 빈틈없이 들어맞게 된다.

따라서, (정사각형$BLMC$)넓이$=4a+b$이다. 즉, $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$이다.

(18) 증명 X Ⅷ



<그림28>

그림28은 The Mathematical Association of America에서 발행하는 Mathematics Magazine 1999년 12호에 실려 있으며 표지 그림으로까지 쓰였다. $\triangle ABC$의 한변 $\overline{BC}$(=b)를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $\triangle BDC$는 $\triangle KEH$, $\triangle LFI$, $\triangle AGJ$와 합동이다. 이때, $\square LABK$ ($\overline{AB}=a$)는 정사각형이 되도록 4개의 직각 이등변 삼각을 배치한다. 그러면 점 E, F, G, D 는 정사각형 $EFGD$를 이루고 $\overline{EF}=\overline{AC}=c$ 이다. 이들 이등변 삼각형의 빗변은 정사각형의 변

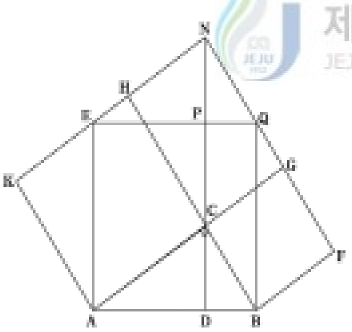
을 이등분한다.(한 예로 $\triangle BDC$의 빗변은 $\overline{ED}$를 이등분 한다.) 따라서 4쌍의 삼각형 (빗금 친 한 쌍 $\triangle EHM \equiv \triangle FLM$)은 합동이 된다. 따라서

$$\begin{aligned} c^2 &= \square EFGD = \triangle PBD + \triangle EKP + \triangle EMK + \triangle MFL + \triangle LFN \\ &\quad + \triangle ANG + \triangle AGO + \triangle BOP + \square LABK \\ &= (\triangle PBD + \triangle DCP) + (\triangle EMK + \triangle MEH) \\ &\quad + (\triangle LFN + \triangle \infty) + (\triangle AGO + \triangle JOG) + \square LABK \\ &= 4\triangle BDC + \square LABK = 4 \cdot \frac{b^2}{4} + a^2 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $c^2 = b^2 + a^2$ 이다.

2)면적을 이용한 방법

(1) 증명 I

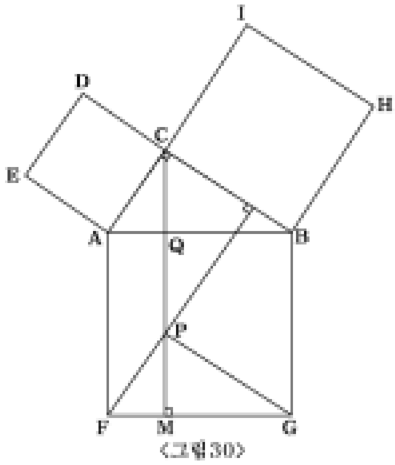


<그림29>

그림29에서 $\square KACH, \square CBFG$는 정사각형 $\overline{EA} \perp \overline{AB}$, $\overline{QB} \perp \overline{AB}$, $\overline{KH}$ 와 $\overline{FG}$ 의 연장선의 교점을 N이라 하고 $\overline{NC}$ 를 연결하면 $\triangle ABC \equiv \triangle CNH$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{CN}$ 이다. $\overline{CN}$의 연장선과 $\overline{AB}$ 의 교점을 D라 하면 $\angle HCN + \angle ACD = 90°$이므 $\angle CAD + \angle ACD = 90°$ 이다. 그러므로 $\angle CDA = 90°$이다. $\square EACN, \square NCBQ$ 는 평행사변형이다. 또한 $\overline{CN} = \overline{AE} = \overline{AB}$, $\overline{CN} = \overline{BQ} = \overline{AB}$ 이므로 $\square ABQE$는 정사각형이다. 여기서 , 정사각형 $ACHK$의 넓이 = 평행사변형 $ACNE$ 의 넓이 = 직사각형 $ADPE$의 넓이 정사각형 $BFGC$의 넓이 =평행사변형 $BQNC$의 넓이 =직사각형 $PDBQ$의 넓이 이다. 그러므로 정사각형 $ACHK$의 넓이+정사각형 $BFGC$의 넓이=정사각형

$ABQE$ 의 넓이이다. 따라서 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이다.

(2) 증명Ⅱ

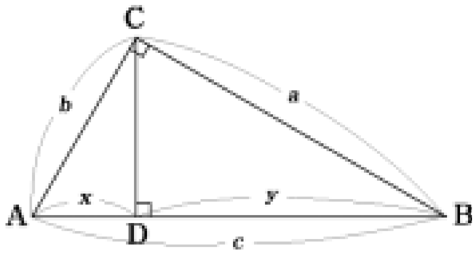


<그림30>

그림30 에서 점 C, F에서 $\overline{FG}(\overline{AB})$, $\overline{BC}$ 에 각각 수선 $\overline{CM}, \overline{FN}$ 을 내려서 그 교점을 P라고 하면 $\overline{FN} \perp \overline{PG}$ 이다. 따라서 $\triangle ABC \equiv \triangle CPN \equiv FGP$ 이고 $\square CAFP = \overline{AC} \cdot \overline{CN} = \overline{AC}^2$이다.
같은 방법으로
$\square CPGB = \overline{BC} \cdot \overline{PN} = \overline{BC}^2$가 성립한다. 더구나 $\square CAFP = \square AFMQ$, $\square CPGB = \square QMGB$ 이기 때문에 $\square CAFP + \square CPGB = \square AFMQ + \square QMGB = \square AFGB$ 이다. 즉, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$이다.

3)닮음을 이용한 방법

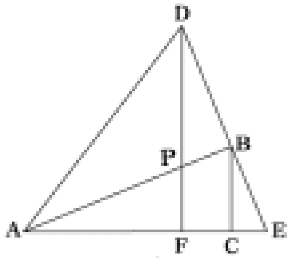
(1) 증명Ⅰ



<그림31>

바스카라는 빗변에 수선을 그려서 피타고라스 정리에 대한 둘째 증명을 했다. 이 증명은 17세기에 영국의 수학자 월리스(John Wallis, 1616~1703)에 의해서 재발견되었다. $\triangle ADC \backsim \triangle ABC$ 이다. 따라서 $b : x = c : b$ 이므로 $b^2 = cx$ 이다. 마찬가지 방법으로 $\triangle CDB \backsim \triangle ABC$ 이므로 $a^2 = cy$이다. 그러므로 $a^2 + b^2 = c(x+y) = c^2$이다.

(2) 증명Ⅱ



〈그림32〉

이 방법은 Math Spectrum(1997/98)에 실려있는 Michelle Watkins의 방법이다.그림32에서 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$는 합동인 직각삼각형이고 B는 $\overline{DE}$위에 있고, A, F, C, E는 일직선상에 있다. 한편, $\overline{BC}=\overline{EF}=a$, $\overline{AC}=\overline{DF}=b$, $\overline{AB}=\overline{DE}=c$라 둔다. $\triangle DPB$는직각삼각형이므로$\overline{AB}\perp\overline{DE}$이다. 따라서 $\triangle ADE$의 넓이를 다음 두 가지 방법으로 구할 수 있다.

$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{DE}=\frac{c^2}{2} \qquad (2.1)$$

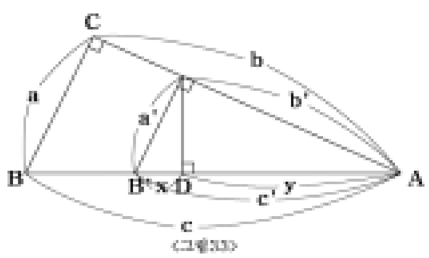
$$\triangle ADE=\frac{1}{2}\cdot\overline{DF}\cdot\overline{AE}=b\cdot\frac{\overline{AE}}{2} \qquad (2.2)$$

한편 $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=b+\overline{CE}$이고, $\triangle DFE \backsim \triangle BCE$에서 $\overline{DF}:\overline{BC}=\overline{FE}:\overline{CE}$ 이므로 $\overline{CE}=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{FE}}{\overline{DF}}=\dfrac{a\cdot a}{b}=\dfrac{a^2}{b}$ 이다. 따라서 $\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=b+\dfrac{a^2}{b}$ 이다. 그러므로 식(2.2)는

$$\triangle ADE=b\cdot\frac{\overline{AE}}{2}=b\left(b+\frac{a^2}{b}\right)\cdot\frac{1}{2} \qquad (2.3)$$

이다. (2.1),(2.3)에 의해서 $\dfrac{c^2}{2}=b\left(b+\dfrac{a^2}{b}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서 $c^2=b^2+a^2$ 이다.

