

碩士學位 論文

수학 학습 지도에 있어서의 오류 진단 및 지도
-9-가 수와 연산 영역을 중심으로-



濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

許 成 熙

2008년 8월

수학 학습 지도에 있어서의 오류 진단 및 지도
-9-가 수와 연산 영역을 중심으로-

指導教授 高 胤 熙

許 成 熙

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

2008年 5月

許成熙의 教育學 碩士學位 論文을 認准함

審 查 委 員 長	_____	印
委 員	_____	印
委 員	_____	印

濟州大學校 教育大學院

2008年 8月

<초록>

수학 학습 지도에 있어서의 오류 진단 및 지도
-9-가 수와 연산 영역을 중심으로-

許 成 熙

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻
指導教授 高 胤 熙

중등학교 수학교육과정에서 수학과목의 목표는 기본적인 수학적 지식과 기능을 바탕으로 수학적 사고력을 길러 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 갖추는 것이다. 수학적 사고력이란 단순히 수학적 지식습득에 한정되는 것이 아니라 자신의 수학적 지식을 바탕으로 독창적인 해결과 논증을 하고 이를 비판적으로 사고하는 능력을 의미한다.

다른 교과목에 비해 수학 학습에 많은 노력을 하고 있음에도 불구하고 많은 학생들은 수학을 흥미로운 과목이라 생각하지 않고 있으며 접해보지 않은 문제 유형에 대해서는 매우 당황하며 특히 기초학습이 제대로 되어 있지 않은 학생일수록 상위내용을 학습하게 되면서 수학을 더욱 하기 싫어하고 어려운 과목으로 느끼게 된다.

학생들이 성공적인 문제해결을 하도록 하여 수학 교과에 대한 지적 호기심과 스스로에게 성취감을 느껴 수학에 대한 자신감을 갖도록 하는 수업 방법 중의 하나로 오류 진단 및 지도를 들 수 있겠다.

학교현장의 수학 교사들은 학생들의 오류의 원천과 형태를 정확히 파악한다면 좀 더 정확한 피드백을 실시할 수 있으며 또 오류 유형에서 파악된 학생들의 사고 과정의 결함은 교수 계획을 수립하는데 참고가 되므로 여러 가지 측면에서 오류 유형의 진단은 반드시 필요한 과정이라고 여긴다.

본 연구에서는 수와 연산 영역에서 오류 유형을 이해과정에서 오류, 부적절하게 사용된 정리나 정의, 의도하지 않은 해, 풀이과정의 생략, 기술적 오류, 오류의 애매 모호성 등 6가지로 분류하였으며 그 결과 새로운 용어(무리수, 제곱근 등)가 도입되는 중단원에서는 이해과정에서 가장 많은 오류를 범하고 있으며 무리수의 계산을 포함하는 중단원에서는 기술적 오류, 이해과정에서의 오류, 부적절하게 사용된 정리나 정의의 순서로 나타났다.

오류 분석에 따른 교정 수업 그리고 개인별 오류 정도에 따른 수준별 학습지 투여와 지도를 통하여 오답률 30%이상 비율이 65%이상에서 40%로 25%이상 감소하였으며 성취도에서도 오류 분석 및 지도를 실시하지 않은 단원에 비하여 약7%의 차이로 상향되었다. 또한 학생들의 수학에 대한 관심도(설문지) 조사를 통하여 수학에 대한 흥미를 묻는 문항에서는 약 9%학생이 긍정적으로 변화하였으며 수업 시간에 적극성을 묻는 문항에서는 약 10%, 수업 시간 내용의 이해도를 묻는 문항에서는 20%, 과제물 해결은 약13% 등 모두 수학 학습을 위한 긍정적인 방향으로 변모함을 알 수 있었다.

교사의 수업 효과를 극대화하기 위하여 수학과 모든 영역에서 오류 유형을 분석해 볼 필요가 있으며 오류 지도가 모든 영역에서 꾸준히 지속적으로 이루어진다면 학생들의 나날이 발전되는 모습을 기대할 수 있을 것이다.

목 차

<초록>

I. 서론	1
1. 연구의 필요성	1
2. 연구 문제	2
3. 연구의 내용	3
4. 연구의 제한	3
5. 용어의 정의	4
II. 이론적 고찰	5
1. 용어의 정의	5
2. 수학적 오류에 대한 선행 연구	6
3. 지도 방법	10
III. 연구 방법	16
1. 대상	16
2. 기간	16
3. 연구 절차	16
4. 측정 도구	17
5. 연구 방법	18
IV. 연구의 실행	20
1. 수와 연산 영역에서 개념정리 내용 추출 및 지도 계획	20
2. 수학에 대한 흥미도 조사	20

3. 선수학습(2학년) 진단평가 실시	21
4. 중단원별 형성평가 학습지 제시	21
5. 오류 내용 분석	21
6. 개별 지도	21
7. 오류 지도 결과 분석	22
8. 사후 흥미도 조사	22
V. 연구의 결과 및 분석	23
1. 흥미도 조사	22
2. 2008학년도 국가수준 교과학습 진단평가 결과	25
3. 중단원별 형성평가 실시	26
4. 학생 개인별 오류 지도	39
5. 오류 진단에 따른 지도 결과	48
VI. 결론 및 제언	53
1. 결론	53
2. 제언	54
참고문헌	55
Abstract	56
<부록-1> 2008년 중학교 3학년 국가수준 교과학습 진단평가	58
<부록-2> 학생용 설문지	62

표 목 차

[표1] 김옥경의 오류 범주별 빈도수(%)	9
[표2] 성중기의 오류모델에 따른 학습 수준별 오류 빈도표	10
[표3] 연구 일정	16
[표4] 수와 연산 지도내용 및 계획	20
[표5] 관심도 조사 설문지	23
[표6] 사전 관심도 조사 분석표	24
[표7] 교과학습 진단 평가 분석표	25
[표8] 중단원(I-1) 형성평가 문항별 정·오답률 분석표	28
[표9] 오류 30%이상인 문항에 대하여 오류 분석표	29
[표10] 중단원(I-2) 형성평가 문항별 정·오답률 분석표	35
[표11] 오류 30%이상인 문항에 대하여 오류 분석표	36
[표12] 교정수업 과정안	38
[표13] 개인별 누가기록	39
[표14] 오류 지도후 평가 결과	48
[표15] 사후 관심도 조사 분석표	52

I. 서론

1. 연구의 필요성

중등학교 수학교육과정¹⁾에서 수학과와 목표는 기본적인 수학적 지식과 기능을 바탕으로 수학적 사고력을 길러 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기른다는 것으로 되어있다. 여기서 수학적 사고력이란 단순히 수학적 지식습득에 한정되는 것보다 주어진 문제를 자신의 수학적 지식을 바탕으로 독창적인 해결과 논증을 하고 이를 비판적으로 사고하는 능력을 의미한다.

하지만 수학 교과를 공부하는 대다수의 학생들은 근본적인 이유를 생각하기 싫어하는 경향이 있으며 문제 푸는 방법만을 암기하여 문제를 해결하려 한다는 점이 본 논문의 출발점이다. 대부분의 학생들이 다른 교과목에 비해 수학학습에 더욱 많은 노력을 하고 있음에도 불구하고 수학을 흥미로운 과목이라 생각하고 있지 않는다는 사실이다. 이는 응용력을 떨어뜨리고 접근해 보지 않은 문제 유형에 대해서는 매우 당황하는 현실을 낳고 있다 하겠다. 수학은 다른 학문에 비해 논리적이고 체계적이며, 특히 연계성이 강하기 때문에 기초학습이 제대로 되어있지 않은 학생일수록 상위내용을 학습하게 되면서 수학을 더욱 하기 싫어하고 어려운 과목으로 느끼게 된다.

Clayton 등은 유능하고 성공적인 수학교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학의 구조를 알아야 할 뿐만 아니라 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지식을 갖추어야 한다고 말하고 있다. 따라서 학교현장의 수학교사들은 학생들의 오류를 파악할 필요가 있으며, 이는 다음과 같은 긍정적인 결과를 가져온다고 말하고 있다²⁾. 첫째, 학생들의 오류의 원천과 형태를 파악하고 각각의 오류에 대하여 학생들에게 좀 더 정확한 피드백을 가져다 줄 수 있다. 둘

1) 장영기 외 3인(2001), 「중학교 수학과 교육과정 해설」, 대한교과서 주식회사, pp.35~37

2) 김옥경(1990), 「고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 대한 연구」, 이화여자대학교 석사학위논문

째, 오류 유형은 종종 내재하는 수학적 개념의 잘못된 이해, 문제 해결 전략의 부족이나 미성숙한 문제 풀이 전략을 드러나게 한다. 셋째, 오류 유형에서 드러난 학생들의 사고 과정의 결함은 교사가 교수 계획을 수립하는데 참고가 된다. 넷째, 학생들이 성공적인 문제해결을 하도록 하여 수학 교과에 대한 지적 호기심과 스스로에게 성취감을 느끼도록 하고 수학 공부에 자신감을 가질 수 있다.

수학문제를 풀기 위해서 수학의 기본개념의 구조적 원리와 이해에 바탕을 두고 문제를 해결해야 하지만 학생들을 가르치다 보면 대부분의 학생들이 자주 범하게 되는 오류를 쉽게 발견하게 된다. 그러므로 본 논문에서는 오류유형을 조사하여 이를 분석함으로써 어떤 종류의 문제에서 오류가 일어나는지 진단해보고, 이를 지도하는 과정을 통하여 학생들의 학업능력의 향상도를 알아보고자 한다. 또한 오류 진단과정에서 학생들의 수학에 대한 흥미도의 변화 여부도 주목하고자 한다. 따라서 본 논문은 학생들의 문제 해결력 신장을 위해 수학에서 자주 발생하는 수학적 오류를 분석 연구하여 교사가 학습 지도시 올바르게 교정함으로써 학생들의 수학 문제 해결력을 향상시키는데 그 목적이 있다.

또한 수와 연산을 중심으로 기본 개념과 원리 및 응용문제의 수학적 오류를 분석·연구함으로써 오류를 최소화 할 수 있는 효과적인 방안을 제시하고 반복학습을 통한 교정 과정이 수학적 오류를 얼마나 감소시키며 학생의 학업성취도에는 어떠한 영향을 미치는지 알아보고 나아가 효율적인 교수 전략과 학생들의 수학 학습에 도움을 주고자 한다.

2. 연구 문제

가. 수와 연산의 문제 해결 과정에서 각각의 오류에 대한 오류의 원인을 분석하여 교정 지도법을 알아본다.

나. 수학적 오류 분석과 교정 지도가 오류를 얼마나 감소시킬 수 있으며 학업성취도 및 수학적 흥미도에는 어떤 영향을 미치는 지 알아본다.

3. 연구의 내용

본 연구 대상 학교는 제주도 읍지역 매우 소규모 학교로서 가까운 주변에는 사설학원도 없는 지역으로 대부분의 학생들이 학교 수업에 의존하는 전형적인 농어촌 지역이다. 학교 수업 의존도가 높은 상황에서 교사는 학생들에게 수학적으로 사고하는 능력을 길러줌으로써 수학에 대해 자신감 및 문제 해결력을 신장시키는데 중점을 두어야 한다.

본 연구자는 학생들이 수학문제를 풀면서 일어나는 오류에 대하여 분석·조사하여 학생들에게 효율적인 지도를 하기 위해 다음과 같은 연구 내용을 다루었다.

- 가. 사고(思考) 오류 요소를 추출하여 정확한 개념 정리가 필요한 내용 정리
- 나. 개념 이해 및 응용력을 기르기 위한 형성평가 학습지 제시
- 다. 반복학습을 통한 개념의 정확한 이해를 도모하여 문제 해결력을 높이며
- 라. 사고 오류 원인을 발견하여 완전학습이 가능하도록 하며 이해능력을 신장하여 수학의 논리적인 이론과 엄밀성을 신장시키는 데 목적이 있다.

4. 연구의 제한

- 가. 본 연구는 제주도 ○○읍 소재의 중학교 3학년 학생 52명을 대상으로 하였다.
- 나. 본 연구는 일부 학생으로 국한되어 있으므로 모든 학생들에게 일반화하는 데에는 한계가 있다.
- 다. 학생들이 본 연구에서 시행한 설문지에 얼마나 정확하게 답변하였는지 검증하는데 어려움이 있다.
- 라. 본 연구의 범위는 수와 연산 영역으로 한정한다.
- 마. 본 연구는 검사지에 나타난 오류만을 분석·연구한다.

5. 용어의 정의

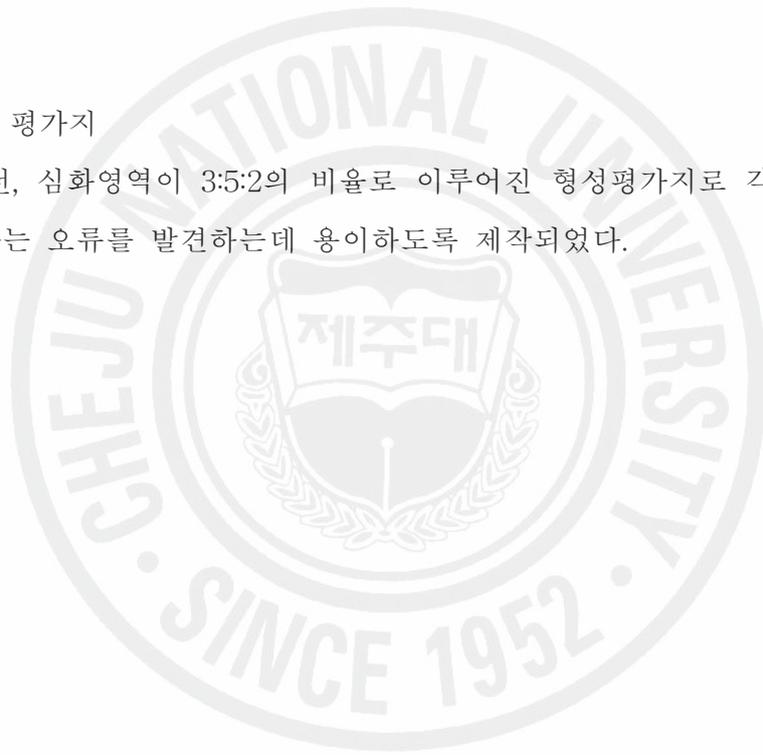
본 연구에 사용되는 용어를 다음과 같이 정의한다.

가. 사고 오류 원인

문제풀이 과정에서 잘못 사용된 수학적 지식, 개념, 원리, 법칙, 정리등을 말한다.

나. 수준별 평가지

기본, 발전, 심화영역이 3:5:2의 비율로 이루어진 형성평가지로 각 수준에서 많이 발생하는 오류를 발견하는데 용이하도록 제작되었다.



