科學敎育, 15, 151～168, 1998
Journal of Science education
15, 151～168, 1998

高等學敎 敎育課程에서 圖形의 變換에 대한 指導內容 分析 및 改善 方案

宋錫準* · 朴鍾國**

The Analysis and Improvements of Teaching Method on Figures in High school Curriculum.

Song, Seok-Zun · Park, Jong-Kuk

Abstract

Some concepts of modern mathematics give rise to the new contents of school mathematics in accordance with the modernization movement of mathematics education. The transformation of the figures is one of new contents. The object of this research is to find out the effective teaching methods for the transformations of figures, the structures of various transformations, analyzing the curriculum and mathematics textbooks, and pointing out difficult aspects of contents which can be found in the mathematics education of some high schools in Cheju province.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

현재 학교에서 가르치는 수학 교육의 목적은, 첫째가 훌륭한 전인적 인간을 형성

* 제주대학교 자연과학대학 수학과 교수
** 제주중앙여자고등학교 교사

하고 교양 교육의 학습으로 수학적 사고력의 양성과 과학 문명의 기초로서 수학을 이해하고 사물을 올바르게 분석 파악하는 태도를 기르는 것이고, 둘째가 실생활에 직접 관련되는 응용 면의 기능을 습득하여 적용시키는 것이며, 셋째가 상급학교에 진학해서 수학 또는 다른 학문을 습득하는데 필요한 수학적 지식을 습득하는 것이다([7]).「수학을 참으로 이해하려면 기본이 된다고 생각하는 몇 개의 사항으로부터 출발하여 새로운 것을 구축해 나갈 수 있게 되어야 하며 또한 개념이 바르게 형성되어야 한다. 따라서 개념이나 원리, 법칙에 대한 이해는 보다 나은 수학적 사고방식이나 문제 해결력을 낳게 하고 수학의 체계를 보다 명확하게 파악할 수 있도록 하는 기본적 인 것」임을 나타낸다([11]).

이런 면으로 볼 때 학교에서 가르치는 수학의 내용은 대학 교육을 받게 될 때뿐만 아니라 실제적 사회생활을 하는 데 필요한 학문으로서 구성되어야 한다.

현행 교육 과정에서의 새로 등장한 초등학교, 중학교 수학에서의 변환의 개념 및 고등학교 수학Ⅱ에서의 행렬과 일차 변환은 현대 수학의 집합·함수를 그 기본으로 삼고 있다. 변환의 개념이 초·중등교육을 통해서 일관되게 취급될 수 있도록 그 지도 내용이 편성되어 있으나 현행 교육과정에서 처음으로 채택된 내용이 대부분이다. 그러므로 각급 학교 사이의 지도 계통이 확립되기에는 아직도 미비하고, 더욱이 한 단원에서도 여러 개념들 사이의 상호관계가 분명하지 못한 부분이 있을 것으로 생각된다. 그리고 이 연구에 대한 선행 연구마저 많지 않은 형편이다.

본 연구에서는 도형의 변환에 관한 현대 수학에서의 이론적 배경을 알아보고 여러 가지 변환들 사이의 구조를 분석 체계화하는 동시에 중·고등학교에서의 효율적인 변환 지도를 위한 지도 목표 정립과 구조화된 지도 내용을 작성함을 그 목적으로 한다.

2. 연구의 제한점

본 연구는 고등학교 학생과 중·고등학교 교사를 대상으로 실시된 것으로 표본의 크기가 학생은 442명, 교사는 42명밖에 안되고 제주도내 소재한 8개교를 대상으로 한 것이기 때문에 본 연구를 모든 학생에게 확대 적용시키는 데는 무리가 있다고 생각한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 변환과 변환군