(3) 증명Ⅲ



〈그림33〉

그림33 에서 $\triangle ABC \backsim \triangle C'B'D$ 이므로 $a : c = x : a'$이다. 따라서,

$$aa'=cx \qquad (2.4)$$

이다. 또한 $\triangle ABC \backsim \triangle AC'D$ 이므로 $b : c = x : b'$ 이다. 따라서,

$$bb'=cy \tag{2.5}$$

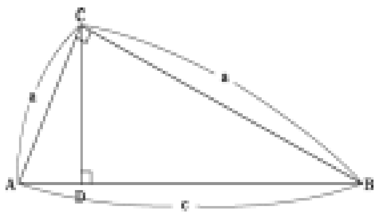
이다. 식 (2.4)+(2.5) 를 하면 $aa'+bb'=cx'+cy=c(x+y)=cc'$ 이므로

$$aa'+bb'=cc' \tag{2.6}$$

그런데 위 그림33에서 $\triangle ABC$와 $\triangle AB'C'$에서 $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$ 이므로

$a : a' = b : b' = c : c'$이다. $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k$ $(k>0)$라 하면 $a'=ak$, $b'=bk$, $c'=ck$ 이므로 식 (2.6)에서 $a^2k+b^2k=c^2k$ 이다. 따라서 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

(4) 증명Ⅳ



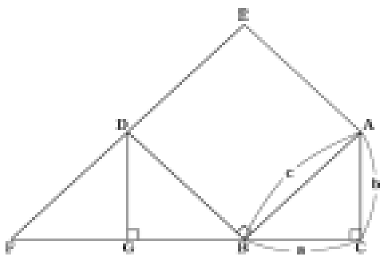
<그림34>

그림34에서 $\triangle CDB \backsim \triangle ADC \backsim \triangle ACB$ 이므로

$$\frac{\triangle CDB}{a^2}=\frac{\triangle ADC}{b^2}=\frac{\triangle ACB}{c^2}=k(k>0)$$

라면 $\triangle CDB=a^2k$, $\triangle ADC=b^2k$, $\triangle ACB=c^2k$ 이다. 그리고 $\triangle CDB+\triangle ADC=\triangle ACB$ 이므로 $a^2k+b^2k=c^2k$ 이다. 즉, $a^2+b^2=c^2$ 이다.

(5) 증명Ⅴ



<그림35>

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$를 한 변으로 하는 정사각형 $EDBA$를 그리고 $\overline{DE}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 연장선이 만나는 점을 F라 하면 $\triangle ABC$와 $\triangle BDG$에서 $\triangle ABC \equiv \triangle BDG$ $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라면 $\triangle ABC \equiv \triangle BDG$ 이므로

$$\overline{BG}=b \tag{2.7}$$

이다. 그리고 $\triangle ABC \backsim \triangle DGF$에서 $a : \overline{FG} = b : a$ 이므로

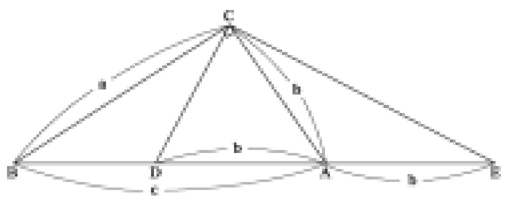
$$\overline{FG} = \frac{a^2}{b} \tag{2.8}$$

이다. 또한 $\triangle ABC \backsim \triangle BDF$에서 $c : \overline{BF} = b : c$ 이므로

$$\overline{BF} = \frac{c^2}{b} \tag{2.9}$$

이다. 따라서 $\overline{BF} = \overline{FG} + \overline{BG}$ 이므로 (2.7), (2.8), (2.9)에의해 $\frac{c^2}{b} = \frac{a^2}{b} + b$ 이므로 $c^2 = a^2 + b^2$이다. 따라서 $a^2 + b^2 = c^2$ 이다.

(6) 증명Ⅵ



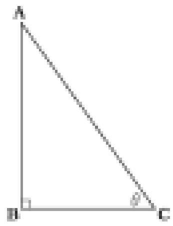
(그림36)

이 증명방법은 J.Barry Sutton 가 증명한 방법이다. 그림 36과 같이 $\angle 90°$인 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ 라 하자. 이제 $\overline{AC} = \overline{AD}$ 가 되도록 점 D를 $\overline{BA}$의 연장선상에 $\overline{AC} = \overline{AE}$ 가 되도록 E를 잡는다. 그러면 꼭지점 D, E, C 는 중심이 A이고 반지름의 길이가 b인 원주 상에 위치한다. 따라서 $\angle DCE = 90°$이고 $\angle BCD = \angle ACE$이다. 한편 $\triangle ACE$는 이등변 삼각형이므로 $\angle CEA = \angle ECA$이므로 $\triangle DBC$와 $\triangle CBE$에서 $\angle DBC$는 공통이고 $\angle BCD = \angle CBE$ 이므로 $\triangle DBC \backsim \triangle CBE$ 이다. 따라서 $\overline{BC} : \overline{BE} = \overline{BD} : \overline{BC}$ 이다. 즉, $a : (c+b) = (c-a) : a$ 이다. 따라서 $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 이다.

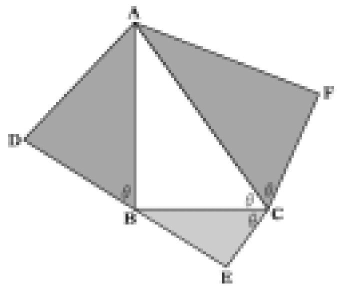
(7) 증명Ⅶ

그림 37의 $\triangle ABC$는 $\angle B = 90°$인 직각삼각형이다. 그림 38와 같이 $\triangle ABC \backsim \triangle ADB \backsim \triangle BEC \backsim \triangle AFE$이 되도록 $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle AFC$를 작도한다. 그리고 그림 38 과 같이 나머지 두 삼각형 $\triangle ADB, \triangle BEC$도 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$를 접는 선으로 하여 접는다. 그렇게 하면 $\triangle AFC$와 $\triangle ADB$, 는 정확하게 일치한다.

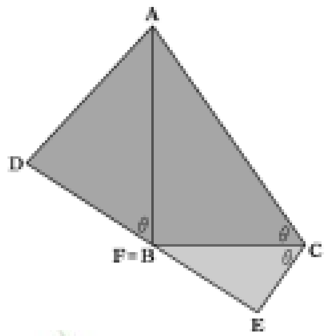
한편 , $\triangle ADB \backsim \triangle BEC \backsim \triangle AFE$ 이고 닮은비 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$ 이므로 넓이 비는



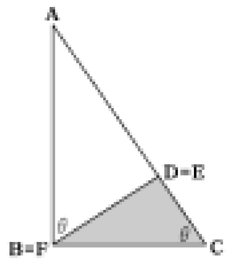
<그림37>



<그림38>



<그림39-1>

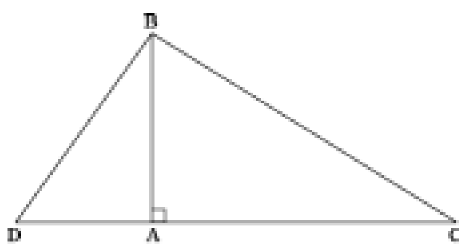


<그림39-2>

$\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$: $\overline{AC}^2$

이다. 따라서 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이다.

(8) 증명Ⅷ



<그림40>

$\angle BAC$가 직각인 삼각형 ABC에 변 AB를 공유하며 직각삼각형 ABC와 닮음인 직각삼각형 ADB를 만들면 $\triangle BDC$는 다른 두 $\triangle ABC$와 $\triangle ADB$는 닮음이다. 따라서 다음이 성립한다.