Ⅱ. 이론적 고찰

1. 용어의 정의

가. 오류(error)의 정의

“오류”란 사고(思考)의 내용과 대상(對象)이 일치하지 않는 사유(思惟)판단이라 정의하고 있다. 「국어 대사전」³⁾에서 찾아보면 ‘그릇되어 이치에 어긋남’, ‘이치에 어긋난 인식’등으로 되어있고, 「교육학 용어사전」⁴⁾에서는 ‘논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 의견상 바르게 보이면서 틀린 추리, 통속적 의미로는 참이 아닌 것으로 쓰이기도 하며, 착각·관측상의 오차 등으로 인한 지각상(知覺上)의 착오를 가리키기도 함’등으로 풀이하고 있다. 본 연구에서 말하는 오류는 수학적 오류 즉, ‘수학의 개념상 바르지 못한 논리과정’만을 의미하는 것으로 수학 문제 풀이 과정에서 발생하는 오류에 초점을 두고자 한다.

나. 오류 분석

수학문제의 해결에 있어서 오개념, 전략 선택의 실패, 해결 과정의 미비를 분석한다.

다. 문제해결력

이미 배운 원리를 응용하여 여러 가지의 새로운 상황에서 직면하게 되는 문제들에 대한 해결책을 발견해 내는 능력을 말한다. 다시 말해, 새로운 원리를 형성하기 위해서 기존의 원리를 조합하여 문제해결의 아이디어를 찾아내는 것을 의미한다. 즉, 문제해결에 필요한 고차적 규칙이나 원리를 발견하는 것을 뜻한다.

3) 이희승(1982), 「국어대사전」, 서울:민중서림

4) 서울대학교 사범대학 교육연구소(1981), 「교육학 용어사전」, 서울:배영사

라. 문제 해결 전략

문제해결 전략이란 문제 공간에서 해를 구하기 위해 결정적으로 이용될 수 있는 해결책을 말한다. 문제해결 전략에는 식 만들기, 그림 그리기, 표 만들기, 규칙성 찾기, 거꾸로 풀기, 예상과 확인, 수형도 그리기, 단순화하기 등이 있다.

2. 수학적 오류에 대한 선행 연구

가. 오류 연구의 역사

오류에 대한 연구를 함으로써 학생들의 인지능력을 파악할 수 있고 교수학습시 더 효율적인 교육을 할 수 있기 때문에, 수학교육에서 오류에 관한 연구는 오랜 역사를 지니고 있다. 많은 오류의 연구들 중에 대표적인 것 몇 가지만 소개하면 다음과 같다.

Radatz(1979)에 의하면, 미국에서는 1925년경 Buswell과 Judd가 산술적인 오류를 진단하여 30여개 이상의 연구를 한 바 있고, 독일에서 Weimer(1925)와 Seemann(1925)이 오류를 연구하였다.

미국에서의 연구 방법과 가설은 행동주의에 기원을 두고 있는 반면, 독일 등 유럽은 Gestalt theory와 교육학적인 개혁자들의 생각에 영향을 받는 등 학교 체제 구조의 차이에서부터 오류 분석 면에 있어 매우 다른 출발과 관심의 차이가 있었다. 그러나 최근에는 산술적 계산에서의 오류에만 제한되지 않고 여러 방면으로 오류 분석에 관심이 분산 증가되었는데 그 이유는 다음과 같다.

첫째, 수학에서의 규준지향과 표준지향평가에 대한 실망과 회의가 교수의 진단 측면에 대한 관심을 증가시켰다.

둘째, 교육과정에서 수학적 내용의 재구성은 더 많은 어려움과 오류를 생산할거라는 생각에서이다.

셋째, 수학교수의 개별화와 분화는 오류를 기술적으로 특별히 진단할 것을 요구한다. 교사들은 수학 내용이 교육적 발전과 사회철학을 통합하는 측면에서의 진단교수를 위한 실제 모델을 필요로 한다. 수학 교수의 내용에 대한 고려가 없는 개인적인 차이의 분석은 교사에게 교수의 차별화 또는 특별한 과제를 배우는데

있어서 실제적인 도움을 주지 못한다.

넷째, 임상조사, 사례연구, 교수학적 현상학등 경험적 연구에 대한 전통적인 범례의 비판은 수학교육에서의 다른 연구방법들을 자극시켜왔다⁵⁾.

1970년대 이후로는 미국의 Boyd Holtan과 J.Dan Knifong(1976), 독일의 Hendrik Radatz(1979), 오스트레일리아에서 Clements(1980)와 Newman(1981), 이스라엘의 Nitsa Movshovitz-Hadar와 Orit Zaslavsky(1987)등 각국의 수학자들이 오류에 관한 연구를 활발히 하고 있다.

나. 오류의 분류

독일의 수학자 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 다음 다섯가지로 구분하여 제안하였다.

- ① 언어의 난이성
- ② 공간적인 정보 획득의 어려움
- ③ 필수적인 기술, 사실, 개념의 부족한 숙련
- ④ 사고의 경직 혹은 부정확한 연합
- ⑤ 부적절한 규칙이나 전략의 적용

이전에 Pippigg(1975)는 이 오류 범주중 사고의 경직이나 부정확한 연합에 의한 오류, 반대의 치환으로부터 생기는 오류들을 흥미있게 다음의 다섯가지로 분류하였다⁶⁾.

- ① 보존의 오류 : 업무나 문제의 단순한 영역에서 자주 나타난다.
- ② 연합의 오류 : 단순 요소사이의 부정확한 연합의 경우이다.
- ③ 방해의 오류 : 다른 연산이나 개념이 서로 방해하는 경우이다.
- ④ 동화의 오류 : 부정확한 듣기나 읽기나 쓰기에서 실수를 유발시키는 경우이다.
- ⑤ 전 작업으로부터 반대 치환의 오류 : 일단의 연습이나 언어적 문제로부터 얻게 된 잘못된 생각의 효과를 동일시하는 경우이다.

5) H.Radatz(1979), 「Error Analysis in Mathematics Education」, Journal of Research in Mathematics Education 10, pp.163~164

6) H.Radatz(1979), p.167에서 재인용

Pippigg가 분류한 오류들을 살펴보면 비슷한 문제에 대한 경험이 사고의 습관적인 경직성을 가져오면서 학생들이 오답을 쓰게됨을 알 수 있다.

이스라엘의 Nitsa Movshovitz-Hadar⁷⁾와 Orit Zaslavsky(1987)는 고등학교 학생들이 수학졸업 시험에서 범한 오류들을 분석하여 다음 여섯 가지로 분류하였다.

- ① 잘못 이용된 자료(Misused Data) : 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료사이의 불일치로 인한 오류
- ② 잘못 해석된 언어 : 수학적 사실들을 하나의 수학적 기호 언어에서 다른 언어로 옮기는 과정의 부정확에서 오는 오류, 즉 문제 내용을 잘못 해석하는 데서 오는 오류
- ③ 곡해된 정리나 정의 : 특수한 원리, 법칙, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용한 경우
- ④ 논증되지 않은 해답 : 학생들이 밝은 각 단계들이 그 자체로는 옳으나 검토를 하지 않음으로 인해 나타난 마지막 결과가 언급된 문제의 답이 아닌 경우
- ⑤ 논리적으로 부적절한 추론 : 주어진 정보로부터 혹은 전에 잘못된 것으로부터 새로운 정보가 부적절하게 이끌어지는 데서 오는 오류
- ⑥ 기술적 오류 : 계산상의 오류, 표로부터 자료를 잘못 끌어내는 오류, 초등학교 또는 중학교 수학에서 습득된 알고리즘을 시행하는데 있어서의 오류 등이 여기에 포함된다.

김옥경⁸⁾(1990)은 고등학교 학생들을 대상으로 테스트를 실시하고 오류를 분석 연구하여 오류의 분류모델을 Hadar의 여섯 가지 범주에 ‘풀이과정이 생략된 오류’와 ‘오류의 애매 모호성’이 추가되어 여덟 가지로 분류하였다.

김옥경의 오류 분류에 따르면 역시 곡해된 정리나 정의에 의한 오류의 빈도가 가장 높았고 이것으로 보아 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는데 문제가 있음이 밝혀졌다. 또한 각 문항별 오류를 살펴보면 삼각함수, 함수와 그래프, 수열, 지수와 로그, 미분법 문항에서 오류가 발생했음을 알 수 있다. 그의 분류 모

7) Nitsa Movshovitz-Hadar & Orit Zaslavsky(1987), 「An empirical classification model for errors in high school mathematics」, Journal for Research in Mathematics, Vol.18, No1, pp. 3~14

8) 김옥경(1990), 「고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구」, 이화여자대학교 석사학위 논문, pp. 20~30

텔 및 빈도수(%)는 다음과 같다.

[표1] 김옥경의 오류 범주별 빈도수(%)

오류의 종류	빈도수(%)
① 오용된 자료	16.8
② 잘못 해석된 언어	11.8
③ 논리적으로 부적절한 추론	4.6
④ 곡해된 정리나 정의	30.2
⑤ 요구되지 않은 해답	5.5
⑥ 기술적 오류	11.4
⑦ 풀이 과정의 생략	16.2
⑧ 오류의 애매 모호성	3.5
합 계	100

류한영⁹⁾은 중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생을 대상으로 방정식을 푸는 과정에서 학생들이 범하고 있는 오류의 유형을 조사·분석하여 다섯 개 오류의 모형을 제시하고 있는데, 이는 다음과 같다.

- ① 기본 지식의 결여에서 오는 오류
- ② 조건을 잘 이용하지 못하는 오류
- ③ 등식의 미숙에 따른 오류
- ④ 애매한 오류
- ⑤ 실수나 부주의로 인한 경우

성중기¹⁰⁾는 중학교 3학년 학생을 대상으로 학습수준별 이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구에서 오류들을 4가지 모델로 분류하고 있다.

① 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류 : 문제에 주어진 자료와 학생들이 자료를 다루는 방법 사이의 어떤 모순과 관련된 오류를 포함한다.

② 문제의 내용을 잘못 해석하는 오류 : 한 상징적인 언어 안에 표현되어 있는 수학적 사실들을 다른 상징적인 언어로 잘못 해석하는 오류로 수학적 기호나 용어를 그래프로 나타낼 때의 오류, 그래프에 나타난 정보를 잘못 해석하는 오류 등이 있다.

9) 류한영(1999), 「중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류 분석에 대한 연구」, 한국교원대학교 석사학위 논문

10) 성중기(2000), 「이차함수의 그래프에 대한 오류 분석에 관한 연구-중학교 3학년 함수단원 중심」, 한국교원대학교 석사 학위 논문

③ 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류 : 이 범주는 특정하고 동일한 원칙, 정리 혹은 정의 등이 잘못 이해되어 쓰여지는 경우이다.

④ 기술적인 오류: 이차함수의 그래프의 경우 완전제곱꼴로 고치거나 x y 를 대입하여 계산할 때 발생하는 오류, 이차함수의 일반형에서 표준형으로 고치는 과정에서 괄호 안의 값을 처리하는데 있어서 계산 오류 등을 포함한다.

[표2] 성중기의 오류모델에 따른 학습 수준별 오류 빈도표

학습 수준 오류 모델	상	중	하	계
문제의 자료를 잘못 사용하는 오류	38 (19.7%)	82 (22.2%)	88 (22.1%)	208 (21.7%)
문제의 내용을 잘못 해석하는 오류	57 (29.5%)	115 (31.2%)	127 (31.9%)	299 (31.1%)
정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류	78 (40.4%)	129 (35.0%)	148 (37.2%)	355 (37.0%)
기술적인 오류	20 (10.4%)	43 (11.7%)	35 (8.8%)	98 (10.2%)
합 계	193	396	398	960

라다쓰에 의하면, 이와 같은 원인들 사이에는 밀접한 관련이 있기 때문에 오류의 원인들을 명확히 분류하는 것은 종종 어렵다고 한다. 이러한 결론은 같은 오류가 다른 문제풀이 과정으로부터 발생할 수 있고, 똑같은 문제라고 해도 다른 원인들에 의해 오류가 발생할 수 있기 때문이다. 따라서 오류 발생원인들의 명확한 분류와 체계는 사실상 어렵다.

이상에서 살펴본 것처럼 수학에서 발생하는 오류에 대한 연구가 다양한 측면에서 이루어지고 있음을 알 수 있다.

본 연구에서는 이스라엘의 수학자 Nitsa Movshovitz-Hadar의 오류 모델과 김옥경이 제시한 오류 유형을 참고로 하여 이해과정에서의 오류, 부적절하게 사용된 정리나 정의, 의도하지 않은 해, 풀이과정의 생략, 기술적 오류, 오류의 애매 모호성으로 오류 유형을 분석하였다.

3. 지도 방법

가. 발문과 권고

수학교육자 Polya¹¹⁾에게 훌륭한 교육이란 학습자에게 문제에 도전하도록 하여 탐구과정을 통해 스스로 발견할 기회를 체계적으로 제공하는 교육이며 무엇보다도 중요한 교사의 역할은 문제해결에 몰두하는 학생을 자연스럽게 돕는 일이다.

그리고 학생을 자연스럽게 돕는 방법은 문제해결에 전형적인 사고 과정을 유발하는 발문과 권고를 체계적으로 구사하는 것이다. Polya는 발견 발명의 방법과 규칙 곧, 발견술에 대한 연구와 수학하는 자신의 사고과정에 대한 분석을 바탕으로 문제를 해결하는 수학자의 전형적인 사고활동을 야기시키는 대화법, 곧 발문과 권고 형태로 구성된 발견술을 연구 개발하여 이를 체계적으로 서술하고 이를 구사해 가면서 문제를 해결하도록 함으로써 학생들에게 수학하는 사고 활동을 경험시키고자 하였다¹²⁾. 따라서 Polya는 문제 해결의 과정을 4단계로 나누고 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 발문과 권고를 제시하였다. Polya의 문제해결 과정의 단계를 살펴보면 다음과 같다.

1) 1단계(문제 이해의 단계)

- 미지의 것, 주어진 것, 조건은 무엇인가?
- 주어진 조건은 미지의 것을 구하는데 충분한가? 불충분한가? 남아도는가? 모순되고 있는가?
- 그림을 그려라. 적당한 기호를 도입하여라
- 조건을 각 부분을 분리하여 쓸 수 있는가?

2) 2단계(해결 계획 수립 단계)

- 이전에 유사한 문제를 풀어본 적이 있는가?
- 유사한 문제를 풀었을 때 사용한 필요한 정리를 알고 있는가?
- 유사한 문제를 푼 경험을 살려 그 방법이나 결과를 이용할 수 없는가?