1) 변환의 정의

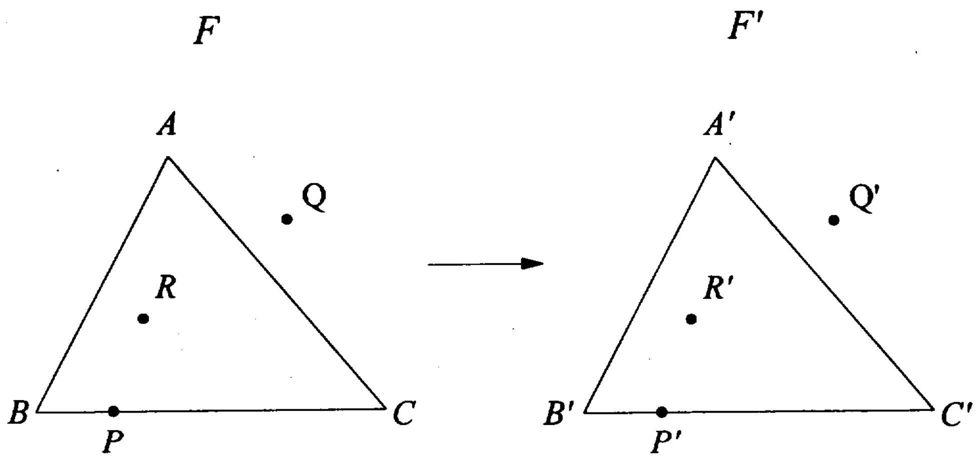
집합 X 에서 X 위로의 전단사(bijection)인 사상을 X 에서 X 위로의 변환(transformation) 또는 X 에서의 변환이라고 한다. 집합 X 에서의 변환 f에 의하여 한 점 $p \in X$ 에 그 자신이 대응하면, 곧 $f(p)=p$ 이면, p는 변환 f의 부동점이라고 부른다. X 의 모든 원소가 부동점이면, 그 변환을 X 에서의 항등변환이라고 부르고, 기호 i_X 또는 i 로 나타낸다.

수학에서 변환이라는 것은 한 점을 다른 점으로 옮기거나, 도형을 다른 도형으로 옮기거나, 식을 다른 형태의 식으로 바꾸는 것은 모두 변환이라 하며, 좌표변환은 좌표를 바꾸는 것을 의미하며, 합동변환은 점을 점으로 옮길 때, 임의의 두 점사이의 거리가 변화지 않은 것을 말한다. 또한 임의의 n 차원에서 각 점 p에서 동일한 공간의 하나, 또는 보다 많은 점 p로 대응시키는 것을 변환, 혹은 사상이라고 한다. 여기서 '옮긴다'란 말은 한 편으로는 이동이라고 하는데 도형의 이동과 변환의 구별은 분명히 지적하기 곤란하나 보통 중등수학에서 이동은 변환의 특수한 경우로 취급되고 있다.

일반적으로, 「도형의 변환(*transformation of figure*)」이라고 말할 때는 도형의 위상 변환을 의미하고 있다. 이 경우에 X는 위상이 주어진 집합이라야 하며, 또 f는 그 역함수 f^{-1}와 함께 연속인 함수이라야 한다. 한 위상변환 f에 의하여 X에서의 한 도형 F가 도형 F' 으로 옮겨지면 F와 F'는 서로 위상동형이라고 말한다.

지금 평면에서 한 개의 변환을 생각할 때, 이 변환에 의하여 도형 F가 아래 (그림1)과 같이 도형 F'에 변환되었다고 하면, $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$, $P \to P'$와 같이 도형 F상의 꼭지점이나 변상의 점에 각각 변환되고, 또 $Q \to Q'$, $R \to R'$와 같이 일반으로 평면상의 임의의 점 P, Q도 이 변환에 의하여 역시 상에 대응하는 점 P', Q'에 변환되는 것에 유념해야 한

다.[9)]



(그림 1)

그런데, 보통 평면 R^2(단, R은 실수체) 또는 공간 R^n에는 두 점 사이의 거리에 의하여 매우 강한 위상이 주어져 있다. 그러므로, $X=R^2$ (또는 R^n)에서의 한 변환 f는 다음의 두 조건을 만족하는 X에서 자신으로의 한 함수이다.

(i) f는 $1-1$의 대응(전단사)이다.

(ii) f는 연속이다.

여기에서 f가 $p\in X$에서 연속이라는 것은, p에 수렴하는 X에서의 임의의 한 수열 $\{p_k\}$ 에 대하여, 수열 $\{f(p_k)\}$ 가 $f(p)$에 수렴함을 뜻한다. 그러므로 $f(p)=p'$, $f(p_k)=p'_k$ ($k=1,2,\cdots$)이라고 할 때, f가 p에서 연속이라는 것은 $p_k\to p$ ($k\to\infty$)이면 $p'_k\to p'$ ($k\to\infty$) 가 되는 것을 의미한다.

2) 변환군과 불변성

앞으로 집합 X는 한 위상공간을, 또 (위상)공간 X에서의 변환 f는 위상변환을 나타낸다고 생각한다.

공간 X에서의 변환 전체의 집합을 G라 하고, 두 변환의 곱으로는 두 함수의

9) [14], 최종렬, P, 7.