$\triangle$ADB∽$\triangle$ABC 이므로

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC} \quad , \quad \overline{AD} = \frac{\overline{AB}^2}{AC} \tag{2.10}$$

이다. 또, $\overline{DB}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{AC}$ 이므로

$$\overline{DB}:\overline{AC}=\overline{AB}:\overline{BC},\ \ \overline{DB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}} \tag{2.11}$$

이다. 한편, △ADB의면적＋△ABC의면적＝△BDC의 면적에서 다음이 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BC}$$

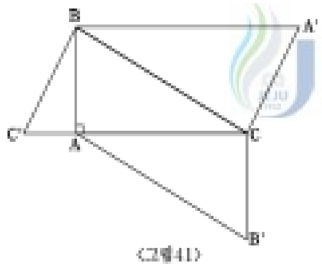
즉,

$$\overline{AD}\cdot\overline{AB}+\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{BD}\cdot\overline{BC} \tag{2.12}$$

이다. (2.10),(2.11),(2.12) 에 의해서 $\frac{\overline{AB}^2}{AC}\cdot\overline{AB}+\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{AC}\cdot\overline{BC}$

이다. 양변을 $\frac{\overline{AB}}{AC}$ 으로 나누면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이다.

(9) 증명Ⅸ



<그림41>

△ABC', △BCA', △ACB' 은 △ABC 와 닮음이 되도록 작도한다. 그러면 △ABC≡△ACB', △BCC'≡△BCA' 이다. 따라서 ,다음이 성립한다.

△ABC'의면적＋△ACB'의면적＝△BCA'의 면적(2.13)

이다. 한편, △AC′B∽△ABC에서

$\overline{AC'}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$ 이므로

$$\overline{AC'}=\frac{\overline{AB}^2}{AC} \tag{2.14}$$

그리고 △BAC∽△$A'CB$에서 $\overline{AC'}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$ 이므로

$$\overline{AC'}=\frac{\overline{AB}^2}{AC} \tag{2.15}$$

이다. 따라서, (2.13) 은 $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC'}\cdot\overline{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overline{CB'}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CA'}$ 이다 .즉,

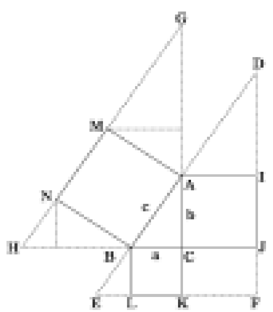
$$\overline{AC'}\cdot\overline{AB}+\overline{CB'}\cdot\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\overline{CA'}\quad(\because\overline{CB'}=\overline{AB}) \tag{2.16}$$

이다. 그러므로 (2.14), (2.15), (2.16) 에 의해서

$$\frac{\overline{AB}^2}{AC}\cdot\overline{AB}+\overline{CB'}\cdot\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AB}}{AC}$$

이다. 양변을 $\frac{\overline{AB}}{AC}$ 으로 나누면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이다.

(10) 증명 X



〈그림42〉

그림42에서 $\square NBAM, \square BLKC, \square ACJI$ 는 정사각형이고 $\triangle ABC \backsim \triangle DAI \backsim \triangle BEL \backsim \triangle GAM \backsim \triangle BHN$ 임을 알수 있다. $\triangle ABC \backsim \triangle DAI$에서 $\overline{DI}$의 길이를 x_1이라하면 $a : b = b : x_1$ 이므로 $x_1 = \frac{b^2}{a}$ 이다. $\overline{AD}$의 길이를 y_1이라하면 $a : c = b : y_1$이므로 $y_1 = \frac{bc}{a}$ 이다. $\triangle ABC \backsim \triangle BEL$에서 $\overline{EL}$ 의 길이를 x_2이라하면 $b : a = a : x_2$ 이므로 $x_2 = \frac{a^2}{b}$ 이다. $\overline{BE}$의 길이를 y_2이라하면 $b : c = a : y_2$ 이므로 $y_2 = \frac{ca}{b}$ 이다. $\triangle ABC \backsim \triangle GAM$에서 $\overline{GA}$의 길이를 x_3이라하면 $a : c = c : x_3$이므로 $x_3 = \frac{c^2}{a}$ 이다. $\overline{GM}$의 길이를 y_3이라하면 $a : b = c : y_3$ 이므로 $y_3 = \frac{bc}{a}$ 이다. $\triangle ABC \backsim \triangle BHN$ $\overline{BH}$의 길이를 x_4이라하면 $b : c = c : x_4$ 이므로 $x_4 = \frac{c^2}{b}$ 이다. $\overline{NH}$의 길이를 y_4이라하면 $a : b = y_4 : c$ 이므로 $y_4 = \frac{ac}{b}$ 이다. 위에서 구한 x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 를 이용해서 $a^2+b^2=c^2$ 의 정리를 증명해 보면 그림 42에서 보듯이 $\overline{HC}=\overline{EF}$ 이거나 $\overline{GC}=\overline{DF}$ 이다.또, $\overline{HC}=\overline{EF}$일 때 $x_4+a=x_2+a+b$ 이고 $\overline{GC}=\overline{DF}$ 일 때 $x_3+b=x_1+a+b$ 이므로 $c^2=a^2+b^2$ 이다.

Ⅲ. 피타고라스 정리의 일반화 및 활용

1.피타고라스 정리의 일반화

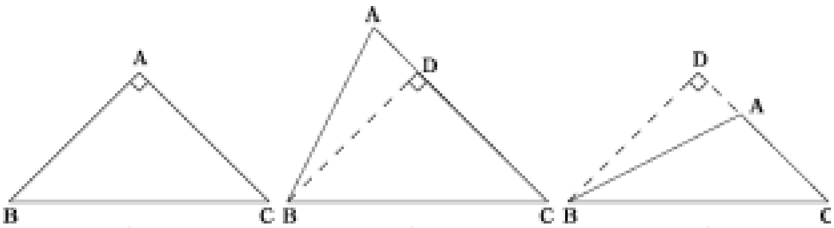
피타고라스 정리는 직각삼각형이라는 특수한 삼각형에서 성립하는 정리이다. 이에 대해 조건을 일반적인 삼각형으로 확장할 경우 성립하는 정리에 대해 알아보고 피타고라스 정리와 어떠한 관련이 있는지 파악하는 것은 수업 현장에서 학생들의 수학적 사고력을 신장시키는 방안으로 효과적일 것이다. 이러한 의도하에 이번 장에서는 피타고라스 정리를 일반화한 정리에 대해 살펴보고 이 정리들이 어떻게 피타고라스 정리로 환원될 수 있는지 그 관련성을 살펴보고자 한다.

1)평면에서의 일반화

(1) 코사인법칙

정리1. 삼각형의 둔각(예각)의 대변 길이의 제곱은 다른 두 변 길이의 제곱의 합에 이 두변 중 하나와 다른 하나를 그 변에 사영시킨 선분의 곱의 두 배를 더한(뺀) 결과와 같다

(증명)



<그림43> <그림44> <그림45>

점B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.

ⅰ)∠A <90°일 때 (그림 44)

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2) + (\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)$$

$$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

ii)∠A >90°일 때 (그림 45)

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2) + (\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2)$$

$$= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AD}$$

△ABC에서 점 B로부터 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D라 할 때,

A=90°이면

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

이고, A<90°이면

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos A$$

이며, A>90°이면

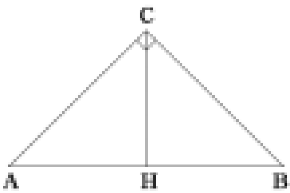
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos A$$

이다. 삼각함수를 이용해서 위의 식을 하나의 식으로 나타낸 것이 코사인 제2법칙이다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

따라서 코사인 법칙은 피타고라스 정리의 확장이라고 할 수 있다.

(2) 바스카라의 일반화



〈그림46〉

인도의 수학자 바스카라는 피타고라스 정리의 증명 방법으로 다음과 같은 방법을 제시한 바 있다. 그 방법은 직각삼각형의 빗변에 수선을 그어 닮은 삼각형들로부터 얻어내는 방법으로 다음과 같다.