11) G. 폴리아(우정호 역)(2002), 「어떻게 문제를 풀 것인가」. 교우사

12) 김양희(2005), 「교사들을 위한 수학 교육론」, 경문사, p. 236

- 문제를 다른 말로 표현할 수 없는가?
- 정의를 생각해 볼 수 있는가?
- 만약에 문제가 풀리지 않으면 이와 관련된 쉽고 비슷한 문제, 일반적인 문제, 특수한 문제, 유추적인 문제는 없는가? 문제의 일부분은 풀 수 있는가? 조건의 일부를 버리거나 또는 관련된 조건을 취할 때 문제는 풀어질 수 있는가?
- 주어진 조건은 모두 사용되었는가?
- 문제에 들어있는 본질적 개념은 모두 고려되었는가?

3) 3단계(실행의 단계)

- 계획을 실행할 때는 각 단계를 검토하고 각 단계가 바르지 못할 때에는 계획을 수정하여라.

4) 4단계(반성의 단계)

- 결과를 검토할 수 있는가? 이론의 근거를 가지고 설명할 수 있는가?
- 결과를 구하는 다른 해법은 없는가?
- 다른 문제에 이 결과나 방법을 응용할 수 있는가?

나. 반성 활동

Polya가 문제해결 4단계에서 가장 강조한 단계로 문제해결의 마지막 단계로서 얻어진 결과가 타당한지를 점검하며 이 해결방법보다 더 좋은 방법은 없는지 생각해 보며, 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는지를 생각해 본다. 즉, 문제의 결과가 타당한지 점검을 통하여 실수를 줄일 수 있고 다른 풀이 방법을 생각해 보게 됨으로써 개방적인 사고활동을 경험할 수 있으며 다른 문제에 적용, 활용함으로써 수학적 지식 사이에서 연결성을 느낄 수 있으므로 문제 해결력 향상을 위해서 꼭 필요한 단계라고 할 수 있다.

다. 문제해결 전략-분해와 재결합

전략은 계획의 수립 단계에서 결정적으로 이용될 수 있는 해결책을 말한다. 분해와 재결합은 문제해결에서 중요한 발견 전략이다. 우리가 생활하면서 직면하는

여러 가지 문제에 대하여 처음에는 전체적인 윤곽은 잡히나 확정적인 것이 아니기 때문에 세부적인 것에 주의를 집중한다. 세부적인 것에 신경을 쓴 다음에는 그 대상을 전체적으로 생각하게 된다. 이와 같이 전체를 부분으로 분해하고 부분을 좀 더 큰 전체 또는 덜 상이한 전체로 재결합한다. 문제해결에 활용 가능한 전략으로 다음과 같이 구분할 수 있다.

1) 식만들기

찾으려는 수를 x , y 와 같은 문자를 두고 조건에 맞게 식을 세운다.

2) 그림 그리기

그림은 알아보기 쉽고 기억하기도 쉽다. 따라서 그림을 그려봄으로써 문제를 전체적으로 이해하거나 문제를 해결하는데 필요한 수단을 제공받을 수 있으며 심지어 그림을 그려봄으로써 문제의 답을 얻을 수도 있다.

3) 규칙성 찾기

문제의 자료에 있는 규칙을 찾아 그것을 문제 상황에 적용함으로써 문제를 해결하는 전략이다.

4) 표만들기

표를 만들어 어떠한 패턴을 발견함으로써 일정한 규칙을 발견할 수 있다.

5) 거꾸로 풀기

문제 상황을 역으로 생각하거나 역 연산을 사용한다.

6) 예상과 확인

문제를 해결할 때 답을 예상 혹은 어림짐작해보고 그 답이 맞는지 확인해 보는 전략이다.

7) 수형도 그리기

이 전략은 경우의 수를 구할 때 특히 유용한 전략이다.

8) 단순화하기

수가 너무 크거나 작아서 다루기 힘들 때, 혹은 변수가 많은 때, 그 수를 친숙한 자연수로 바꾸거나 변수의 개수를 줄여서 문제를 풀고 그 방법이나 결과를 원래의 문제를 푸는 데 적용하는 전략이다.

라. 문제 제기 활동

문제 제기와 문제해결은 매우 밀접한 관계를 맺고 있어서 서로 분리될 수 없다. 간단한 문제가 아닐 때, 문제를 해결하는 사람은 좀 더 쉬운 방법을 해결하기 위하여 주어진 문제를 재구성하는 문제 제기의 형식에 참여하게 된다.

Silver는 문제제기가 교육과정과 교수의 관심사로 떠오르는 이유는 문제제기가 학생들을 더욱 훌륭한 문제 해결자가 되도록 도울 수 있는 잠재성을 가지고 있기 때문이라고 했다.

NCTM은 “학교수학을 위한 교육과정과 평가의 기준”과 “수학 교수를 위한 전문성 기준”에 문제제기와 문제해결의 중요성을 교육과정상의 목표와 관련지어 이야기하고 있다. 또한 최근에는 문제제기의 교수-학습이 학생의 문제해결 능력을 향상시킨다는 연구 결과들이 잇달아 보고 되고 있는데 그 예로 일본에서는 문제제기가 학생들의 문제에 대한 완벽한 이해를 이끌어냄으로써 문제해결력을 향상시킨다고 보고하고 있으며 미국에서는 문제제기가 포함된 교수-학습의 경험에 있는 학생이 그렇지 못한 학생보다 실제로 많은 새롭고 흥미로우며 도전할만한 문제들을 만들어 낼 수 있었다고 보고하고 있다.

문제제기는 특별한 문제를 해결한 후에 주어진 문제의 조건을 조사할 때 일어날 수도 있다. 이와 같은 문제제기의 종류에는 Polya가 말한 문제해결의 ‘반성’단계와 관련되고 Brown과 Walter가 제시한 ‘만약-하면?’과 ‘만약-가 아니라면?’의 과정과 연결된다.

문제제기는 두 가지 다른 방식으로 문제해결 활동과 밀접하게 관련을 맺고 있는데 그 하나는 바로 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 그 과정을 재구성하여야만 그 문제를 해결할 수 있다는 데 있다. 두 번째는 원래의

문제와는 다른 새로운 문제를 만들고 그것을 분석하지 않는 한, 문제를 해결해 놓고서도 그것의 의미를 충분히 이해하지 못할 때가 있다는 것이다. 즉, 문제를 해결하려고 계획을 세우며 시도하는 과정에서 문제를 제기하여 원래의 문제를 더 잘 이해할 수도 있고, 그 문제에 대한 새로운 이해를 위하여 거꾸로 되돌아가서 작업 중인 문제와 관련된 새로운 문제를 만들어 낼 수도 있다. 이렇게 하여 학생들에게 문제 해결의 기능만을 습득시키기보다는 문제해결 상황을 조성해주고 문제해결 태도를 길러주어야 한다.

Polya의 경우 문제해결 단계와 문제제기와는 관계를 다음과 같이 말하고 있다. '계획 작성'단계에서 사용될 수 있는 것으로 이 단계는 문제의 조건을 변경하여 그 결과가 어떻게 되었는지를 살펴보는 과정으로써 원 문제의 풀이에 한 단서를 얻을 수 있는 것으로 '조건변경에 의한 문제제기 방법'이 발생하는 과정이라 할 수 있다고 하였다. 또한 '반성'단계에서는 원 문제 풀이 후 결과에 의한 반성으로써 '거꾸로 풀기', '역행적 추론'과 같은 '결과변경에 의한 문제제기 방법'이 발생하는 과정이라 할 수 있다 하였다.

즉, 원 문제를 해결하는 단계별 과정에서 살펴 볼 수 있으며 원 문제 해결 후 '결과 변경'이나 '조건 변경'과 같은 문제의 재구성에 의해 문제 해결력을 향상시킬 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 대상

본 연구의 대상은 제주시 특정 중학교 3학년 학생 52명을 대상으로 하였다. 제주시 읍·면지역 중학교로 인근에 입시학원도 있지 않은 농촌지역 학교로서 학습에 대한 열의가 제주시 중심학교에 비하여 다소 부족함이 있는 학생들로 구성되어 있다. 부모의 직업은 농업(70%), 상업, 자영업, 회사원, 기타이며 대부분의 학생들은 가정이 경제적으로 빈곤하여 학원 과외를 받는 학생이 소수에 불과하다.

2. 기간

2007년 10월 ~ 2008년 5월

3. 연구 절차

[표3] 연구 일정

단 계	내 용	기 간
연구 계획	논문 주제 선정 선행 연구 및 관련 문헌 연구 연구 계획서 작성	2007. 1 ~ 2007. 4
연구 실행	기초 조사 문헌 연구 및 연구 계획 수립 사고 오류 원인 요소 추출 학습지 제작	2007. 5 ~ 2007. 12

연구 실행	흥미도 조사 단원별 형성평가를 통한 오류 분석 오류 분석을 통한 오류 모델 설정 및 오류 교정 지도 계획 오류 교정을 위한 수업 실시 오류 교정 결과 분석	2007. 5 ~ 2008. 4
검증 평가 및 보고	검증 사후 흥미도 조사 연구 보고서 작성 및 결과 반성	2008. 5 2008. 5 2008. 3 ~ 2008. 5

4. 측정 도구

가. 관심도 검사지

1) 관심도 검사지의 문항 구성

본 연구에서 사용된 관심도 검사지의 문항 구성은 정효정(2003)의 석사논문과 오춘영(2004)의 학술연구 자료에 실린 검사지를 참고하였는데, 관심도는 4개 영역, 즉 수학의 흥미, 태도, 자아개념, 학습도 등 11개 문항으로 구성하였다.

2) 검사지 문항의 척도

설문지는 수학에 대한 흥미, 태도, 자아개념, 학습도 등 4개 영역 총 11개 문항으로 구성하였고, 각 문항에 대한 반응은 매우 그렇다, 종종 그렇다, 보통이다, 별로 그렇지 않다, 전혀 그렇지 않다.의 5단계를 설정하여 조사하였다.

3). 자료 처리

관심도에 관한 자료처리는 사전-사후 동일한 검사를 실시하여 변화 정도를 분석하였다.

나. 2학년 선수 학습 진단용 전국학력평가지

다. 중단원별 수준별 평가지

제주특별자치도교육청에서 주관하여 제작 보급한 수준별 학습지를 참고하여 기본, 발전, 심화를 3 : 5 : 2의 비율로 구성하여 제작한다.

라. 오류 분석 및 지도 후 「수와 연산」 평가지

연구 영역(수와 연산)과 비교 영역(문자와 식)으로 구성된 평가를 제작하여 투입하고 그 결과를 비교 분석한다.

5. 연구방법

첫째, 수와 연산 영역에서 개념 정리 요소를 추출하여 요소별, 단계별 문항을 제작한다. 오류의 원인을 쉽고 좀 더 정확하게 찾고자 학생들이 풀 문제 풀이과정을 모두 알아 볼 수 있도록 가능한 한 주관식 문항으로 제작하여 투입한다.

둘째, 중단원 마무리 단계에서 수준별 평가를 활용하여 문항별 학생들의 오답률을 측정, 오답률이 30%이상인 문항에 대하여 오류 요인을 분석한다. 본 연구에서는 이스라엘의 수학자 Nitsa Movshovitz-Hadar의 오류 모델과 김옥경이 제시한 오류 유형을 참고로 하여 이해과정에서의 오류, 부적절하게 사용된 정리나 정의, 의도하지 않은 해, 풀이과정의 생략, 기술적 오류, 오류의 애매 모호성으로 오류 유형을 분석하며 오류 유형에 따른 교정 방법을 연구하고 제시한다.

가. 이해과정에서의 오류-발문과 권고를 통한 문제의 분해 활동

나. 부적절하게 사용된 정리나 정의-발문과 권고를 통한 문제의 분해 활동

다. 의도하지 않은 해-실험 및 탐구활동과 문제제기 활동

라. 풀이과정의 생략-반복적인 연습과 단계별 문제풀이

마. 기술적 오류-실험 및 탐구 활동과 문제제기 활동

바. 오류의 애매모호성-문제해결의 마지막 단계에서의 반성활동

셋째, 개인별 성취수준을 기본, 발전 심화 3단계로 분석하여 오류 지도시 활용한다.

넷째, 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류 형태를 분석하여 수정 학습을 실시하고 개별적으로 수준별 학습지를 투입한다.

다섯째, 전체적, 개별적으로 오류 지도가 이루어진 후 「수와 연산」 전 영역에서 오답률이 30%이상인 문항에 대하여 재평가하여 오류 지도에 대하여 검증한다.

여섯째, 오류 분석 및 지도 과정에서 학생들의 수학에 대한 관심도의 변화를 측정하여 교사의 학생에 대한 관심도가 학생들에게 어떠한 변화를 주는지 알아본다.



IV. 연구의 실행

1. 수와 연산영역에서 개념 정리 내용 추출 및 지도 계획

[표4] 수와 연산 지도내용 및 계획

영역	대단원	중단원	개념 정리 내용	용어와 기호	차시	
수와 연산	무리수와 실수	제곱근과 실수	제곱근의 뜻과 성질	제곱근, 근호	1-3	
			제곱근의 대소관계			
			제곱근의 근사값		4-8	
		무리수와 실수, 실수와 수직선	무리수, 실수			
		실수의 대소 관계				
		두 실수 사이의 실수				
				중단원 형성평가		9
		근호를 포함한 식의 계산	근호를 포함한 식의 곱셈	분모의 유리화	10-11	
			근호를 포함한 식의 나눗셈			
			분모의 유리화		12-13	
			근호를 포함한 식의 덧셈			
			근호를 포함한 식의 덧셈			
					중단원 형성평가	14
					오류 교정 수업	15

2. 수학에 대한 흥미도 조사

2학년 과정에서 수학에 관한 흥미도를 알아보기 위하여 3월초 실시하였다.

3. 선수학습(2학년) 진단평가 실시

2008년 3월 6일 전국단위로 실시한 전국기본학력평가 결과를 선수학습 진단용으로 활용하고자 한다.

4. 중단원별 형성평가 학습지 제시

중단원별 보충, 기본, 심화 형태의 3단계 수준의 형성평가 학습지를 제시하고 그 결과를 오류 진단 및 개인별 성취도로 활용한다.

5. 오류 내용 분석

오류 분석 방법은 오류의 원인을 쉽고 좀 더 정확하게 찾고자 대부분의 문항은 주관식 문항으로 설정하여 학생들의 문제 풀이 과정을 모두 알아볼 수 있도록 풀이과정을 꼭 기재하도록 한다.

또한 학생들이 주어진 문제에 답을 하는 과정에서 글자가 흐릿하거나 알아보기 애매하여 정확한 식별을 할 수 없는 경우 오류 유형을 분석하는 데 어려움이 있어 오류의 애매 모호성이라는 종류로 분석하였다.