합성을 취하기로 한다. 그러면, 전단사인 두 함수의 합성도 전단사이고, 연속인 두 함수의 합성도 연속이므로, G는 변환의 곱에 대하여 닫혀 있다. 그리고, G에서 다음의 성질이 성립하는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

(i) $\forall f,\ g,\ h \in G,\quad h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ (결합법칙)

(ii) $\exists i \in G,\quad \forall f \in G\ :\ i\circ f = f = f\circ i$ (항등 변환의 존재)

(iii) $\forall f \in G,\ \exists f^{-1} \in G\ :\ f^{-1}\circ f = i = f\circ f^{-1}$(역변환의 존재)

따라서, G는 곱에 관하여 한 군을 이루며, 이것을 공간 X에서의 변환군이라고 말한다. 변환군 G의 공집합이 아닌 부분집합 H가 두 조건

(i) $\forall f,\ g \in H,\quad g\circ f \in H$ (폐포성)

(ii) $\forall f \in H,\quad \exists f^{-1} \in H$ (역변환)

를 만족하면, H가 변환의 곱에 관하여 역시 한 변환군을 이루게 된다. 이 때, H를 변환군 G의 부분변환군 또는 간단하게 부분군이라고 부른다.

G가 공간 X의 변환군일 때, G에 속하는 임의의 변환에 대하여 변하지 않는 공간 X의 성질을 변환군 G에 관한 불변성이라고 말한다. 변환군 G의 한 부분군 H에 대하여, G에 관한 불변성은 H에 관한 불변성이 된다.

2. *Affine* 변환

1) *Affine* 공간의 정의

한 집합 X와 실수체 R위의 n차원 *vector*공간 V^n과의 순서쌍 $A^n = (X,\ V^n)$이 다음 공리를 만족할 때, A^n을 n차원 *Affine*공간이라 부른다.

(i) 임의의 한 점 $P \in X$와 $a \in V^n$에 대하여, 평행이동 $f_a(P) = P + a \in X$가 정해진다.

(ii) 임의의 두 점 $P,\ Q \in X$에 대하여, *vector* $b = \overrightarrow{PQ} \in V^n$가 다만 하나 정해진다.

(iii) 임의의 $P,\ Q,\ R \in X$에 대하여, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$이다.

특히 A^1을 *Affine* 직선, A^2를 *Affine* 평면이라고 부른다.

2) *Affine* 변환

Affine 공간 $A^n = (X, V^n)$에 대하여

(i) $f: X \to X$가 전단사이고

(ii) φ : $V^n \to V^n$이 *vector*공간으로서 동형적(同型的)일 때, (f, φ)를 *Affine*변환이라고 부른다. 그러나, $f: X \to X$ 만으로 *Affine*변환을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

(i)′ f는 직선 l을 직선 $f(l)$로 옮긴다.

(ii)′ l위에서 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$이면, $f(l)$ 위에서 $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(C)}$ 이다. (단, $\lambda \in R$)

물론, 1)의 (i) 에서 정의한 평행이동 f_a도 *Affine*변환의 일종이다.

이 *Affine*변환은 합동변환이나 닮음변환을 일반화한 것으로 기하학적으로는 평행선을 평행선으로 옮기는 평면위에서의 연속변환이라 정의하고 *Affine*변환에 의하여 불변인 도형의 성질을 *Affine*적 성질이라 하고 다음 성질을 갖는다.10)

① 직선은 직선으로 옮겨진다.

② 평행인 두 직선은 평행인 두 직선으로 옮겨진다.

③ 같은 직선 위에 있는 두 선분의 길이의 비는 불변이다.

④ 각의 크기는 일반적으로 보존되지 않는다.

3) *Affine*변환군

*Affine*공간 $A^n = (X, V^n)$의 *Affine*변환 전체를 $G_A{}^n$이라고 하면, 이것은 변환의 합성에 관하여 군을 이룬다. 이 군 $G_A{}^n$을 *Affine*변환군이라고 부른다.

평행이동 전체 T^n은 물론 *Affine*변환군 이고, 더욱이 $G_A{}^n$의 정규부분군임을 알 수 있다. 그리고, 상군 $G_A{}^n / T^n$은 *vector*공간 V^n의 선형자기동형군

10) [15], 현종익, PP, 279~282.

$GL(V^n)$과 동형적이다.

3. *Euclid*기하

1) 직교변환

이제, $V_R{}^n$을 n차원 내적 *vector*공간, 즉 임의의 $a, b \in V_R{}^n$에 대하여 $(a, b) \in R$이 정해지고 다음 성질을 만족하는 공간이라고 한다.