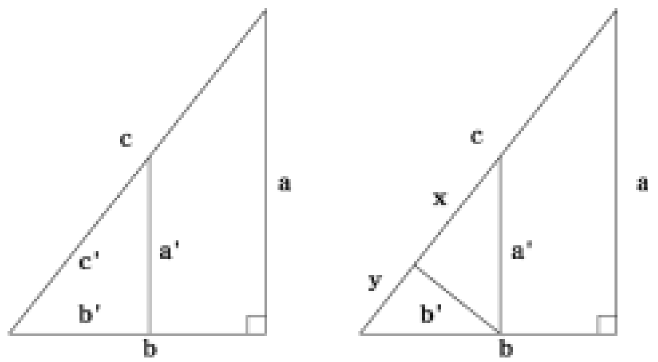
$\overline{AC}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{AB}$ 이고 $\overline{BC}^2 = \overline{BH}\cdot\overline{AB}$ 이므로

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{AB} + \overline{HB}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}(\overline{AH} + \overline{HB}) = \overline{AB}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}^2$$

이다. 따라서 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이 성립한다.

정리2. 그림 47에서 $cc' = aa' + bb'$ 이다.

(증명)



<그림47>

$\frac{y}{b} = \frac{b'}{c}$, $\frac{x}{a} = \frac{a'}{c}$ 이므로 $cc' = c(x+y) = cx + cy = aa' + bb'$이다.

(3). 파푸스의 중선정리

정리3. 삼각형의 두 변의 길이의 제곱의 합은 다른 나머지 한 변의 길이의 반의제곱과 두 변이 만나는 점에서 나머지 한 변에 그은 중선의 길이의 제곱의 두 배를 합한 것과 같다.즉, $\triangle ABC$의 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

이다.

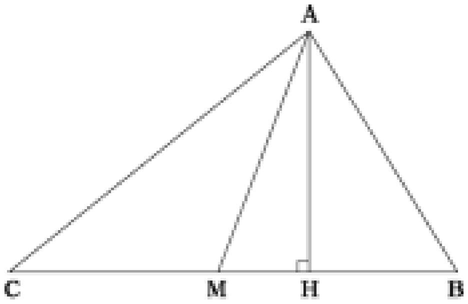
(증명)

그림48 에서처럼 A에서 각 A의 대변에 수선을 그어 만남 점을 H라고 하고 중점을 M이라 하자.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{AH}^2 + (\overline{BM} - \overline{HM})^2 \qquad (3.1)$$

$\overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AB}^2 + (\overline{CM} + \overline{HM})^2 \qquad (3.2)$$



<그림48>

(3.1)+(3.2)를 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AH}^2+\overline{BM}^2-2\overline{BM}\cdot\overline{HM}+\overline{HM}^2+\overline{CM}^2+2\overline{CM}\cdot\overline{HM}+\overline{HM}^2$$

$$=2(\overline{AH}^2+\overline{HM}^2)+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

여기서 ∠A=90°이면 $\overline{AM}=\overline{BM}$ 이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(\overline{BM}^2+\overline{BM}^2)=4\overline{BM}^2=2\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2=\overline{BC}^2$$

이다. 따라서, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이다.

이와 같이 직각 삼각형에서는 이 정리가 바로 피타고라스 정리가 됨을 알 수 있으며 그러므로 파푸스의 중선정리는 피타고라스 정리의 일반화라고 볼 수 있다.

(4) 스튜어트의 정리

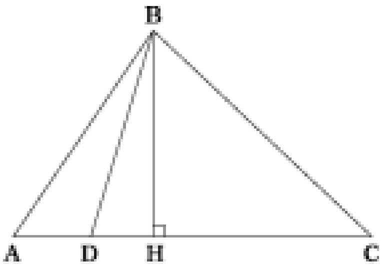
다음의 정리는 1746년에 스튜어트(M. Stewart, 1717 ~ 1785)가 증명 없이 설명한 것으로 후에 오일러(1780년)와 카르노(1803년)에 의해 증명된 것이다.

정리4. 그림49 에서 D는 $\triangle ABC$의 두 꼭지점 A와 C사이의 점이다. 이때

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{DC}+\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}-\overline{BD}^2\cdot\overline{AC}=\overline{AC}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{AD}$$

이 성립한다.

(증명) 수선 BH의 발 H가 D와 C사이에 놓인다고 가정하자.



〈그림49〉

$\triangle BCD$에 대해 코사인 법칙을 적용하면

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}\cdot\overline{DH} \qquad (3.3)$$

이다. 그리고, △ABD에 대해 코사인 법칙을 적용하면

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AD}\cdot\overline{DH} \qquad (3.4)$$

를 얻는다. (3.3) 에 $\overline{AD}$를 곱한 것과 (3.4) 에 $\overline{DC}$를 곱한 것을 더하면

$$\begin{aligned}&\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AB}^2\cdot\overline{DC}\\ &=\overline{BD}^2(\overline{AD}+\overline{DC})+\overline{DC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AD}^2\cdot\overline{DC}\\ &=\overline{BD}^2\cdot\overline{AC}+\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{AC}\end{aligned}$$

이므로

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{DC}+\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}-\overline{BD}^2\cdot\overline{AC}=\overline{AC}\cdot\overline{DC}\cdot\overline{AD} \qquad (3.5)$$

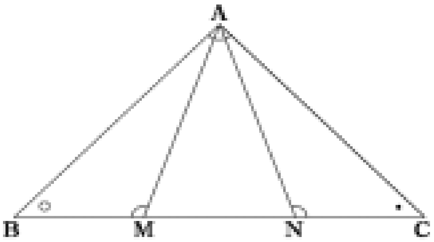
위의 증명에서 만일 $\triangle ABC$가 각 B가 직각인 직각삼각형이고 D가 A와 C사이의 중점이면 $a=|\overline{BC}|$, $b=|\overline{AC}|$, $c=|\overline{AB}|$ 이고, D는 $\triangle ABC$의 외심이므로 $|\overline{AD}|=|\overline{BD}|=|\overline{CD}|=\frac{2}{c}$ 이다.(3.5)에 의해, $a^2\cdot\frac{c}{2}+b^2\cdot\frac{c}{2}-(\frac{c}{2})^2\cdot c=c\cdot(\frac{c}{2})^2$ 이므로 이것을 정리하면, $a^2+b^2=c^2$ 이 성립하여 피타고라스 정리로 환원된다.

(5) 코라의 정리(Tabit ibn Qorra, 826-901)

정리5. 임의의 $\triangle ABC$에서 M, N이 $\overline{BC}$ 위의 점으로 $\angle AMB=\angle ANC=\angle A$ 라고 하자. 그러면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}(\overline{BM}+\overline{CN})$ 이 성립한다.

(증명)

$\triangle ABC \backsim \triangle MBA$이고, $\triangle ABC \backsim \triangle NAC$이므로



<그림50>

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AC}} \qquad (3.6)$$

이다. (3.6)를 정리하면

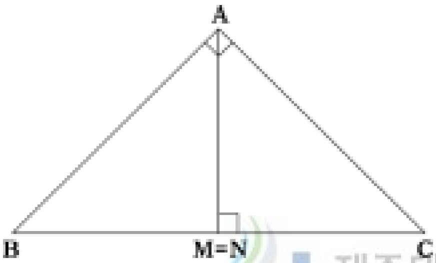
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BM}, \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CN}$$

이다. 따라서,

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BM} + \overline{CN} = \overline{BC}(\overline{BM} + \overline{CN})$ 이다.

만약 $M = N$인 경우에 대해서는 다음과 같다.

$\triangle ABC \backsim \triangle MBA$ 이고, $\triangle ABC \backsim \triangle NAC$ 이므로, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BM} + \overline{CN})$



<그림51>

이 성립한다. 여기서, $\overline{BM} + \overline{CN} = \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}^2$$

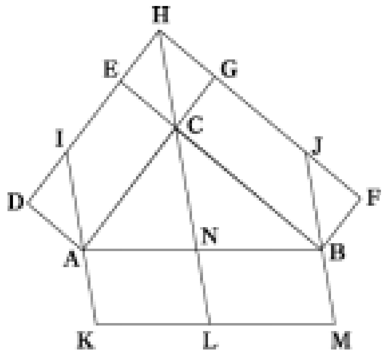
이다. 즉, $\angle A = \angle M = \angle N = 90°$일 경우에는 피타고라스의 정리가 환원된다.