학생들이 어떤 문항에 대해 옳은 답을 제시했지만 풀이과정이 없는 답이나 전혀 어떠한 답도 제시하지 않은 문항은 풀이과정의 생략이라는 종류로 분류하였다.

오답률이 30%이상인 문항에 대하여 전체 학습을 통하여 교정 수업을 실시하였다.

6. 개별 지도

학생들의 성취도를 개인별 카드를 작성하여 기록하고 수준별 과제 제시 및 반복 학습을 통한 오류를 지도한다.

7. 오류 지도 결과 분석

수와 연산 그리고 문자와 식에 관련된 평가지를 작성하여 오류 지도를 거친 수와 연산의 정답률과 오류 지도를 실시하지 않은 문자와 식의 문항 사이의 관계를 정답률, 오류 30%이상인 문항수를 비교하며 학생들의 변화정도를 진단하고 수업방법에 대한 효과성을 검증한다.

8. 사후 흥미도 조사

사후 학생들의 수학에 대한 흥미도를 알아보고 수업의 적합성을 검증한다.



V. 연구의 결과 및 분석

1. 학생들의 수학에 대한 흥미도 조사

연구 실행에 들어가기 전 지난 2학년 1년 동안 수학에 관한 흥미도, 수업시간에 학생 본인의 자세등과 관련된 설문조사를 실시하였다.

[표5] 관심도 조사 설문지(3월 7일 실시)

항 목	문항수	문항내용
관심도	흥 미	1) 나는 수학 공부 시간이 즐겁다. 2) 나는 수학 시간에 선생님의 설명을 잘 듣는다. 3) 나는 수학 참고서나 문제집의 문제들을 종종 풀어 본다.
	태 도	4) 나는 수학 과제물을 꼭 한다. 5) 나는 수학시간에 모르는 것이 있으면 반드시 질문 한다. 6) 나는 수학교과에 대하여 평소에 연습을 한다. 7) 나는 수학교과에 대하여 평소에 복습을 한다.
	자아개념	8) 나는 수학 시간에 수업한 내용을 어느 정도 이해 하고 있다. 9) 나는 수학에 대한 기초학력이 부족하여 수업에 흥미를 느끼지 못한다. 10) 나는 수업 내용이 너무 쉬워 흥미를 느끼지 못한다.
	학 습 에 대한 열 의	11) 나는 내 수준에 맞는 수업을 받는다면 열심히 할 것이다.

각 문항별 학생들의 설문 결과는 아래 표와 같다.

[표6] 사전 관심도 조사 분석표

문항	질문	매우 그렇다	종종 그렇다.	보통이 다.	별로 그렇지 않다.	전혀 그렇지 않다.	계
1	나는 수학 공부 시간이 즐겁다.	4	10	18	8	5	45
2	나는 수학 시간에 선생님의 설명을 잘 듣는다.	7	14	15	9	2	47
3	나는 수학 참고서나 문제집의 문제들을 종종 풀어본다.	3	16	10	16	1	46
4	나는 수학 과제물을 꼭 한다.	7	10	15	9	1	42
5	나는 수학시간에 모르는 것이 있으면 반드시 질문한다.	4	6	7	18	10	45
6	나는 수학교과에 대하여 평소에 연습을 한다.	4	8	7	15	12	46
7	나는 수학교과에 대하여 평소에 복습을 한다.	4	4	13	14	10	45
8	나는 수학 시간에 수업한 내용을 어느 정도 이해하고 있다.	6	14	16	9	1	46
9	나는 수학에 대한 기초학력이 부족하여 수업에 흥미를 느끼지 못한다.	8	8	5	12	13	46
10	나는 수업 내용이 너무 쉬워 흥미를 느끼지 못한다.	1	2	3	19	21	46
11	나는 내 수준에 맞는 수업을 받는다면 열심히 할 것이다.	20	8	14	3	1	46

수학에 대한 흥미를 묻는 문항1, 2, 3에서 약 35%정도의 학생들이 수학에 흥미가 없는 것으로 나타났으며 수업 시간의 태도, 과제 학습등을 묻는 질문에서는 수업시간에 모르는 것이 있으면 질문을 한다는 학생이 10명, 약 20%에 불과하였다. 또한 수준에 맞는 수업인 경우 적극 환영하는 학생은 28명으로 60%, 기초학력 부족으로 수업에 흥미를 느끼지 못하는 학생은 16명으로 34.8%에 이르며 이는 오류 진단이 정확히 이루어지면 학습 상황이 현저히 나아질 수 있다는 가능

성을 보인다 하겠다. 평소 예·복습, 과제물 해결을 바르게 하는 학생은 약27%로 수학교과에 대한 적극적인 태도는 매우 부족한 상태임을 알 수 있다.

2. 2008년 국가수준 교과학습 진단평가 결과

2008년 3월 6일 전국적으로 시행된 국가수준 교과학습 진단평가는 2학년 선수 학습 상황을 진단하는 문항으로 난이도는 하수준의 문제가 많이 출제되었다.

[표7] 교과학습 진단 평가 분석표

계급	도수
20이상 ~ 30미만	3
30이상 ~ 40미만	3
40이상 ~ 50미만	4
50이상 ~ 60미만	7
60이상 ~ 70미만	12
70이상 ~ 80미만	3
80이상 ~ 90미만	7
90이상 ~ 100미만	13
계	52

평균 70.6으로서 60점미만 학생 17명(32.7%)은 3학년 교과를 학습하기에 어려움이 많다고 하겠다.

3. 중단원별 형성평가 실시

가. I-1. 무리수와 실수

『무리수와 실수』

중단원 형성평가 3학년 반 이름

● 기본 학습 문제

1. 16의 제근근을 구하면?

2. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(\sqrt{3})^2=3$ ② $(-\sqrt{3})^2=3$

③ $-(-\sqrt{3})^2=3$ ④ $\sqrt{3^2}=3$

⑤ $\sqrt{(-3)^2}=3$

3. 다음 보기 중 근호를 사용하지 않고 제곱근을 나타낼 수 있는 수는 모두 구하여라.

[보기]

$2, 4, 10, \frac{4}{25}, 0.1, 0.64$

4. 다음을 계산하여라.

$\sqrt{3^2} + \sqrt{(-2)^2} - (-\sqrt{5})^2$

5. 다음 중 아래 그림의 어두운 부분

에 속하지 않는 것은?

① $\sqrt{3}$

② $-\sqrt{2}$

③ $\sqrt{18}$

④ π

⑤ $\sqrt{\frac{1}{4}}$



6. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

① $\sqrt{3} > \sqrt{5}$

② $2 < \sqrt{3}$

③ $-\sqrt{5} < -\sqrt{6}$

④ $-2 < -\sqrt{3}$

⑤ $0.1 = \sqrt{0.1}$

7. 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수 전체의 집합을 차례로

N, Z, Q, I, R 라고 할 때, 다음 보기 중에서 옳지 않은 것은?

① $Q \cup I = R$ ② $I \subset R$

③ $Q \cap I = N$ ④ $N \subset Z \subset Q$

⑤ $Q^c = I$

발전 학습 문제

8. 16의 양의 제곱근을 a , $\sqrt{49}$ 의 음의 제곱근을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

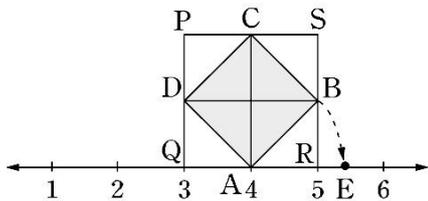
9. 다음 중 참인 것은?

- ① 16의 제곱근은 4이다.
- ② $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.
- ③ $\sqrt{4}$ 의 제곱근은 2이다.
- ④ $\sqrt{9} = \pm 3$ 이다.
- ⑤ $\sqrt{(-6)^2} = -6$ 이다.

10. 다음 수를 작은 것부터 차례로 나열하여라.

$\sqrt{5}, 2, 4, \sqrt{10}, \sqrt{14}$

11. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 PQRS가 있다. \overline{AB} 를 회전하여 수직선과 만나는 점을 E라고 할 때, 점 E의 좌표를 구하여라



12. 다음 중 두 수의 대소 관계가 옳은 것은?

- ① $\sqrt{2}+1 > \sqrt{3}+1$
- ② $\sqrt{8}-1 > 2$
- ③ $\sqrt{5}-2 < \sqrt{3}-2$
- ④ $\sqrt{3}+\sqrt{5} > 2+\sqrt{5}$
- ⑤ $1-\sqrt{2} > 1-\sqrt{3}$

13. 다음 중 $\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{10}$ 사이에 있는 무리수가 아닌 것은?

- ① $\sqrt{5}$
- ② $\sqrt{3}+1$
- ③ $\sqrt{10}-3$
- ④ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{10}}{2}$
- ⑤ $\sqrt{10}-0.5$

심화 학습 문제

14. $3 \leq \sqrt{x} < 4$ 를 만족하는 모든 자연수 x 의 개수를 구하여라.

15. $\sqrt{240x}$ 가 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 x 를 구하여라.

16. $0 < x < 2$ 일 때, $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$ 의 값을 구하여라.

17. $4+\sqrt{3}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $a+5b$ 의 값을 구하여라.

나. 중단원(I-1) 형성평가 결과 분석(총 인원 50명)

[표8] 중단원(I-1) 형성평가 문항별 정·오답률

문항 번호	정답인원수 (백분율)	오답인원수 (백분율)	무응답인원수 (백분율)
1	47 (94.0%)	3 (6.0%)	
2	39 (78.0%)	10 (20.0%)	1 (2.0%)
3	38 (76.0%)	12 (24.0%)	
4	39 (78.0%)	10 (20.0%)	1 (2.0%)
5	33 (66.0%)	15 (30.0%)	2 (4.0%)
6	37 (74.0%)	13 (26.0%)	
7	30 (60.0%)	18 (36.0%)	2 (4.0%)
8	7 (14.0%)	40 (80.0%)	3 (6.0%)
9	15 (30.0%)	33 (66.0%)	2 (4.0%)
10	34 (68.0%)	15 (30.0%)	1 (2.0%)
11	21 (42.0%)	26 (52.0%)	3 (6.0%)
12	24 (48.0%)	23 (46.0%)	3 (6.0%)
13	29 (58.0%)	19 (38.0%)	2 (4.0%)
14	32 (64.0%)	16 (32.0%)	2 (4.0%)
15	30 (60.0%)	17 (34.0%)	3 (6.0%)
16	14 (28.0%)	31 (62.0%)	5 (10.0%)
17	7 (14.0%)	39 (78.0%)	4 (8.0%)

다. 오류 30%이상인 문항에 대하여 오류 분석 및 해결 방안

[표9] 오류 30%이상인 문항에 대하여 오류 분석

문항 오류의 유형	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	계	비율
이해과정에서의 오류	11	10	8	18	2	18	4	6	10	11	13	18	129	39.8
부적절하게 사용된 정리나 정의	2	7		3	2		1	7					22	6.8
의도하지 않은 해		1		2	3		3		4	4	5	7	29	9.0
풀이과정의 생략	2		27	6		2	6		1	1	3	3	51	15.7
기술적 오류			5	4	8	6	9	6	1	1	10	11	61	18.8
오류의 애매모호성	2	2	3	2	1	3	3	2	2	3	5	4	32	9.9
계	17	20	43	35	16	29	26	21	18	20	36	43	324	100

오류 30%이상인 문항은 70.6%이고 이해과정에서 가장 많은 오류를 범하고 있는 것으로 나타났으며 이것은 새로운 용어(무리수, 제곱근 등)의 도입이 가장 큰 요인으로 여겨진다.

문항5는 유리수와 무리수를 구분해 낼 수 있는 지를 알아보는 문항으로 π 가 무리수임을 알지 못하는 학생이 10명이었으며 실수에서 유리수의 여집합이 무리수의 집합이라는 사실도 강조하여야 한다.

문항7은 수의 포함관계로 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수의 포함관계를 벤다이어그램을 이용하여 정확하게 이해하도록 해야 한다.

문항8은 발전문제에 해당하지만 86%의 오답률로 대부분의 학생이 풀이과정의 생략에서 오류가 발생하였다.

아래의 경우 $b = -7$ 이라 답한 것으로 미루어 제곱근의 개념은 무엇인지 알고 있는 학생이라 생각할 수 있으며, 하지만 계산 과정을 거치면서 근호를 먼저 풀여 $\sqrt{49}$ 는 7이 되고 7에 대한 제곱근을 구해야 하는 과정에서 실수를 범하였다고 볼 수 있다. 한번에 사고하려는 습관을 버리고, 순차적인 계산을 할 수 있도록 도와야 할 것이다.

【8】 16의 양의 제곱근을 a , $\sqrt{49}$ 의 음의 제곱근을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned}
 a &= 4 & a+b & = 4-7 & & = -3 \\
 b &= -7 & & & &
 \end{aligned}$$

【9】 다음 중 참인 것은? 4

- ① 16의 제곱근은 4이다.
- ② $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.
- ③ $\sqrt{4}$ 의 제곱근은 ± 2 이다.
- ④ $\sqrt{9} = \pm 3$ 이다.
- ⑤ $\sqrt{(-6)^2} = -6$ 이다.

문항9는 제곱근의 정의를 제대로 알고 있는지에 관한 문항으로 ①번은 거짓임을 알고 있으면서 ②번의 $(-3)^2=9$ 를 생각하지 않고 간과한 것이다. 또한 제곱근 $9(\sqrt{9})$ 와 9의 제곱근의 정확한 개념 정리가 필요하다.

【10】 다음 수를 작은 것부터 차례로 나열하여라,

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{5}, 2, 4, \sqrt{10}, \sqrt{14} \\
 &2, \sqrt{5}, \sqrt{10}, 4, \sqrt{14}
 \end{aligned}$$

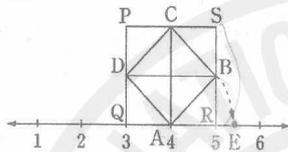
위의 경우 $\sqrt{14}$ 를 7로 계산하므로써 오류를 범하였다. $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{10}$ 의 값을 알고 있는 것으로 보아 무리수의 의미는 알고 있는 것으로 보이며 일반적인 제곱근 값을 계산하는 과정에서 오류가 발생하였다고 볼 수 있다. $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$ 임을 예시하며 $\sqrt{14}$ 의 값을 예상할 수 있도록 지도한다.

문항11은 학생들이 다양한 답들을 제시하였는데, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 라고 대답한 학생들은 그림 자체를 이해하지 못하고 응답한 학생이라 할 수 있으며, 큰 정사각형의

넓이로부터 작은 정사각형의 넓이를 알게끔 한다. 그 다음 작은 정사각형의 한 변의 길이를 유추해 낼 수 있도록 도와야 할 것이다.