(i) $(a_1 + a_2,\ b) = (a_1,\ b) + (a_2,\ b)$

$(a, b) = (b, a)$

$(\lambda a, b) = (a, \lambda b) = \lambda(a, b) \quad (\lambda \in R)$

(ii) 임의의 $a \in V_R{}^n$에 대하여, $(a, a) \geq 0 : (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

이 때, *Schmidt*의 직교 화법에 의하면, $V_R{}^n$에서 정규직교기(e_1, e_2, e_3, $e_4, \cdots\cdots, e_{n-1}, e_n$), 즉, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 이고 δ_{ij}는 *Kronecker*의 *delta*)를 만족하는 기를 잡을 수 있다. 또, $V_R{}^n$의 *vector* a의 길이는 $\| a \| = \sqrt{(a, a)} \geq 0$으로써 정의된다.

다음에, $\varphi : V_R{}^n \to V_R{}^n$ 이 한 선형변환이고 $a, b \in V_R{}^n$에 대하여 $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$가 성립할 때, φ를 내적 *vector*공간 $V_R{}^n$의 직교변환이라고 말한다. 이 변환의 행렬을 A 라고 하면 다음의 네 명제는 서로 동치임을 알 수 있다.

(i) $\varphi : V_R{}^n \to V_R{}^n$이 직교변환이다.

(ii) A 가 동치행렬이다. (즉, $A{}^tA = E = {}^tAA$)

(iii) 임의의 $a \in V_R{}^n$에 대하여 $\| \varphi(a) \| = \| a \|$

(iv) $A = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ 으로 표시할 때, $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$

$V_R{}^n$의 직교변환 전체는 변환의 합성에 관하여 군을 이룬다. 이것을 직교군이라

부르고, 기호 $O(n)$으로 나타낸다. 따라서, $O(n)$은 n 차의 직교행렬 전체로 되는 군(즉, 직교군)과 동형이다.

2) *Euclid*공간

$V_R{}^n$이 n차원 내적 *vector*공간일 때, *Affine*공간 $R^n=(X, V_R{}^n)$을 n차원 *Euclid*공간이라고 부른다. 특히, R^1은 *Euclid*직선, R^2를 *Euclid*평면이라고 부른다.

*Euclid*공간 $(X, V_R{}^n)$에서 처음으로 도입되는 개념으로서, 두 점 $P, Q \in X$ 사이의 거리 $d(P, Q)$를 $d(P, Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|$ 로써 정의한다. 그러면, X는 거리 공간이 된다. 즉 함수 $d : X^2 \rightarrow R$은 다음 "거리의 공리"를 만족한다.11)

(i) $d(P, Q) \geq 0$; $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

(ii) $d(P, Q) = d(P, Q)$ (대칭성)

(iii) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ (삼각 부등식)

*Schwarz*의 부등식에 의하여, $(X, V_R{}^n)$에서의 두 선분 $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$이 이루는 각의 크기 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$는 $\cos\theta = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) / (\| \overrightarrow{PQ} \| \times \| \overrightarrow{PR} \|)$로부터 정의된다.

3) **합동변환**

평면 R^2 위에서 한 도형 F를 변환 f에 의하여 도형 F'로 옮겨졌을 때, F와 F'이 일치되게 옮겨졌을 때 변환 f를 합동(*Congruent*)변환이라고 한다.12) n차원 *Euclid*공간 $(X, V_R{}^n)$에서, (f, φ)가 *Affine*변환인 동시에 φ가 $V_R{}^n$에서의 직교변환이면, (f, φ)는 합동변환이다. $(X, V_R{}^n)$의 합동변환 전체는 물론 군을 이룬다. 이것을 합동 변환군이라 부르고, $G_R{}^n$으로 나

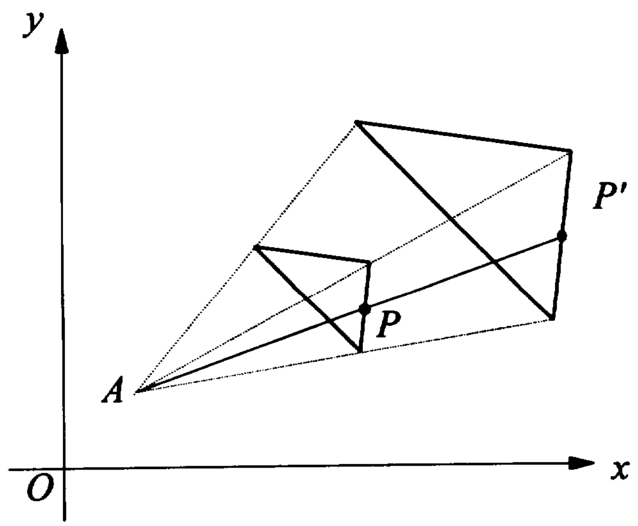
11) [13], 임재규 공저, P, 248.
12) [15], 현종익, P, 270.