(6) 파푸스의 정리

파푸스의 정리는 그의 저서 수학 집성(Mathematical collection) 제 Ⅳ권의 시작 부분에 제시하고 있는 정리로서 피타고라스의 정리에서 직각삼각형을 임의의 삼각형으로 직각삼각형의 변에 접한 정사각형들은 임의의 평행사변형으로 대체함으로써 일반화시켰다.

정리6. $\triangle ABC$는 임의의 삼각형이고 $\square CADE$와 $\square CBFG$를 $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$위에 외접하는 임의의 평행사변형이라고 하고 $\overline{DE}$와 $\overline{FG}$가 H에서 만날 때 $\overline{AK}$과 $\overline{BM}$은 $\overline{HC}$와 길이가 같고 평행하도록 그린다. 그러면 $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$위에 외접하는 임의의 평행사변형의 넓이의 합이 $\overline{AB}$에 외접하는 평행사변형의 넓이와 같게 된다.

(증명)그림52에서 $\square CADE=\square CAIH=\square AKLN$이 $\square CBFG=\square CBJH=\square NLMB$ 이므로 $\square CADE+\square CBFG=\square AKLN+\square NLMB=\square AKMB$ 이다. 즉, $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$와 외접하는 임의의 평행사변형의 넓이의 합이 $\overline{AB}$에 외접하는 평행사변형의 넓이와 같게 된다. 이것은 각 C가 90°일 때, $\overline{HC}$의 길이가 변 c가 되어 $\overline{CA}$와 $\overline{CB}$와 외접하는 정사각형의 넓이의 합이 $\overline{AB}$에 외접하는 정사각형의 넓이와 같게 된다.



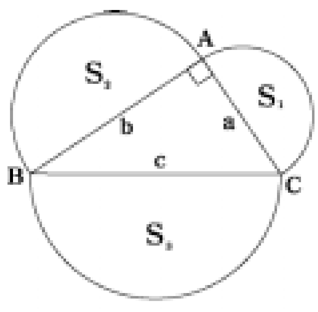
〈그림52〉

(7) 유클리드의 정리

다음 정리는 유클리드 원론 제Ⅳ권 정리 31에 나온 정리로서 직각삼각형에 접한 정사각형 대신 닮은 도형으로 피타고라스 정리를 일반화하였다. 닮은 도형의 넓이의 비는 닮음비의 제곱과 같으므로 다음 정리를 얻는다.

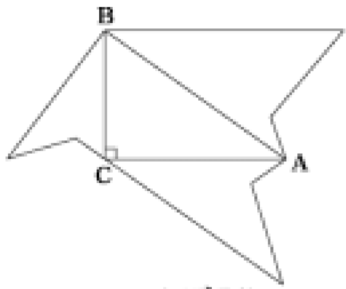
정리7. 직각삼각형의 각 변에 닮은 세 도형을 접하게 하면 빗변에 접한 도형의 넓이는 다른 두 변에 접한 도형의 넓이의 합과 같다.

(증명Ⅰ) 그림53에서 S_1, S_2, S_3은 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$를 반지름으로 하는 반원의 넓이이다. 따라서 $S_1=\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)$ 이다. 그런데, $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $a^2+b^2=c^2$이 되므로, $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2)=\frac{\pi}{8}c^2$ 이다.



〈그림53〉

(증명Ⅱ) 위에서 보인 예보다 더 일반적인 경우로 직각삼각형에 접한 세 도형은 모두 닮은 도형이다. 그림54와 같이 $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$위의 도형의 면적을 각각



<그림54>

S_1, S_2, S_3이라 하면 대응변과 면적의 비에서

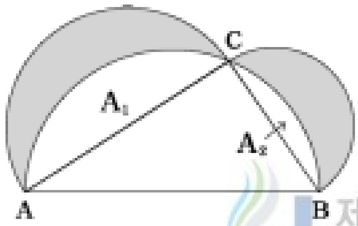
$S_1 : S_2 : S_3 = a^2 : b^2 : c^2$이다. 그러므로

$S_1 = ka^2, S_2 = kb^2, S_3 = kc^2$ (k : 비례상수)

$S_1 + S_2 = k(a^2 + b^2)$ 이다. 그런데 $a^2 + b^2 = c^2$ 이므로

$S_1 + S_2 = kc^2$ 이다. 따라서 $S_1 + S_2 = S_3$ 이다.

(증명Ⅲ) 히포크라테스의 달꼴



<그림55>

그림55는 변 AB를 지름으로하는 원의 상반원을 택하여 그린 그림으로 히포크라테스의 달꼴이라 한다. 변 AC에 접한 반원과 변 AB에 접한 반원의 공통부분을 A_1이라 하고, 변 BC에 접한 반원과 변 AB에 접한 반원의 공통부분을 A_2라 하면 ⅰ)에 의해 $S_1 + S_2 = S_3$이므로 빗금친 부분의 합은 $\triangle ABC$의 넓이와 같다.

2)공간에서의 일반화

(1) 파푸스의 정리

파푸스의 정리를 삼차원으로 확장하면 다음과 같다.

정리8. 임의의 사면체 $ABCD$와 $ABCD$의 면 ABD, BCD, CAD에 외접하는 임의의 사각기둥을 $ABD-EFG, BCD-HIJ, CAD-NOP$ 이라 하자.
점 Q는 평면 EFG, HIJ, KLM의 교점이고, $ABC-NOP$를 그것의 모서리 $\overline{AN}, \overline{BO}, \overline{CP}$가 $\overline{QD}$의 이동인 삼각기둥으로 그린다. 그러면, $ABC-NOP$의 부피는 $ABD-EFG, BCD-HIJ, CAD-KLM$의 부피의 합과 같다.

(증명) 평면 EFG를 점 G가 점 Q에 오도록 평행이동 시키자. 그러면 점 E는 E'로 점 F는 F'로 이동된다. $ABD-E'F'q$ms 새로 만들어진 삼각기둥이 된다. $\overline{QD}$를 연장하여 평면 ABC와 만난 점을 S라 하고평면 NOP와 만나 점을 S'라 하자. 그러면 삼각기둥 $EFG-ABD$의 부피와 삼각기둥 $E'F'Q-ABD$의 부피는 같다. 여기서 $\overline{QD}$와 평행한 임의의 직선 l을 평면 NOP를 지나도록 하면 이 직선 l이 삼각기둥 $ABS-NOS$에 의해 잘려진 길이 l'와 삼각기둥 $ABD-E'F'Q$에 의해 잘려진 길이 l'는 같다. 따라서 $ABD-EFG$의부피$=ABD-E'F'Q$의부피$=ABS-NOS$의부피이다. 같은 방법으로 $BCD-HIJ$의부피 $=SBC-SOP$의부피, $CAD-KLM$의부피$=ASC-NSP$의부피이다. 그러므로 $ABC-NOP$의 부피는 다음과 같다.

$ABC-NOP$의부피

$=ABS-NOS$의부피$+SBC-SOP$의부피$+NSP-NSP$의부피

$=ABD-EFG$의부피$+BCD-HIJ$의부피$+CAD-KLM$의부피

따라서, $ABC-NOP$의 부피는 $ABD-EFG$, $BCD-HIJ$, $CAD-KLM$의 부피의 합과 같다.

(2) 드 구아(de Gua)의 정리

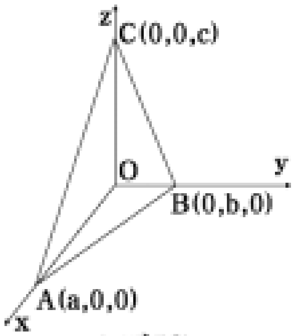
정리에 앞서 모든 면각들이 직각인 삼면각을 갖는 사면체를 삼직각 사면체(trirectangular tetrahedon)라고 정의하고, 그 삼면각을 그 사면체의 직각(right angle), 그 직각의 대면을 그 사면체의 밑(base)이라고 정의하자.

정리9. 삼직각 사면체의 밑의 넓이의 제곱은 그 사면체의 다음 세면 넓이의 제곱과 합과 같다.

(증명 I) $\triangle ABC$를 포함하는 평면의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$이고 원점 O에서 $\triangle ABC$에 내린 수선의 길이를 d라 하면,

$$d=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}} \tag{3.7}$$

이다.