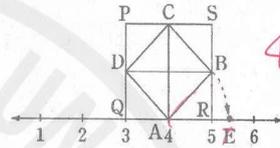
아래 그림에서 점 E의 좌표가 4보다 $\sqrt{2}$ 만큼 큰 수인데 $4\sqrt{2}$ 라고 풀이한 경우, 그리고 $\sqrt{2}$ 라고 \overline{AB} 의 거리를 나타낸 경우로 좌표의 정확한 개념에서 오류를 범하고 있다.

【11】 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 PQRS가 있다. \overline{AB} 를 회전하여 수직선과 만나는 점을 E라고 할 때, 점 E의 좌표를 구하여라



$\sqrt{2}$

【11】 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 PQRS가 있다. \overline{AB} 를 회전하여 수직선과 만나는 점을 E라고 할 때, 점 E의 좌표를 구하여라



45.

점 A의 시작점을 제대로 파악하여 시작점의 위치가 영향을 미친다는 것을 다시 주지시켜야 할 것이다.

【14】 $3 \leq \sqrt{x} < 4$ 를 만족하는 모든 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$3 \leq \sqrt{x} < 4$

$\sqrt{9} \leq \sqrt{x} < \sqrt{16}$

$\rightarrow 10, 11, 12, 13, 14, 15$

6개

부등식의 풀이에서 계산상의 오류를 범한 경우로 등호의 경우 9 가 속하는 것을 알고 있으면서도 틀리는 수가 있음을 알 수 있다.

【16】 $0 < x < 2$ 일 때,

$\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$ 의 값을 구하여라.

$= -x-2 + 2-x$

$= -2x$ & $2x$

$-x-2+2-x$

$= 2x$

문항16은 $0 < x < 2$ 의 범위에서 $x-2 < 0$ 와 $2-x > 0$ 는 알고 있으나 $\sqrt{a^2}$ 에 관한 성질을 정확히 이해하지 못하여 오류가 발생하였다.

$a > 0$ 이면 $\sqrt{a^2}$ 는 a 이고 $a < 0$ 이면 $\sqrt{a^2}$ 은 $-a$ 이다. $\sqrt{(x-2)^2}$ 에서 a 에 해당하는 것이 $x-2$ 라는 것을 정확히 인식시키고 $x-2$ 가 음수이므로 $-a$ 는 $-(x-2)$ 임을 인식시킨다.

따라서 $\sqrt{(x-2)^2} = -(x-2)$, $\sqrt{(2-x)^2} = 2-x$ 임을 강조한다.

【17】 $4 + \sqrt{3}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $a + 5b$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 1 - \sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} \\
 \hline
 5 \times 1 - \sqrt{3} \\
 5 - \sqrt{3} \\
 \hline
 \boxed{10 - \sqrt{3}}
 \end{array}$$

위의 경우 소수부분을 0.732라고 풀이한 학생들도 많았으며 위의 경우는 $1 - \sqrt{3}$ 이라고 풀이하여 전혀 모르는 경우는 아닌 것 같으나 $4 + \sqrt{3}$ 의 값을 예상하여 볼 때, $5.732 \times \dots$ 이므로 소수부분은 $b = 4 + \sqrt{3} - 5$, $b = \sqrt{3} - 1$ 이다. $5b$ 의 경우 분배법칙의 활용도 강조해야 한다.

라. 중단원 I-2. 형성평가

『근호를 포함한 식의 계산』

중단원 형성평가 3학년 반 이름

● 기본 학습 문제

1. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ ② $\sqrt{ab^2} = ab$
 ③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ④ $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{a}$
 ⑤ $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$

2. 다음 중 계산이 옳은 것은?

- ① $\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ ② $-3\sqrt{2} = \sqrt{18}$
 ③ $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 9$ ④ $\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{7}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3. 다음 수의 대소 비교 중 옳지 않은 것은?

- ① $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5} < 2\sqrt{2}$
 ③ $-2\sqrt{2} < -2\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$
 ⑤ $2\sqrt{7} > 5$

4. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{A}$, $3\sqrt{5} = \sqrt{B}$ 일 때, $A+B$ 의 값을 구하여라.

5. $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ 를 간단히 하면?

6. $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 을 계산하면?

7. $\sqrt{45} \div \sqrt{3} \div \sqrt{5}$ 를 계산하면?

● 발전 학습 문제

8. $6\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{45} - 4\sqrt{5} = a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ 0
 ④ 2 ⑤ 3

9. $\sqrt{32} - \sqrt{24} + \sqrt{98} - \sqrt{54}$ 를 계산하여라.

10. $-\sqrt{8}-\sqrt{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{24})$ 를 계산하면?

11. $\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$ 라 할 때, $\sqrt{54}$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

- ① $2ab$ ② $3ab$
③ $6a$ ④ $6b$
⑤ $9ab$

12. $2\sqrt{50}-\frac{12}{\sqrt{8}}=A\sqrt{2}$ 일 때, A 의 값은?

- ① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

13. $\sqrt{75}-\frac{9}{\sqrt{3}}$ 를 간단히 하여라.

14. $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{30}\approx 5.477$ 일 때, $\sqrt{0.3}$ 의 근사값을 구하면?

15. $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{20}\approx 4.472$ 일 때, $\sqrt{2000}$ 의 근사값을 구하여라.

16. $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$ 일 때, $\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{3}}$ 의 근사값을 구하여라.

● 심화 학습 문제

17. $\sqrt{60n}$ 이 정수가 되도록 하는 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

18. $\sqrt{3}(5\sqrt{3}-6)-a(1-\sqrt{3})$ 이 유리수가 되기 위한 유리수 a 의 값을 구하여라.

마. 중단원(I-2) 형성평가 문항별 정·오답률 분석(총인원 50명)

[표10] 중단원(I-2) 형성평가 문항별 정·오답률 분석

문항 번호	정답인원수 (백분율)	오답인원수 (백분율)	무응답인원수 (백분율)
1	19 (38.0%)	28 (56.0%)	3 (6.0%)
2	37 (74.0%)	12 (24.0%)	1 (2.0%)
3	30 (60.0%)	18 (36.0%)	2 (4.0%)
4	25 (50.0%)	23 (46.0%)	2 (4.0%)
5	43 (86.0%)	6 (12.0%)	1 (2.0%)
6	45 (90.0%)	5 (10.0%)	
7	44 (88.0%)	5 (10.0%)	1 (2.0%)
8	39 (78.0%)	11 (22.0%)	
9	28 (56.0%)	19 (38.0%)	3 (6.0%)
10	27 (54.0%)	20 (40.0%)	3 (6.0%)
11	30 (60.0%)	20 (40.0%)	
12	35 (70.0%)	15 (30.0%)	
13	32 (64.0%)	17 (32.0%)	1 (2.0%)
14	25 (50.0%)	21 (42.0%)	4 (8.0%)
15	25 (50.0%)	22 (44.0%)	3 (6.0%)
16	23 (46.0%)	23 (46.0%)	4 (8.0%)
17	22 (44.0%)	26 (52.0%)	2 (4.0%)
18	14 (28.0%)	31 (62.0%)	5 (10.0%)

바. 오류 분석 및 해결 방안

[표11] 오류 30%이상인 문항에 대하여 오류 분석

오류의 유형 \ 문항	문항												계	비율
	1	3	4	9	10	11	13	14	15	16	17	18		
이해과정에서의 오류	11		13	3	3	5		3	2	5	5	12	62	20.7
부적절하게 사용된 정리나 정의	6	11		10	11	4	3	2	2	3	3	6	61	20.3
의도하지 않은 해			6	1				3	2	2	3	4	21	7.0
풀이과정의 생략	3	6	4	5	5	2	5	2	4	5	5	5	51	17.0
기술적 오류	8	1				8	8	11	12	8	10	4	70	23.3
오류의 애매모호성	3	2	2	3	4	1	2	4	3	4	2	5	35	11.7
계	31	20	25	22	23	20	18	25	25	27	28	36	300	100

식의 계산이므로 기술적 오류, 이해과정에서의 오류, 부적절하게 사용된 정리나 정의 순서로 오류가 나타났으며 오답률 30%이상인 문항 비율은 66.7%이었다.

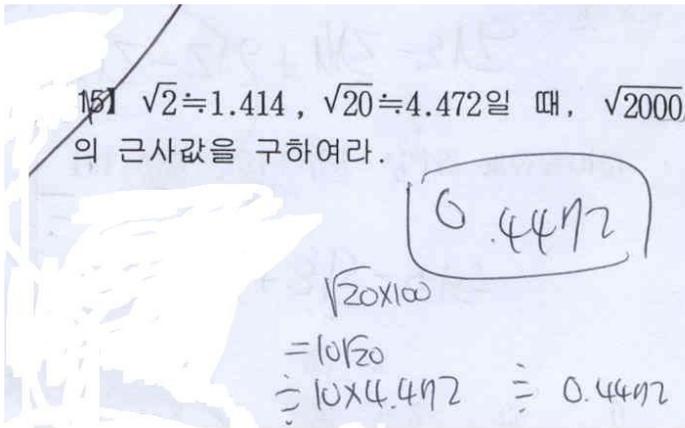
[10] $-\sqrt{8}-\sqrt{3}(3\sqrt{6}-\sqrt{24})$ 를 계산하면?

① $-5\sqrt{2}$ ② $-3\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$
 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

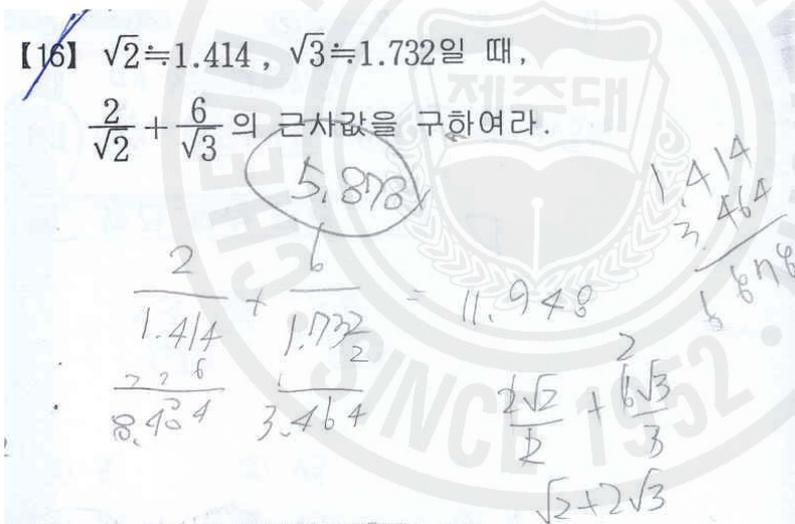
$-\sqrt{8}-\sqrt{3}(3\sqrt{6}-2\sqrt{6})$ $-2\sqrt{2}-\sqrt{3}(3\sqrt{6}-2\sqrt{6})$
 $=-\sqrt{8}-\sqrt{3}(\sqrt{6})$ $-2\sqrt{2}-\sqrt{3}(\sqrt{6})$
 $=-\sqrt{48}-\sqrt{18}$ $=-4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ $-2\sqrt{2}-\sqrt{18}$

위의 경우 $\sqrt{24}$ 를 근호 안의 수를 계산하여 $2\sqrt{6}$ 으로 근호 밖으로 빼낸 것으로 보아 무리수의 개념에 대하여 알고 있는 학생이다.

$3\sqrt{6}-\sqrt{24}$ 는 $3\sqrt{6}-2\sqrt{6}$ 으로 $\sqrt{6}$, 정확하게 계산을 하였으나 분배법칙을 잘못 이용하여 계산 결과가 옳지 못하였다. 두 번째 계산과정에서는 바르게 계산을 하고 있으나 끝까지 마무리를 하지 못하고 있다. 계산상의 잘못된 과정으로 오류가 발생하였다.



문항15의 무리수의 근사값의 계산에서 $\sqrt{2000}$ 을 $\sqrt{20 \times 100}$ 으로 생각하여 $10\sqrt{20}$ 으로 정확하게 풀이하고 있으나 기본적인 계산 능력(소수의 곱셈)에서 오류를 범하고 있다.



문항16에서는 학생들이 근사값을 구할 때 항상 분모 유리화가 우선되어야 함을 인식하도록 하여야 한다. 분모 유리화가 선행되지 않았을 때, 계산과정은 매우 복잡하고 또한 그 값도 정확하지 않다는 것을 정확히 인식시켜야 할 것이다.

【18】 $\sqrt{3}(5\sqrt{3}-6) - a(1-\sqrt{3})$ 이 유리수가 되기 위한 유리수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} & 15 - 6\sqrt{3} \\ & 5\sqrt{9} - 6\sqrt{3} - a + \sqrt{3}a \\ & = \boxed{12} \end{aligned}$$

위의 경우 무리수의 사칙계산은 가능한 것으로 보이나 계산 과정을 생략하면서 오류가 발생하였으며 문항이 요구하는 내용을 파악하지 못하고 있다. a, b 가 유리수일 때 $a + b\sqrt{3}$ 이 유리수이면 b 는 반드시 0이어야 함을 묻는 문제였다.

사. 수와 연산 오류 분석에 따른 교정 수업 실시

2회에 실시한 중단원 형성평가(총35문항)에서 오답률 30%이상인 24문항에 대하여 수의 연산(I.무리수와 실수) 마지막 차시에서 교정 수업을 실시한다.

[표12] 교정 수업 과정안

단 계	내용	비고
개념 정리	무리수, 유리수, 실수, 제곱근, 무리수의 덧셈과 뺄셈, 무리수의 곱셈과 나눗셈	
문제 해결	이해과정에서의 오류-발문과 권고를 통한 문제의 분해 활동 부적절하게 사용된 정리나 정의-발문과 권고를 통한 문제의 분해 활동 의도하지 않은 해-실험 및 탐구활동과 문제제기 활동 풀이과정의 생략-반복적인 연습과 단계별 문제풀이 기술적 오류-실험 및 탐구 활동과 문제제기 활동 오류의 애매모호성-문제해결의 마지막 단계에서의 반성활동	오답률 30%이상인 24문항에 대한 문제 해결
정답 확인	학생들 각자 정답 확인 및 풀이 과정 수정	
과제 제시	개인별, 수준별 과제 제시	

4. 학생 개인별 오류 지도

가. 학생 개인별 카드를 작성하여 기본, 발전, 심화문제의 성취도를 기록하고 수준별 과제를 제시하여 과제 해결과정을 누가 기록하였다.

[표13] 개인별 누가기록

	I-1. 제곱근과 실수							I-2. 근호를 포함한 식의 계산						
	성취도				과제 해결			성취도				과제 해결		
	()안의 수는 문항수				누가 기록			()안의 수는 문항수				누가 기록		
	기 본 (7)	발 전 (6)	심 화 (4)	과제 제시 수준	기본	발전	심화	기 본 (7)	발 전 (9)	심 화 (2)	과제 제시 수준	기 본	발 전	심 화
3-1-01	4	3	0	기본	○	×○		4	3	0	기본	○	×○	
3-1-02	6	5	1	발전	△	○	×○	7	8	0	심화	△	△	
3-1-03	7	3	2	발전	△	×○	○	6	2	1	발전		○	×○
3-1-04	3	2	0	기본	×○	○		3	2	0	기본	○	××○	
3-1-04	6	6	2	심화	△	△		6	4	0	발전	△	△	
3-1-05	7	2	1	발전	△			7	8	2	△	△	△	
3-2-25	4	2	0	기본	○	××○	×	5	5	2	발전	△	○	×○
3-2-26	6	4	1	발전	△	○		6	5	1	발전	△	○	○

개인별 문제 해결능력에 적합한 기본, 발전, 심화학습지 즉, 3단계로 제시하여 수시로 개인 면담을 통하여 해결 정도를 파악하고, 다음 단계로의 해결능력을 향상시켜나갔다.

면담 내용 예시<심화학습지 풀이 과정>

교사: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2 - \sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}}$ 을 간단히 하는 과정에서 $(\sqrt{3}-2) - (2\sqrt{3}-4)$ 라고 했는데 설명을 해 보렴.

학생: $\sqrt{a^2}$ 은 a 이잖아요.

교사: 그래. $\sqrt{5^2}$ 은 얼마지?

학생: 5이죠.

교사: 그럼, $\sqrt{(-5)^2}$ 은 얼마겠니?

학생: 그것도 5이죠.

교사: 그렇지. 그럼 우리 한 번 생각해 보자. $\sqrt{5^2}$ 도 5이고 $\sqrt{(-5)^2}$ 도 5란 말이

잖아? 그렇다면 $\sqrt{a^2}$ 을 a 라고 하는데는 무언가 부족함이 있을 것 같은 생각이 들지 않나?

학생: 맞아요. $\sqrt{a^2}=a$ 라고 한다면 $\sqrt{(-5)^2}=-5$ 라고 해야 하니까 옳지 않은 거죠.

교사: 그렇지.

교사: 그러면 우리 정확하게 정리를 해보자.

a 가 양수이면 $\sqrt{a^2}=a$ 이 옳고 a 가 음수이면 $\sqrt{a^2}=-a$ 가 된다는 거지.

그럼, 이 문제의 풀이 과정을 다시 설명해 보렴

학생: $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}$ 에서 $\sqrt{3}-2$ 는 음수, $2\sqrt{3}-4$ 도 또한 음수이므로 $-(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}-4)$ 이며 $-\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-4$ 에서 정답은 $\sqrt{3}-2$ 가 되겠어요.

교사: 매우 잘 풀었어요.

중단원 I-1의 과제 학습지는 다음과 같다.

I-1 기본 학습지

3학년 ()반 이름 :

1. 다음 수는 어떤 수를 제공한 것인가 ?

- 0 25
6.25 $\frac{121}{144}$

2. 다음 수의 제곱근을 구하여라.

- 1
9
16
36

3. 다음 수를 근호를 써서 나타내면?

49의 제곱근

0.25의 제곱근

5의 양의 제곱근

3의 음의 제곱근

4. 다음 수를 근호를 사용하지 않고 나타내어라.

$-\sqrt{49}$ $\sqrt{25}$

$-\sqrt{36}$ $\sqrt{144}$

$-\sqrt{\frac{36}{49}}$ $\sqrt{81}$

5. 다음 값을 구하여라.

$(\sqrt{5})^2$ $(\sqrt{0})^2$

$(-\sqrt{5})^2$ $-(-\sqrt{5})^2$

6. 다음 값을 구하여라.

$\sqrt{5^2}$ $\sqrt{15^2}$

$\sqrt{(-11)^2}$ $-\sqrt{(-0.4)^2}$

7. 다음을 계산하여라.

$\sqrt{2^2} + \sqrt{(-3)^2}$

$(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{0.4})^2$

$(-\sqrt{5})^2 - (-\sqrt{3})^2$

$\sqrt{(-5)^2} \times \sqrt{3^2}$

8. 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

$\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$

$-\sqrt{7}$, $-\sqrt{8}$

$-\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$

9. 다음 중 두 수의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은 ?

① $\sqrt{4} > \sqrt{5}$ ② $0 < -\sqrt{4}$

③ $-\sqrt{9} < -\sqrt{7}$

④ $-\sqrt{4} > \sqrt{5}$ ⑤ $-\sqrt{3} < -\sqrt{4}$

10. 다음 수를 유리수와 무리수로 구분하여라.

-3 0.025

1.02 $\frac{2}{7}$

$\sqrt{5}$ $\sqrt{9}$

$\sqrt{0.064}$ $\sqrt{\frac{4}{25}}$

π

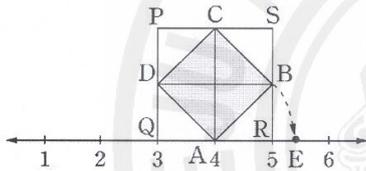
11. 다음 중 무리수인 것은?

- ① $\sqrt{4}$ ② $\sqrt{3^2}$ ③ $-\sqrt{6}$
 ④ 3.14 ⑤ $\sqrt{(-2)^2}$

12. 다음 중 $\sqrt{3}$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 1보다 크고 2보다 작은 수이다.
 ② 순환하지 않는 무한소수이다.
 ③ 무리수이다. ④ 유리수이다.
 ⑤ 실수이다.

13. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 PQRS가 있다. \overline{AB} 를 회전하여 수직선과 만나는 점을 E라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.



가. $\square ABCD$ 는 어떤 사각형인가?

나. $\square ABCD$ 의 넓이는?

다. \overline{AB} 의 길이는?

라. 점 E의 좌표를 구하여라.

14. 다음 두 실수의 대소를 비교하여라

$$3 \square \sqrt{8}$$

$$-\sqrt{3} \square -\sqrt{5}$$

15. 다음 중 대소 관계가 옳은 것은?

- ① $\sqrt{16}-5 > 0$ ② $\sqrt{17}-4 < 0$
 ③ $3-\sqrt{10} > 0$ ④ $4-\sqrt{15} > 0$
 ⑤ $4-\sqrt{18} > 0$

16. 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

$$2+\sqrt{3} \square \sqrt{3}+\sqrt{5}$$

$$\sqrt{6}+\sqrt{7} \square \sqrt{7}+3$$

$$\sqrt{6}-5 \square \sqrt{7}-5$$

$$2+5\sqrt{2} \square 2+3\sqrt{2}$$

17. 다음 설명 중 옳은 것을 2개 고르면?

- ① 자연수 2와 3 사이에는 자연수가 없다.
 ② 정수 -3과 -4 사이에는 정수가 있다.
 ③ 유리수 $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{1}{3}$ 사이에는 유리수가 없다.
 ④ 무리수 $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에는 무리수는 없다.
 ⑤ 실수 2와 $\sqrt{2}$ 사이에는 실수가 있다.

18. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① -3과 2 사이에 정수는 유한개 있다.
 ② 1과 2 사이에 유리수는 무한개 있다.
 ③ $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{6}$ 사이에 무리수는 3개 있다.
 ④ $\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{5}$ 사이에 유리수는 무한개 있다.
 ⑤ 1과 3 사이에 무리수는 무한개 있다

19. 수직선 위의 두 수 $-\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{3}$ 사이에 대응하는 두 점 사이에 있는 수에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 자연수는 2개 있다.
 ② 정수는 3개 있다.
 ③ 유리수는 3개 있다.
 ④ 무리수는 없다.
 ⑤ 실수가 없다.

I-1 발전 학습지

3학년 ()반 이름 :

1. 다음 수의 제곱근을 구하여라.

$\frac{16}{9}$ 의 제곱근

0.09의 제곱근

$(-3)^2$ 의 제곱근

$(-\frac{3}{5})^2$

2. 다음 중 옳은 것은 ?

- ① 0의 제곱근은 없다.
- ② 1의 제곱근은 1개이다.
- ③ 양수의 제곱근은 2개이다.
- ④ 음수의 제곱근은 음수이다.
- ⑤ 25의 제곱근 5이다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 81의 제곱근은 ± 9 이다.
- ② $\sqrt{16}$ 의 값은 4이다.
- ③ $(-3)^2$ 의 제곱근의 ± 3 이다.
- ④ 0.4의 음의 제곱근은 -0.2 이다.
- ⑤ 0의 제곱근은 0하나뿐이다.

4. 다음 수 중에서 제곱근을 구할 수 없는 것은 ?

- ① 0 ② 1 ③ 6
- ④ -25 ⑤ $\frac{1}{4}$

5. 다음 중 양수 a 의 제곱근을 나타낸 것은?

- ① $x^2 = a$ ② $x = \sqrt{a}$ ③ $x = a^2$
- ④ $x = -\sqrt{a}$ ⑤ $a = \pm\sqrt{x}$

6. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt{(-2)^2} = \pm 2$
- ② $(-2)^2$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{2}$ 이다.
- ③ $\sqrt{a^2} = a$
- ④ $\sqrt{100}$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{10}$ 이다.
- ⑤ -2는 $\sqrt{(-2)^2}$ 의 음의 제곱근이다.

7. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $-\sqrt{(-\frac{3}{4})^2} = \frac{3}{4}$
- ② $\sqrt{12^2} \div (\sqrt{(-4)^2}) = 3$
- ③ $\sqrt{3^2} + \sqrt{(-7)^2} = 10$
- ④ $\sqrt{5^2} \times (-\sqrt{\frac{1}{5}})^2 = 1$
- ⑤ $(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{5})^2 = -3$

8. $a > 0$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $-\sqrt{(-a)^2} = -a$ ② $-\sqrt{a^2} = -a$
- ③ $(-\sqrt{a})^2 = a$ ④ $\sqrt{(-a)^2} = -a$
- ⑤ $(\sqrt{a})^2 = a$

9. 다음 중 그 결과가 나머지 넷과 다른 하나를 고르면?

- ① $\sqrt{4^2}$ ② $\sqrt{(-4)^2}$ ③ $(-\sqrt{4})^2$
- ④ -2^2 ⑤ $\sqrt{16}$

10. 다음을 계산하여라.

$$\sqrt{16} - \sqrt{(-3)^2} - (-\sqrt{2})^2$$

$$-\sqrt{0.81} \div \sqrt{\frac{9}{400}}$$

$$\sqrt{1} + (\sqrt{0.1})^2 \times \sqrt{(-0.1)^2}$$

11. $\sqrt{(-3)^2} \times \sqrt{(-2)^2} - \sqrt{(-5)^2}$ 의 식을 간단히 하여라.

12. 다음 수의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내어라.

7, $\sqrt{50}$

-3, $-\sqrt{8}$

$-\sqrt{\frac{1}{5}}$, $-\sqrt{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{10}$, 3, $\sqrt{11}$

13. 다음 수들을 작은 수부터 차례로 늘어놓아라.

4, $(\sqrt{3})^2$, $\sqrt{(-5)^2}$, $-\sqrt{3}$, 0, $-\sqrt{5}$

14. 다음 중 대소관계가 옳은 것은 ?

① $-\sqrt{3} < -3$ ② $\sqrt{5} > 3$ ③ $0.1 > \sqrt{0.1}$

④ $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ ⑤ $-\sqrt{2} > -\frac{1}{2}$

15. 다음 중 두 수의 대소관계가 옳은 것은?

① $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$ ② $-\sqrt{2} < -2$

③ $\sqrt{3} > 2$ ④ $\sqrt{2} < 1$

⑤ $-\sqrt{5} < -4$

16. 다음 중 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $\sqrt{5} < 3 < \sqrt{7}$

② $2 < \sqrt{3} < \sqrt{8}$

③ $3 < \sqrt{10} < 4$

④ $-\sqrt{3} < -\sqrt{4} < -\sqrt{5}$

⑤ $-\sqrt{22} < -\sqrt{20} < -5$

17. 다음 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 구하여라.

$\frac{4}{9}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\frac{\sqrt{4}}{9}$, $\frac{4}{\sqrt{9}}$

18. $3 < \sqrt{a} < 4$ 를 만족하는 자연수 a 의 값을 구하여라.

19. $2 < \sqrt{x} < 5$ 를 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라

20. 다음 그림의 벤 다이어그램에서 어두운 부분에 속하는 것은?

① $\sqrt{0.36}$

② $\sqrt{25}$

③ $\sqrt{0.4}$

④ 0.23

⑤ $\sqrt{\frac{1}{4}}$



21. 다음에서 순환하지 않는 무한소수는 모두 몇 개인가?

$$\sqrt{9}, (-\sqrt{5})^2, -\sqrt{\frac{49}{64}}, \sqrt{2}-2, \sqrt{0.4}$$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

22. 다음 중에서 무리수로만 이루어진 집합은?

① $\{\sqrt{0}, \sqrt{2}, \sqrt{9}\}$ ② $\{-2, 0.12, -\frac{1}{4}\}$

③ $\{\sqrt{5}, -\sqrt{6}, \pi\}$ ④ $\{\sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{4}, \sqrt{8}\}$

⑤ $\{\sqrt{(-3)^2}, -\sqrt{3}, \sqrt{6}\}$

23. 실수의 집합을 R, 유리수의 집합을 Q, 무리수의 집합을 I, 정수의 집합을 Z, 자연수의 집합을 N으로 나타낼 때, 다음 각 경우의 집합을 구하여라.

$$Q^c \quad Q \cup I$$

$$Q \cap I \quad I^c \cup Q^c$$

24. 다음 수는 유리수인가? 무리수인가? 또 그 이유를 말하여라.

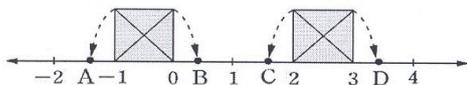
$$\sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

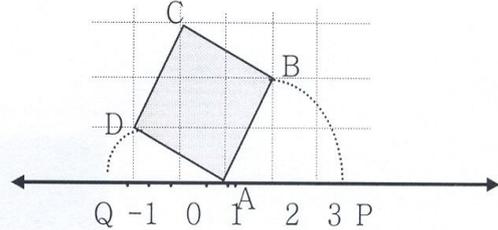
$$2 \times \sqrt{3}$$

$$\sqrt{6} \div 2$$

25. 다음 그림에서 어두운 부분은 모두 정사각형이다. 수직선 위의 네 점 A, B, C, D에 대응하는 수를 각각 구하여라.

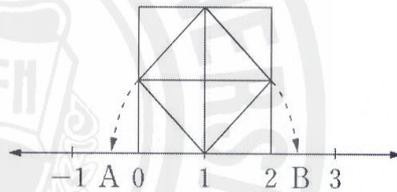


26. 다음 수직선에서 점 P가 나타내는 점의 좌표를 구하면?