<그림56>

한편, 삼각뿔 $O-ABC$의 부피 V는 $\frac{1}{3}\times\triangle ABC$의넓이$(S)\times$높이$(d)$이고, 같은삼각뿔 $C-OAB$의부피V는 $\frac{1}{3}\times\triangle OAB$의넓이$\times$높이$(c)$ 이므로 이를 식으로 표현하면,

$V=\frac{1}{3}\times S\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}abc=\frac{1}{6}abc$ 이다. 위의 식에서 $\triangle ABC$의 넓이 S에 대해 정리하면,

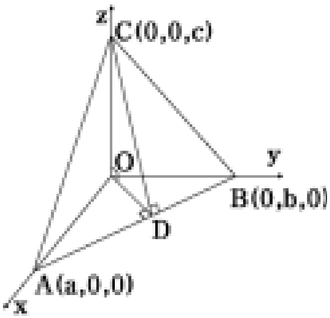
$\triangle ABC$의넓이$S=\frac{abc}{2d}$ 이고 (3.7)을 적용하면

$$\triangle ABC\text{의넓이}S=\frac{abc}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{abc}{a}\right)^2+\left(\frac{abc}{b}\right)^2+\left(\frac{abc}{c}\right)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ca)^2}\right\}=\sqrt{\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2}$$

따라서, $S^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2$ 이다. 그러므로,

$(\triangle ABC\text{의넓이})^2=(\triangle OAB\text{의넓이})^2+(\triangle OBC\text{의넓이})^2+(\triangle OCA\text{의넓이})^2$
이다.

(증명Ⅱ)



<그림57>

그림57에서 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$는 각각 직각 삼각형이므로

$$\begin{aligned}\triangle AOB\text{의넓이}&=\frac{1}{2}ab\\ \triangle BOC\text{의넓이}&=\frac{1}{2}bc\\ \triangle COA\text{의넓이}&=\frac{1}{2}ca\end{aligned}\qquad(3.8)$$

이다. 이제, $\triangle ABC$에서 밑변을 AB로 하고 C에서 밑변 AB에 내린 수선의 길이를 높이 k라 하면, $\triangle ABC$의넓이$=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot k$이다. 한편, $\triangle COD$는 직각 삼각형이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{OD}$ 와 $\overline{AB}$는 서로 수직이다.

$$\triangle ABC\text{의넓이} = \frac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB} \tag{3.9}$$

으로 표현되고 $\triangle OAB$에서 피타고라스 정리를 적용하면 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$이다. (3.9) 에서 $\frac{a}{2}\overline{OD}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}ab$이고 이 식을 $\overline{OD}$에 의해 정리하면

$\overline{OD}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다. $\triangle OCD$에 피타고라스 정리를 적용하면

$\overline{CD}^2=\overline{OC}^2+\overline{OD}^2$ 이므로 이를 수식화하면 $k^2=c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$이다.

따라서

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2\cdot k^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2})$$
$$=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2)= (\frac{1}{2}ac)^2+(\frac{1}{2}bc)^2+(\frac{1}{2}ab)^2$$

이다. 결국, (3.9) 에 의해,

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2=(\triangle COA\text{의넓이})^2+(\triangle BOC\text{의넓이})^2+(\triangle AOB\text{의넓이})^2$$

이다.

(증명Ⅲ) 그림57에서 변 AB의 길이, 변 BC의 길이, 변 CA의 길이를 각각 피타고라스 정리를 이용하여 구하면,

$$\overline{AB}\text{의길이}=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \overline{BC}\text{의길이}=\sqrt{b^2+c^2}\ ,\ \overline{CA}\text{의길이}=\sqrt{c^2+a^2}$$

이므로

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2=s(s-\sqrt{a^2+b^2})(s-\sqrt{b^2+c^2})(s-\sqrt{c^2+a^2})$$

이다. 여기서, $s=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})$ 이므로 식에 대입하면,

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})$$
$$=\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})-\sqrt{a^2+b^2}\}$$
$$=\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})-\sqrt{b^2+c^2}\}$$
$$=\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})-\sqrt{c^2+a^2}\}$$

이고 이를 계산하여 정리하면,

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2 = \frac{1}{16}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})(-\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})$$
$$(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+a^2})$$

이다. 이식을 합차 공식에 전개하여 다시 정리하면,

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2$$
$$=\frac{1}{16}\{(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})^2-(a^2+b^2)\}\{(a^2+b^2)-(\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+a^2})^2\}$$
$$=\frac{1}{16}\{(2c^2+2\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+a^2})\}\{-2c^2+s\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+a^2}\}$$
$$=-\frac{1}{4}\{c^4-(b^2+c^2)(c^2+a^2)\}=-\frac{1}{4}\{c^4-(b^2c^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2$$

이므로 두 번 째 증명의 (3.9)를 적용하면

$$(\triangle ABC\text{의넓이})^2=(\triangle COA\text{의넓이})^2+(\triangle BIC\text{의넓이})^2+(\triangle AOB\text{의넓이})^2$$

이다.

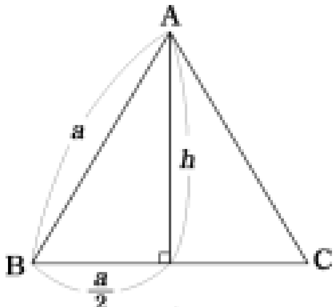
2. 피타고라스 정리의 활용

1)평면에서의 활용

(1) 직각삼각형의 대각선의 길이

가로, 세로의 길이가 각각 a,b인 직각 삼각형의 대각선의 길이를1이라고 하면, 피타고라스의 정리에 의해 $1=\sqrt{a^2+b^2}$ 이다. 그리고 한 변의 길이가 a 인 직각 이등변삼각형의 대각선의 길이를 1이라고 하면, $1=\sqrt{2}a$ 가 된다.

(2) 정삼각형의 높이와 넓이



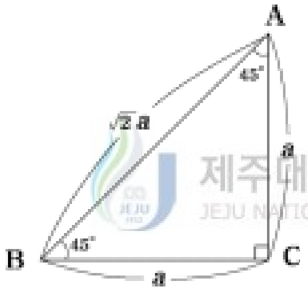
〈그림58〉

한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 높이를 h, 넓이를 S라 고 하자. 꼭지점 A에서 수선을 내리면 대변과 수직을 이등분하게 만나므로 정삼각형의 한변의 반은 $\frac{a}{2}$이다. 피타고라스 정리에 의해

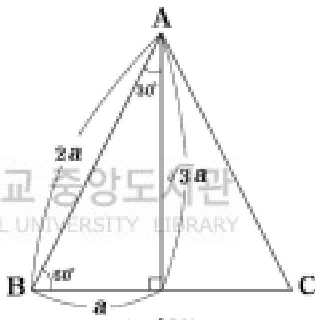
$(\frac{2}{a})^2 + h^2 = a^2$ 이므로 높이 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$를 얻으며,

넓이는 $S = \frac{a}{2}h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이다.

(3) 특수한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비



〈그림59〉



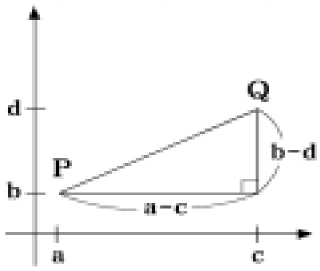
〈그림60〉

한 변의 길이가 a인 이등변 삼각형 ABC에 대해 나머지 한변의 길이는 $\sqrt{2}a$ 이므로 $AB : BC : CA = \sqrt{2} : 1 : 1$ 이 된다. 또한, 그림60 에서
$AB : BC : CA = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 이다.

(4) 평면 안의 두 점 사이의 거리

$P(a, b)$ 와 $Q(c, d)$ 사이의 거리는 두 변의 길이의 차 $a-c$ 와 $b-d$ 를 이용하면 빗변의 길이 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ 로서 주어진다.

두 점 사이의 거리 개념은 일반적인 n 차원 유클리드 공간 R^2에서 두 점



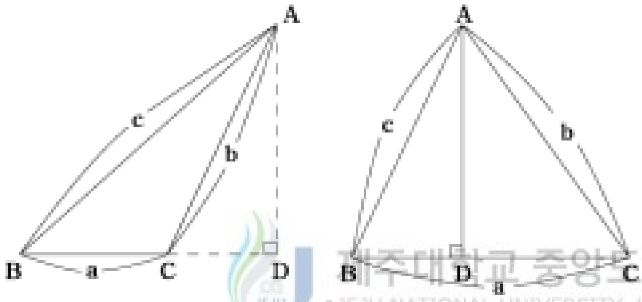
<그림61>

$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 와 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 사이의 거리로 일반화된다.