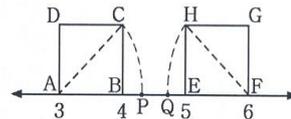


- ① $\sqrt{5}$ ② $1+\sqrt{5}$ ③ $-1+\sqrt{5}$
- ④ $1-\sqrt{5}$ ⑤ $3+\sqrt{5}$

27. ~오른쪽 그림에서 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



28. 그림과 같은 수직선에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 □ABCD와 □EFGH가 있을 때, $\overline{AC} = \overline{AP}$, $\overline{FH} = \overline{FQ}$ 이라면 P와 Q 사이의 거리 \overline{PQ} 의 길이를 구하면?



I-1 심 화 학 습 지

3학년 ()반 이름 :

1. 다음 수의 제곱근을 구하여라.

$\sqrt{16}$ 의 제곱근

$\sqrt{(-12)^2}$ 의 제곱근

2. $\sqrt{81}$ 의 음의 제곱근을 a , $\sqrt{(-4)^2}$ 의 양의 제곱근을 b 라 할 때, $b-a$ 의 값을 구하여라.

3. 「4의 제곱근」과 「제곱근 4」의 차이점을 말하여라.

4. $2 < x < 4$ 일 때, $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2}$ 을 간단히 하여라.

5. $a > 0$ 일 때,
 $\sqrt{4a^2} - \sqrt{(-3a)^2} + (-\sqrt{5a})^2$ 을 간단히 하여라.

6. $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하여라.

7. $\sqrt{x} < 3$ 일 때, x 의 범위를 구하여라.

8. 집합 $A = \{x \mid 2 < \sqrt{x} \leq 4, x \text{는 정수}\}$ 일 때, $n(A)$ 의 값을 구하여라.

9. 다음 식 $x < \sqrt{15} < x+1$ 을 만족하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

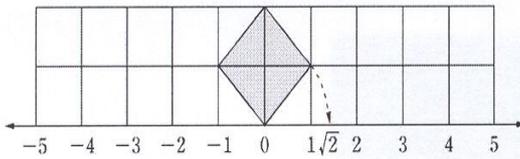
10. $\sqrt{10}-1$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라 할 때, $2a-b$ 의 값을 구하여라.

11. $5-\sqrt{3}$ 의 정수부분을 a , 소수부분을 b 라고 할 때, a^2-b 의 값을 구하여라.

12. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}$ 을 간단히 하여라.

13. 아래 수직선 위에 다음 점의 위치를 나타내어라.

A($1+\sqrt{2}$) B($1-\sqrt{2}$)
 C($-3+\sqrt{2}$) D($-3-\sqrt{2}$)



14. 다음 세 수 a, b, c 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

$$a = -\sqrt{12} + 2, \quad b = 2 - \sqrt{10}, \quad c = -3$$

- ① $a < b < c$ ② $c < a < b$
- ③ $c < b < a$ ④ $a < c < b$
- ⑤ $b < a < c$

15. 다음의 세 수를 a, b, c 의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내어라.

$$a = \sqrt{5} + \sqrt{3}, \quad b = 2 + \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{5} + 2$$

16. 두 실수 $\sqrt{3}$ 과 2 사이에 있는 유리수를 3개 말하여라.

17. 두 실수 $\sqrt{3}$ 과 2 사이에 있는 무리수를 3개 말하여라.

18. 두 실수 $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 유리수를 3개 말하여라

19. 두 실수 $\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{3}$ 사이에 있는 무리수를 3개 말하여라

5. 오류 진단에 따른 지도 결과

가. 수와 연산 마무리 평가

두 영역(수와 연산, 문자와 식)을 포함한 평가지를 제작하여 평가하고 두 영역의 정답율을 비교하여 오류 진단의 결과를 분석하였다. 두 영역을 완전히 분리하지 않고 수준별로 문항을 배치하였으며 상, 중, 하의 비율은 식의 계산이 난이도 상의 비율이 약간 높은 반면, 문자와 식은 난이도 중의 비율이 높고 난이도 하의 비율도 문자와 식이 3.3% 낮아서 전체적으로 난이도는 같게 하였다.

[표14] 오류 지도 후 평가 결과

문항 영역	영역			평가결과(50명)		결과 분석
	문항	난이도		정답수	오답수	
식의 계산	1	중	상:40.0% 중:30.0% 하:30.0%	31	19	정답률 71.8% 오답률 28.2% 문항별로 보면 오답률 30%이상인 문항은 전체10문항중 4문항으로 40%를 차지한다.
	2	하		46	4	
	3	하		41	9	
	4	상		29	21	
	8	중		37	13	
	10	상		37	13	
	12	상		28	22	
	서답형1	하		38	12	
	서답형2	중		37	13	
	서답형3	상		35	15	
문 자 와 식	5	중	상:33.3% 중:40.0% 하:26.7%	34	16	정답률 64.7% 오답률 35.3% 문항별로 보면 오답률 30%이상인 문항은 전체15문항중 10문항으로 66.7%를 차지한다.
	6	하		42	8	
	7	하		38	12	
	9	상		25	25	
	11	하		38	12	
	13	중		35	15	
	14	중		31	19	
	15	중		33	17	
	16	중		33	17	
	17	상		26	24	
	18	상		40	10	
	19	중		28	22	
	20	상		17	33	
서답형4	하	44	6			
서답형5	상	21	29			

본 논문에서 오류 진단을 실시한 식의 계산영역의 정답률은 71.8%이고 그렇지 않은 문자와 식은 64.7%로 7.1%의 차이를 보이고 있으며 오답률이 30%이상인 문항의 비율도 26.7%의 차이를 보이고 있다. 오류 진단 전 형성평가에서 오답률 30%이상인 비율은 65%를 넘는 것으로 나타나 있다.

마무리 평가지의 내용은 다음과 같다.

성취도 평가(식의 계산 및 문자와 식)

1. 다음 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt{16}$ 의 제곱근은 ± 4 이다.
- ② $\sqrt{16} = \pm 4$ 이다.
- ③ 12의 제곱근은 $2\sqrt{3}$ 이다.
- ④ $-\sqrt{3^2} = -3$ 이다.
- ⑤ $0 < a < 2$ 일 때 $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$ 이다.

2. 다음 주어진 식을 $a\sqrt{b}$ 의 꼴로 나타낸 식 중 옳은 것은?

- ① $\sqrt{70} = 7\sqrt{10}$ ② $\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$
- ③ $\sqrt{75} = 5\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
- ⑤ $\sqrt{27} = 9\sqrt{3}$

3. 다음 중 두 실수의 대소 관계가 옳지 않은 것은?

- ① $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$
- ③ $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{2} - 1 < 1 - \sqrt{2}$
- ⑤ $-4 < -\sqrt{15}$

4. 다음 중 옳은 것은?

- ① 두 무리수의 곱은 무리수이다.
- ② 두 무리수의 합은 무리수이다.
- ③ 모든 무한 소수는 무리수이다.
- ④ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무리수가 존재한다.
- ⑤ 수직선은 무리수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다.

5. $(x + 2y - 4)(2x - 3y + 3)$ 의 전개식에서 xy 의 계수를 a , y 의 계수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 19 ② -19 ③ -5
- ④ 5 ⑤ 2

6. 992×1008 을 계산하기 위하여 필요한 곱셈공식은?

- ① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- ④ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- ⑤ $(ax+b)(cx+d) = ax^2 + (ad+bc)x + bd$

7. $(2x + a)(bx - 6) = 6x^2 + cx + 18$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 19 ② -19 ③ -21
- ④ 21 ⑤ 2

8. $\sqrt{8.7} \approx 2.950$, $\sqrt{87} \approx 9.327$ 일 때, $\sqrt{0.087}$ 의 근사값을 구하면?

- ① 0.2950 ② 0.9327
- ③ 0.02950 ④ 0.09327
- ⑤ 93.27

9. $x^2 + Ax + \frac{1}{16} = (x + B)^2$ 일 때,
 $A + B$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{3}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\pm \frac{3}{4}$
 ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{8}$

10. $2 + \sqrt{3}$ 의 정수 부분을 a , 소수
 부분을 b 라 할 때, $2a + b$ 의 값을
 구하면?

- ① $5 - \sqrt{3}$ ② $5 - 2\sqrt{3}$
 ③ $\sqrt{3} - 1$ ④ $5 + 2\sqrt{3}$
 ⑤ $5 + \sqrt{3}$

11. $x^2 + x - 6$ 과 $2x^2 - 5x + 2$ 의
 공통인수를 구하면?

- ① $x + 3$ ② $x - 3$ ③ $x - 2$
 ④ $2x - 1$ ⑤ $x + 2$

12. $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}$ 을 간
 단히 하면?

- ① $-2 + \sqrt{2}$ ② $2 - \sqrt{2}$
 ③ $2 - 2\sqrt{2}$ ④ $-2 + 2\sqrt{2}$
 ⑤ $2 + \sqrt{2}$

13. $x + y = 3$, $x - y = 5$ 일 때,
 $x^2 - y^2 + 4x + 4y$ 의 값을 구하면?

- ① 15 ② 27 ③ -15
 ④ -27 ⑤ 1

14. 다음 수의 분모를 유리화하면?

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

- ① $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ② $5 - 2\sqrt{6}$
 ③ $-7 - 4\sqrt{6}$ ④ $-5 + 2\sqrt{6}$
 ⑤ $-7 + 4\sqrt{6}$

15. $\frac{507^2 - 493^2}{85^2 - 15^2}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

16. 식 $x^2 + \square x - 16$ 가 두 일차식의
 곱으로 인수분해될 때, \square 안에 알
 맞은 정수가 아닌 것은?

- ① 15 ② 6 ③ 0
 ④ -4 ⑤ -15

17. $\sqrt{5}$ 의 소수 부분을 a 라 할 때
 $a^2 + 4a - 2$ 의 값은?

- ① 3 ② -3 ③ 1
 ④ -1 ⑤ 5

18. 다음 식의 값을 구하면?

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 9^2 - 10^2$$

- ① - 55 ② 55 ③ 100
 ④ - 80 ⑤ 80

19. $xy^2 - x - 2 + 2y^2$ 을 인수분해했을 때, 다음 중 인수인 것은?

- ① x ② $x+1$ ③ $x-2$
 ④ $y+1$ ⑤ $y+2$

20. $f(x) = x + 2$,
 $g(x) = x^2 - 3x - 10$ 이고,
 $\frac{g(x)}{f(x)} = ax + b$ 로 나타내어질 때,
 $5ab$ 의 값을 구하면?

- ① - 25 ② 25 ③ 15
 ④ - 15 ⑤ 5

서답형1. <보기>에 주어진 세 수의 대소를 비교하여 작은 수부터 차례로 쓰시오.

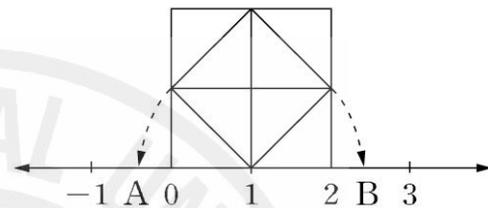
_____ <보기> _____

$1+\sqrt{5} , \sqrt{3}+\sqrt{5} , 2+\sqrt{3}$

서답형2. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3}$$

서답형3. 아래 그림에서 두 점 A, B의 좌표를 구하여라.



서답형4. 다음 식을 인수분해 하여라.
 가. $x^2 - 16x + 64$
 나. $9x^2 - 16y^2$

서답형5. 다음 식을 인수분해하여라
 가. $ax^2 - ax - 12a$

나. $x^2 + 2xy + y^2 - 9$

나. 사후 관심도 검사

사전 실시한 검사지로 사후 실시한 결과는 아래 와 같다.

[표15] 사후 관심도 조사 분석표

문항	질문	매우 그렇다	종종 그렇다.	보통이 다.	별로 그렇지 않다.	전혀 그렇지 않다.	계
1	나는 수학 공부 시간이 즐겁다.	8	13	15	8	5	49
2	나는 수학 시간에 선생님의 설명을 잘 듣는다.	11	14	15	7	2	49
3	나는 수학 참고서나 문제집의 문제들을 종종 풀어본다.	7	14	13	14	1	49
4	나는 수학 과제물을 꼭 한다.	12	13	15	8	1	49
5	나는 수학시간에 모르는 것이 있으면 반드시 질문한다.	8	7	8	16	10	49
6	나는 수학교과에 대하여 평소에 연습을 한다.	14	10	7	10	8	49
7	나는 수학교과에 대하여 평소에 복습을 한다.	8	6	14	11	10	49
8	나는 수학 시간에 수업한 내용을 어느 정도 이해하고 있다.	16	14	10	6	3	49
9	나는 수학에 대한 기초학력이 부족하여 수업에 흥미를 느끼지 못한다.	10	4	5	12	18	49
10	나는 수업 내용이 너무 쉬워 흥미를 느끼지 못한다.	0	3	3	19	24	49
11	나는 내 수준에 맞는 수업을 받는다면 열심히 할 것이다.	22	7	14	2	4	49

수학에 대한 흥미를 묻는 문항 1,2,3에서 약 26%의 학생들이 수학에 흥미가 없는 것으로 나타났으며 사전 검사에 비하여 9% 정도 줄어들었으며 수업 시간의 태도, 과제 학습 등을 묻는 질문에서는 수업시간에 질문을 한다는 학생이 사전 약 20%에서 30%로 약 10%(5명)의 학생이 긍정적인 경향으로 변모했음을 알 수 있었다. 평소 수학 시간에 수업한 내용을 어느 정도 이해하고 있는가에 대한 질문에는 긍정적으로 응답한 학생이 사전 20명에서 30명으로 약 20%정도 증가하였으며 예·복습, 과제물 해결을 바르게 하는 학생은 약27%에서 40%로 13%정도 긍정적으로 변모하였다.

VI. 결론 및 제언

1. 결론

본 연구는 오류에 대한 선행연구들을 고찰하고 9-가 수와 연산 영역에서 발생하는 오류를 분석·연구하여 분류 모델을 제시하였으며 그 내용은 다음과 같다.

가. 이해과정에서의 오류

나. 부적절하게 사용된 정리나 정의

다. 의도하지 않은 해

라. 풀이과정의 생략

마. 기술적 오류

바. 오류의 애매모호성

이러한 오류 모델에 의한 학생들의 풀이 과정을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 문제를 읽는 과정에서 다양한 사고를 발휘하지 않고 과거에 풀었던 문제 형식으로만 인식하여 이해과정상의 오류를 흔히 범하고 있다.

둘째, 사칙계산에서는 계산상의 오류 즉 기술적 오류가 많이 나타나고 있으며 개별 지도를 통하여 오류를 수정하여야 할 것이다.