즉, $\sqrt{\ (x_1-y_1)^2+\ (x_1-y_1)^2+\cdots+\ (x_n-y_n)^2}$ 이다.

(5) 삼각형에 관련된 명제

삼각형의 한 변의 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이의 제곱의 합에서, 그 한 변과 그 변에 내려진 다른 변의 정사영 과의 곱의 두배를 더한(뺀)것과 같다.

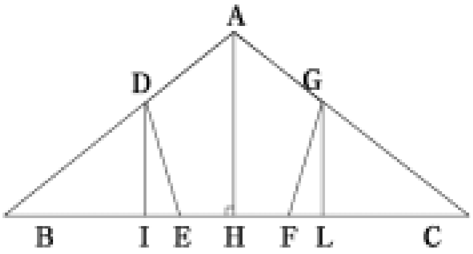


<그림62>

(증명) 그림62에서 $c^2=a^2+b^2\pm 2ac$임을 보이면 된다. 먼저 $\triangle ABC$가 둔각삼각형일 때, 피타고라스정리에 의해 $c^2 = \overline{AD}^2+(a+\overline{CD})^2= \overline{AD}^2+a^2+2a\overline{CD}+ \overline{CD}^2$이고 $b^2= \overline{CD}^2+ \overline{AD}^2$이므로 $c^2=a^2+b^2+2a\overline{CD}$ 를 얻으며, $\triangle ABC$가 예각삼각형일때 $c^2(a-CD)^2+AD^2$으로부터 $c^2=a^2+b^2-2a\overline{CD}$ 를 얻는다.

(6) 피보나치(Fibonacci)의 문제

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=10$ $\overline{BC}=12$일 때, 이 삼각형에 내접하는 등 변오각형 $ADEFG$의 한 변의 길이를 구하여라. $AD=DE=EF=FG=GA$라고 할 때 x를 구한다. D와 G에서 수선 DI, GL을 각각 내리면 $AB:DB=AH:DI$이



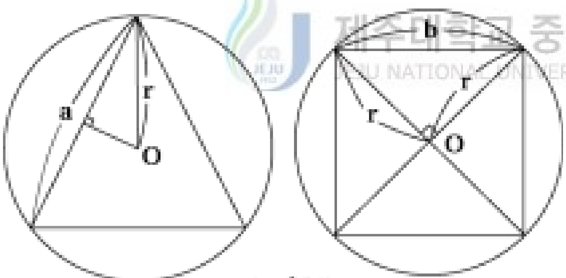
<그림63>

고 $DB=10-x$이므로 $DI=\frac{AH\cdot DB}{AB}=\frac{8(10-x)}{10}=8-\frac{4}{5}x$이다. 그리고 $AB:AD=HB:HI$ 에서 $HI=\frac{AD\cdot HB}{AB}=\frac{6}{10}x=\frac{3}{5}x$, $HE=\frac{x}{2}$ 이므로 $IE=\frac{3}{5}x-\frac{x}{2}=\frac{x}{10}$ 이다. $\triangle DEI$ 에서 피타고라스 정리를 적용하면,

$\overline{DE}^2=\overline{DI}^2$ 이다. 즉, $x^2=\frac{x^2}{100}+64-\frac{64}{5}x+\frac{16}{25}x^2$ 또는, $7x^2+256x-128=0$이므로

$x=\frac{|-128\pm48\sqrt{11}|}{7}$을 얻게 된다.

(8)원에 관련된 명제



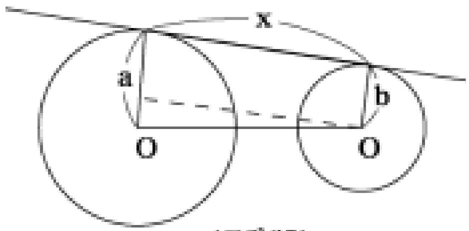
<그림64>

Ⅰ.반지름이 r인 원에 내접하는 정삼각형과 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

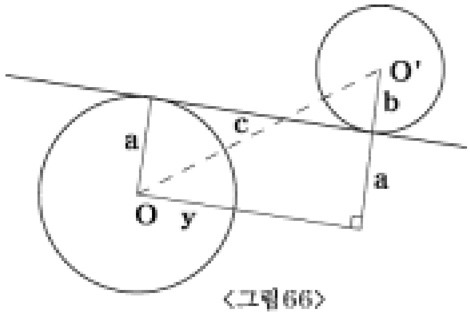
(풀이) 정삼각형의 한 변의 길이를 a,정사각형의 한 변의 길이를 b라고 하면, 그림64에서 $r^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{r}{2})^2 b^2=r^2+r^2$ 이므로 $a=\sqrt{3}r$, $b=\sqrt{2}r$ 를 얻는다.

Ⅱ.반지름 $a, b, (a>b)$중심거리가 c인 두 원의 공통 내접선과 공통 외접선의 길이를 구하여라.

(풀이)



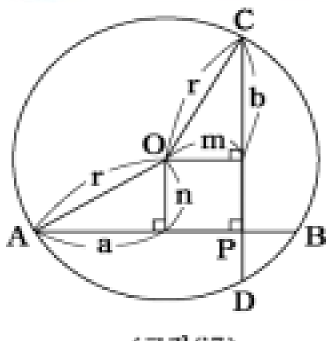
<그림65>



<그림66>

공통 외접선 x는 그림 65에서 $c^2=x^2+(a-b)^2$ 이므로이고, 공통외접선 y는 그림 66에서 $c^2=y^2+(a+b)^2$ 이므로 $x=\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}$이다.

Ⅲ. 아르키메데스(Archimedes)의 문제 : 반지름 r인 원 O와 정점 P에 대해 P를 지나 직교하는 두 직선이 AB, CD에서 만날 때, $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$은 일정하다.



<그림67>

(증명) $AB=2a,\ CD=2b$ 라고 하면 $a^2=r^2-n^2,\ b^2=r^2-m^2$ 이므로

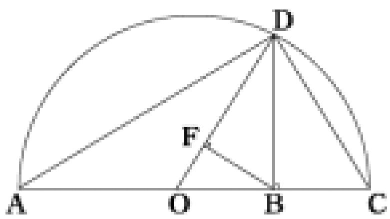
$a^2+b^2=2r^2-(m^2+n^2)$ 이다. 따라서,

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(a^2+b^2)=8r^2-4(m^2+n^2)=8r^2-4\,\overline{OP}^2=$$ 일정

하다.

(9) 평균(산술평균, 기하평균, 조화평균)

파푸스 (Pappus, A.D 300년경)가 저술한 "수학의 집성(Mathematical Collection)"의제 3권에 다음과 같은 기하학적 표현으로 된 평균에 관한 정리가 나온다. 선분 AC위에 중점이 아닌 점 B를 잡고, B에서 AC에 수선을 올릴 때 그 것이 AC를 지름으로 하고 중심이 O인 반원과 D에서 만나고 , 또한 B에서 OD에 내린 수선의 발을 F라고 하면 OD, BD, FD는 각각 두 선분 AB와 BC의 산술평균,기하평균,조화평균이다.



〈그림68〉

(증명) 먼저 그림 68에서 직각삼각형 ABD, ACD, BCD 각각에 피타고라스 정리를 적용하면 BD는 두 선분 AB와 BD 의 기하 평균 $\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}$임을 알 수 있다. 그리고 직각삼각형 OBD에 피타고라스 정리를 적용하고

$\overline{BO}=\dfrac{|\overline{BC}-\overline{AB}|}{2}$ 임을 이용하면 $\overline{OD}$는 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 산술평 $\overline{OD}=\dfrac{(\overline{AB}+\overline{BC})}{2}$

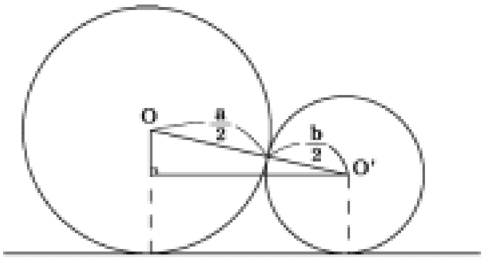
가 된다. 그리고 $\triangle DFB$와 $\triangle DOB$는 닮은 꼴이므로 $\dfrac{FD}{DB}=\dfrac{DB}{OD}$ 로부터

$FD=\dfrac{DB^2}{OD}=\dfrac{2AB\cdot BC}{(AB+BC)}$가 성립한다. 즉 , FD는 AB와 BC의 조화평균이다.