또한 오류 분석을 통한 오류의 해결방안을 찾는 과정에서 개개인마다 차이점이 있으므로 개개인마다 적절한 처방이 필요하다고 보았으며 개인별 성취도를 확인하고 개인별 지도를 통하여 다음과 같은 사실을 얻을 수 있었다.

첫째, 개인별 수준에 맞는 학습 과제를 제시하여 학생들의 수학에 대한 관심을 높일 수 있었으며 하고자 하는 의욕이 왕성해 짐을 느낄 수 있었다.

둘째, 친구들간에 서로 경쟁하는 긍정적인 모습을 볼 수 있었으며 각자 과제 해결 과정에서 협력하는 분위기는 학교 생활을 즐겁게 하는 충전제 역할을 하고 있었다.

셋째, 학생들의 수학에 대한 관심도가 높아짐을 확인할 수 있었다. 흥미도 검사를 통한 검증뿐만 아니라 수업 과정에서 질문의 횟수, 수준 등이 학습의 깊이를 더 할 수 있는 계기가 되었다.

2. 제언

본 연구에서 발견된 결과와 이로부터 내려진 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 할 수 있다.

첫째, 본 연구의 대상이 52명을 대상으로 하였기에 전체 모두가 그렇다고 단정할 수는 없다. 따라서 전체학생을 대상으로 철저하고 종합적인 연구가 필요하다.

좀 더 많은 시간과 문제들을 통해서 유형을 분석해 볼 필요가 있다.

둘째, 수와 연산 영역이 오류 지도가 이루어지더라도 전체 수학교과 성취도에 미치는 영향은 매우 미미하다. 모든 영역에 걸쳐 지속적이고 꾸준한 노력이 있어야만 학생들의 현저히 변모된 모습을 기대할 수 있으리라 생각한다.

셋째, 풀이 과정의 생략이나 오류의 애매 모호성에 해당되는 오류에 대해서는 학생들의 답만을 가지고 정확한 오류 원인을 파악하기가 힘들었다. 따라서 학생들과의 면담을 통해 구체적인 오류의 원인을 파악해 볼 필요가 있다.

넷째, 학생 개인별 지도시 학생과의 공감대를 형성할 수 있는 분위기 조성에 힘써야 할 것 같다. 서로 거부감을 느끼지 않도록 공동체 의식을 갖는다면 성취도 향상에도 큰 보탬이 될 것이다.

참 고 문 헌

- 강옥기, 정순영, 이환철(2003), 「수학 9-가」, (주) 두산
- 강옥기, 정순영, 이환철(2003), 수학 9-가 교사용 지도서, (주)두산
- 김영환(2007), 중학교 수학 9-가에서 무리수의 이해와 오류에 대한 연구, 경상대학교 교육대학원 석사학위 논문
- 이인순(2003), 「개념이해 및 응용력을 기르기 위한 정리학습지 개발」, 제주대학교 교육대학원 석사학위 논문
- 오정현(1996), 「중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구」, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문
- 김소현(2005), 「수학적 오류진단과 지도에 관한 연구(9-가 함수단원 중심으로)」, 국민대학교 교육대학원 석사학위 논문
- 김옥경(1990), 「고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구」, 이화여자대학교 석사학위 논문
- 조혜영(1999), 「중학교 수학의 대수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구(1학년울 중심으로)」, 충남대학교 교육대학원 논문
- 김홍국외(2003), 「수학과 제7차 교육과정 교수·학습 자료 -중학교 9-가. 9-나-」, 제주도제주시교육청
- 강행고외(2002), 「수학 9-가」, (주)중앙교육진흥연구소
- 강행고외(2002), 「수학 9-가」, (주)중앙교육진흥연구소
- 허성미(2005), 「수학문제 풀이과정에서 나타나는 오류유형에 관한 연구-중학교 수학 8-가 수와 식 단원을 중심으로-」, 경남대학교 교육대학원 석사학위 논문

(Abstract)

**Examining and Correcting Errors in Teaching and Learning
Mathematics
– In the Unit of Numbers and Operations in 9 Grade Mathematics
Textbooks–**

Heo, Seong Hee

Department of Mathematics Education

Graduate School of Education

Jeju University

(Supervised by Professor Ko, Youn Hee)

The goal of the math course in the secondary school is to help students to develop the ability and the attitude to creatively solve problems by building up the math thinking ability on the basis of essential knowledge of the math. The math thinking ability doesn't mean only the acquisition of the math knowledge but the ability of critically thinking of the creative solution and proof with their own knowledge.

Compared with other subjects, though students make a great effort to learn math, math is not thought to be interesting. Most students become much puzzled with the unfamiliar problems. Especially students who are poor-grounded in math dislike the subject much and consider it to be very difficult on learning the upper level of contents.

Teaching through examining errors is one of the teaching methods to help students to have the curiosity and a sense of achievement and feel confident by making them succeed in solving problems.

If teachers are able to recognize and examine the cause and variety of errors correctly, they could give the more accurate feedback to students and get a good information in making a teaching plan.

In this study, patterns of errors in numbers and operations are classified into six types such as understanding errors, a wrongly-applied theorem or definition, a undesigned solution, an omission in the process of solving, a description mistake, and the ambiguity of errors. As a result of research, understanding errors occur most frequently in the middle unit where new terms such as an irrational number, a square root and so on appear for the first time. And in the middle unit including the calculation of irrational numbers, description mistakes take place most, understanding errors and wrong-applied theorems or definitions in that order.

Through correcting errors and mistakes and providing various learning materials and handouts according to how a student makes mistakes, the percentage of

problems to which 30 % or more of students give a wrong answer decrease from 65% to 40% and students' math average mark increases by 7% in comparison with teaching without correcting errors and mistakes. The survey on students' interest in math shows that about 9% of students become more interested in math, 10% become more involved in learning activities, 20% are able to understand more, and 13% are able to do their assignment more easily. This says that students' attitude to learning math become more positive.

To increase the effect of teaching the lesson, it is necessary to analyze and examine errors in the whole area of math. If correcting and teaching errors continue steadily, students can develop their math ability day by day.



2008년 중학교 3학년 국가수준 교과학습 진단평가

수 학

() 중학교 3학년 ()반 ()번 이름()

※ 문제지 4면에 30문항이 모두 있는지 확인하시오.
 ※ 문제의 답을 별도의 답안지에 표시하시오.

1. $1 - \left\{ 2 - (-2)^2 \div \frac{2}{3} \right\}$ 를 계산하면?

- ① -5 ② -4 ③ 4 ④ 5

2. 다음 수 중에서 가장 큰 수는?

- ① 0.3 ② 0.23 ③ 0.32 ④ 0.323

3. 다음은 2.5를 분수로 고치는 과정을 나타낸 것이다.

안에 알맞은 수를 고르면?

$x = 2.5$
$10x = 25.5$
$9x = \square$
$x = \frac{\square}{9}$

- ① 2 ② 4 ③ 23 ④ 25

4. 다음 중 유한소수로 나타낼 수 있는 것은?

- ① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{6}{48}$ ③ $\frac{4}{2^2 \times 3}$ ④ $\frac{2 \times 3}{3^2 \times 5}$

5. 어떤 음료수 한 개의 정해진 양이 175mL라고 한다. 이 음료수를 검사할 때 음료수 양의 오차의 절댓값이 5mL 이하인 것만 합격품으로 판정을 한다고 한다. 다음 중 불합격품인 것을 고르면?

- ① 169.5mL ② 170mL ③ 174.2mL ④ 179.9mL

6. 다음 중 a^3 과 같은 것은?

- ① $a+a+a$ ② $a \times a \times a$ ③ $a \times 3$ ④ 3^a

7. 다음 중 옳은 것은?

- ① $x^2 + x^3 = x^5$ ② $x^2 \times x^3 = x^6$
 ③ $(xy^2)^3 = x^3y^6$ ④ $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y}$

8. $x=2, y=-3$ 일 때, $3x-2y^2$ 의 값은?

- ① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12

9. 등식 $3y-2x=y-6$ 에서 y 를 x 의 식으로 나타낸 것은?

- ① $y=x-3$ ② $y=2x-6$
 ③ $y=x+3$ ④ $y=2x+6$

10. 다음 중 (x, y) 의 순서쌍 (1, 2)를 해로 갖는 일차방정식은?

- ① $x-2y=0$ ② $3x+2y=7$
 ③ $y=\frac{3}{x}-1$ ④ $x^2-2y=-3$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=-3 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 의 값을 구하면?

- ① $x=-4, y=1$ ② $x=-4, y=9$
 ③ $x=-1, y=6$ ④ $x=1, y=4$

12. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=2 \dots \text{㉠} \\ x-3y=1 \dots \text{㉡} \end{cases}$ 에서 x 를 소거하려고 할 때, 알맞은 방법은?

- ① ㉠에서 ㉡을 뺀다.
 ② ㉠의 양변에 2를 곱한 것을 ㉠에 더한다.
 ③ ㉠의 양변에 2를 곱한 것을 ㉠에서 뺀다.
 ④ ㉠의 양변에 3을 곱한 것을 ㉡에 더한다.

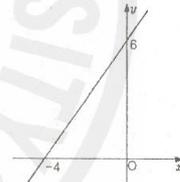
13. $a < b$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $a+2 < b+2$ ② $a-3 < b-3$
 ③ $-5a < -5b$ ④ $\frac{a}{4} < \frac{b}{4}$

14. 부등식 $3-2x < 11$ 을 만족하는 x 의 값 중에서 가장 작은 정수는?

- ① -7 ② -5 ③ -4 ④ -3

15. 다음 y 의 x 에 대한 일차함수 그래프의 기울기를 구하면?



- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

16. 일차함수 $y=2x-4$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① y 절편은 -4 이다.
 ② $(1, -2)$ 를 지나는 직선이다.
 ③ $y=2x+2$ 의 그래프와 평행하다.
 ④ $y=2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 그래프이다.

17. 기울기가 3이고 점 (2, 3)을 지나는 일차함수의 식은?

- ① $y = \frac{3}{2}x$ ② $y = 2x + 3$
 ③ $y = 3x - 3$ ④ $y = 3x + 2$

18. 두 점 (1, 4), (3, 0)을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식을 $y = ax + b$ 로 나타냈을 때, b 의 값은?

- ① -6 ② -2 ③ 2 ④ 6

19. 동전 1개와 주사위 1개를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는?

- ① 2 ② 6 ③ 8 ④ 12

20. 소희, 유빈, 현아, 선미 4명의 후보 중에서 두 명의 대표를 뽑으려고 한다. 가능한 모든 경우의 수는?

- ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16

21. 1, 2, 3의 숫자가 각각 적힌 3장의 카드에서 2장을 뽑아 두 자리 정수를 만들었을 때, 그 수가 짝수일 확률은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

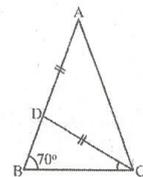
22. 농구선수 현수의 자유투 성공률은 $\frac{3}{5}$ 이다. 현수가 자유투를 두 번 던질 때, 두 번 모두 실패할 확률은?

- ① $\frac{4}{25}$ ② $\frac{9}{25}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$

23. 다음 명제 중 참인 것을 고르면?

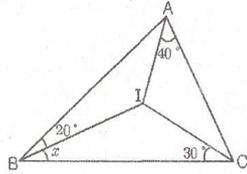
- ① $a < b$ 이면, $ac < bc$ 이다.
 ② 5의 배수는 10의 배수이다.
 ③ x 가 짝수인 자연수이면 $x+1$ 은 홀수이다.
 ④ $\triangle ABC$ 에서 $\angle A < 90^\circ$ 이면 $\triangle ABC$ 는 예각삼각형이다.

24. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ 이고 $\angle B = 70^\circ$ 일 때, $\angle BCD$ 는?



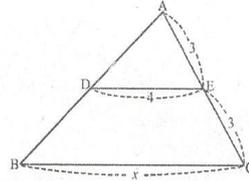
- ① 20° ② 30° ③ 35° ④ 40°

25. 다음 그림에서 점 I가 $\triangle ABC$ 의 내심일 때, $\angle x$ 의 크기는?



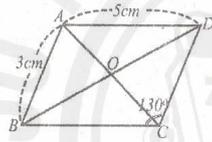
- ① 10° ② 20° ③ 30° ④ 40°

28. 다음 그림에서 $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ 일 때, x 의 값은?



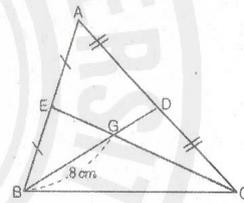
- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9

26. 다음 그림의 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



- ① $\overline{CD} = 3\text{cm}$ ② $\overline{OA} = \overline{OC}$
 ③ $\angle OAD = 65^\circ$ ④ $\triangle OAB \cong \triangle OCD$

29. 다음 그림에서 점 E, D는 각각 \overline{AB} , \overline{AC} 의 중점이고, 점 G는 \overline{BD} , \overline{CE} 의 교점이다. \overline{BG} 의 길이가 8cm일 때, \overline{GD} 의 길이는?



- ① 3cm ② 4cm ③ 5cm ④ 6cm

27. 다음 중 두 대각선의 길이가 항상 같은 것은?

- ① 직사각형 ② 평행사변형
 ③ 마름모 ④ 사다리꼴

30. 반지름의 길이의 비가 2:3인 두 구의 부피의 비는?

- ① 2:3 ② 4:6 ③ 4:9 ④ 8:27

학 생 용 설 문 지

본 설문지는 여러분의 학습에 도움을 주기 위하여 여러분의 수학 학습과 관련된 관심도를 알아보고자 하는 것입니다. 맞거나 틀린 답이 없을 뿐 만 아니라, 누가 얼마나 잘하고 못하는 지를 평가하지도 않습니다. 그리고 조사 결과가 개별적으로 공개되는 일도 없을 것입니다. 아래의 질문에 진솔한 답변을 부탁드립니다.

문항	질 문	매우 그렇 다	중중 그렇 다	보통 이다	별로 그렇 지 않다	전혀 그렇 지 않다
1	나는 수학 공부 시간이 즐겁다.					
2	나는 수학 시간에 선생님의 설명을 잘 듣는 편이다.					
3	나는 수학 참고서나 문제집의 문제들을 종종 풀어본다.					
4	나는 수학시간에 수업한 내용을 어느 정도 이해하고 있다.					
5	나는 수학 과제물을 꼭 한다.					
6	나는 수학시간에 모르는 것이 있으면 반드시 질문한다.					
7	나는 수학 교과에 대하여 평소에 예습을 한다.					
8	나는 수학교과에 대하여 평소에 복습을 한다.					
9	나는 수학에 대한 기초학력이 부족하여 수업에 흥미를 느끼지 못한다.					
10	나는 수업 내용이 너무 쉬워 흥미를 느끼지 못한다.					
11	나는 내 수준에 맞는 수업을 받는다면 열심히 할 것이다.					