(10) 산술평균과 기하평균에 관한 부등식

양의수 a, b 에 대하여 산술평균 $\dfrac{(a+b)}{2}\geq\sqrt{ab}$ 가 성립하고 위 부등식에서 등식이 성립할 필요충분조건은 $a=b$이다.

(증명) $a>b$임을 가정하고 각 각 a, b 를 지름으로 갖는 접하는 두 원을 생각 한다.그러면 빗변은 $\dfrac{(a+b)}{2}$이고 한 변은 $\dfrac{(a-b)}{2}$인 직각삼각형이 만들어지고 다른 한변을 c라고 하면 피타고라스 정리에 의해



<그림69>

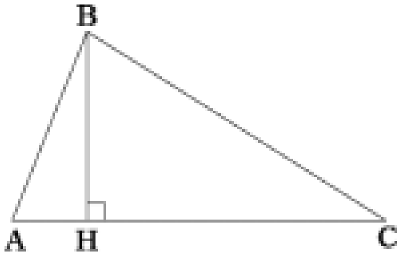
$\frac{(a-b)^2}{4}+c^2=\frac{(a+b)^2}{4}$ 이다. 따라서

$(a+b)^2+(a-b)^2=4c^2$ 로부터 $c=\sqrt{ab}$

이다. 빗변 $\frac{(a+b)}{2}$ 의 가장 큰 변이므로

$\frac{(a+b)}{2}\geq\sqrt{ab}$ 를 얻는다.

(11) 헤론의 공식



<그림70>

그리스 수학자 헤론(Heron,A.d.75년경) 이 저술한 "Metrica"의 제 1권에 삼각형의 세변의 길이로 삼각형의 면적을 구하는 헤론의 공식이 나와 있다. 그림70에서 코사인 제2법칙에 의해 $a^2=b^2+c^2-2b\cdot\overline{AH}$ 이다. 따라서

$$\overline{BH}^2 = c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}=\frac{\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}}{4b^2}$$

$$=\frac{\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}}{4b^2}=\frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4b^2}$$

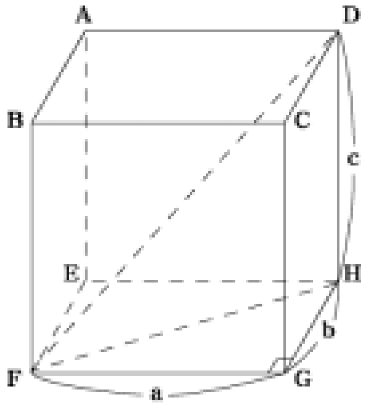
가 된다.여기서 $p=\frac{(a+b+c)}{2}$ 로 놓으면, 헤론의공식 $\overline{BH}^2=\frac{4p}{b^2}(p-a)(p-b)(p-c)$ 을 얻는다. 즉, 각 변의 길이가 a,b,c 인 삼각형의 면적은

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ,(\text{단}\quad p=\frac{(a+b+c)}{2})$$

이다.

2.공간에서의 활용

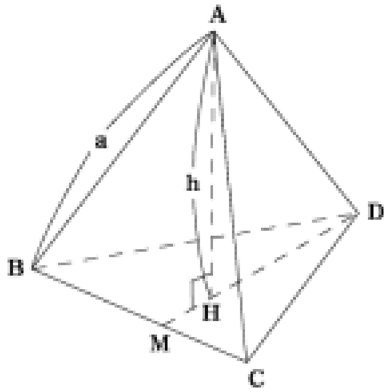
(1) 직육면체의 대각선의 길이



<그림71>

그림71에서 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a,b,c그리고 대각선의 길이를 1이라고 하자. 피타고라스 정리에 의해 $FH=\sqrt{a^2+b^2}$이고, FH를 한 변으로 하고 다른 두 변의 길이는 각각 c, 1인 삼각형을 생각하면 $\angle FHD$가 직각이므로 직각삼각형이다. 따라서 피타고라스정리에 의해 직육면체의 대각선의 길이는 $l=\sqrt{FH^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다. 그리고 한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 대각선의 길이 $l=\sqrt{3}a$을 얻는다,

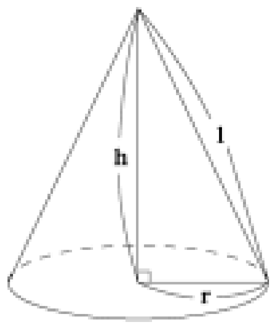
(2) 정육면체의 부피



<그림72>

한 변의 길이가 a인 그림 72의 정사면체를 생각한다. 꼭지점 D에서 수선을 내리면 마주보는 삼각형의 무게중심 H를 지나므로 $HD=\frac{2}{3}a$가 되고 $\triangle AHD$에서 피타고라스정리에 의해 $a^2=(\frac{2}{3}a)^2+h^2$ 이므로 높이 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$이다. 따라서 정사면체의 부피는 밑변의 넓이×높이×$\frac{1}{3}$ 이므로 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{12}}{12}a^2$이 된다.

(3) 원뿔의 부피



<그림73>

그림 73에서 $1=h^2+r^2$이므로 높이 $h=\sqrt{1-r^2}$ 이다. 원뿔의 겉넓이는 밑면의 넓이와 옆면의 넓이의 합으로 $S=\pi r^2+\pi r=\pi r(r+1)$이다. 원뿔의 부피는 밑변의 넓이 × 높이 × $\frac{1}{3}$ 이므로 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}$ 가 된다,

Ⅴ. 결론 및 제언

기하학은 인류의 생활 (토지이용, 토목공사)와 깊은 관계를 맺고 있고, 이런 측면에서 볼 때 피타고라스 정리는 실질적인 문제를 해결하기 위해 발생한 경험적 지식으로 이 정리에 의해 얻은 결과는 여러 방면에 많이 응용되어 인류문화의 발전에 지대한 영향력을 발휘하고 있다. 그러므로 피타고라스 정리의 개념을 정확히 이해하고 그 개념을 응용할 수 있기 위해서는 교과서 상의 일률적이고 논증적인 증명법 보다는 다양한 사례를 도입하여 학생들의 흥미를 유발하고 정리의 개념과 의미를 이해하도록 도와서 이 정리를 다른 영역에 활용하는데 수학교육의 초점이 맞춰져야 할 것이다.

본 연구에서는 피타고라스학파의 업적과 기하학의 접근방법에 따른 분류 즉, 종합기하, 해석기하, 벡터기하, 변환기하에 대해 간략하게 살펴보고 피타고라스의 정리의 여러 증명방법을 기하학의 접근방법에 따라 분류 살펴보았다.

참고문헌

강옥기, 정순영 , 이환철 9-나 교사용지도서 , (주)두산 , 2004

양영오, 조윤동역,칼B.보이어 · 유타C.메르츠바흐, 수학의 역사 · 상, 경문사,2000

유정옥, “피타고라스 정리의 여러증명에 대한 연구”, 한남대학교 교육대학원 석사학위논문,2002

윤병선, “피타고라스 정리의 증명에 관한 연구”, 단국대학교, 1993

이상만, Pythagoras정리의 활용 방안에 관한 고찰, 대전대학교 교육대학원 석사학위논문,2001

이윤희, “평면 기하의 역사적 발달과정과 학교 수학에서의 합동과 닮음의 지도”,건국대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2001

이종우, 기하학의 역사적 배경, 경문사 , 1998

Abstract

The Classification of the proofs of the Pythagorean Theorem

Pythagorean theorem is one of famous theorems in mathematics.
Up to now there are many proofs of the Pythagorean theorem according to the development of mathematics.

In this research, we classify the proofs by geometrical methods which are analytic geometry, vector geometry and transformation geoemtry.

Moreover, we study the applications of Pythagorean theorem.
There are many applications of Pythagorean theorem on nature.