타낸다. 특히, (f, i) (단, i는 $V_R{}^n$ 항등변환)인 모양의 합동변환은 평행이동이 된다. $Euclid$공간에서도 평행이동 전체로 되는 군을 T^n으로 나타낼 수 있으므로, $G_R{}^n / T^n \cong O(n)$인 관계가 성립한다.

4) 닮음변환

평면 R^2 위의 정점 A와 다른 점 P에 대하여 AP 또는 그 연장선 위의 점 P'를 잡아서 $AP' : AP = k$ ($k \neq 0$ 인 상수)되도록 P에 P'를 대응시키는 변환을 닮음변환(*Similarity transformation*)이라 한다(그림 2참조). 이 때 정점 A를 닮음의 중심, 일정한 비의 값 k를 확대율(또는 닮음비)이라 한다.[13]

$Euclid$공간 $(X, V_R{}^n)$의 $Affine$변환 (f, φ)가 닮음변환이라는 것은, $\varphi : V_R{}^n \to V_R{}^n$ 에 의하여 한 $\lambda \in R$ ($\lambda > 0$)가 정해져서 임의의 $a, b \in V_R{}^n$



(그림 2)

에 대하여 $(\varphi(a), \varphi(b)) = \lambda^2 (a, b)$ 가 성립한다는 것이다. 그러나, $f : X \to X$만으로 닮음변환을 정의하면, 위의 식은 그림 2와 같이 $d(f(P), f(Q)) = \lambda d(P, Q)$ ($P, Q \in X$)로 변형된다. 특히, $\lambda = 1$이면 φ는 직교

13) [15], 현종익, P, 276.

변환이 되므로, 합동변환은 닮음변환의 일종이다.

위의 관계로부터 $\| \varphi(a) \| = \lambda \| a \|$가 얻어지고, 이 때 λ를 닮음변환의 배률(또는 닮음비)이라고 부른다.

닮음변환 전체 $G_s{}^n$은 물론 군을 이루고, 이것을 닮음 변환군이라 부른다. 또, 임의의 $O \in X$에 대하여 O의 고정군을 $S^n(O)$ 라고 하면 $G_s{}^n / T^n \cong S^n(O)$이다.

4. 사영 변환

1) 사영 공간의 정의

실수체 R위에서의 $n+1$차원 vector공간 V^{n+1}에 대하여, $^*V^{n+1} = V^{n+1} - \{0\}$을 생각한다. 이제, $^*V^{n+1}$에 속하는 임의의 두 vector x, y사이의 한 관계 ~ 를

$$x \sim y \leftrightarrow \exists \lambda \in R : x = \lambda y \ , \ \lambda \neq 0$$

에 의하여 정의하면, ~ 는 한 동치관계이다. 이 동치관계 ~ 에 의하여 $^*V^{n+1}$을 같은 종류끼리 나누어서 얻어지는 동치류 전체의 집합 $^*V^{n+1}/\sim$를 n차원 사영 공간이라 부르고, P^n으로 표시한다. 그러나, 다음에서는 Affine공간 A^n에 무한원요소를 첨가하여 P^n을 구성하는 방법을 생각한다.

2) 사영 직선과 사영 평면의 구성

사영 직선 P^1은 Affine직선 A^1에 무한 원점 P_∞를 첨가한 것, 즉 $P^1 = A^1 \cup \{P_\infty\}$이다. 이 때, P_∞도 보통의 점과 구별 없이 사용할 수 있게 하기 위하여 P^1은 균질적이고, 닫혀 있는 것으로 생각한다. 사영 평면 P^2도 Affine평면 A^2에 무한 원점 전체의 집합 l_∞를 첨가하므로써 얻어진다. 즉, $P^2 = A^2 \cup l_\infty$이다. 그러나, P^2는 다음 조건을 만족하도록 정한다.

(i) l이 Affine평면 A^2위의 한 직선이고, 또 $P_\infty(l) \in l_\infty$일 때, P^2상

의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q를 지나는 사영 직선 $\bar{l} = l \cup \{P_\infty(l)\}$은 항상 존재하고, 다만 하나 뿐이다.

(ii) P^2는 동일 직선 위에 있지 않은 3점을 포함한다.

(iii) P^2 상의 임의의 사영 직선은 일치하거나, 다만 한 점에서 만난다.

(iv) P^2 상의 사영 직선은 적어도 3점을 포함한다. 이와 같은 사영 평면이 실제로 존재함을 밝힐 수 있다.

3) 사영 변환군

사영 직선 P^1 위에서의 한 변환 g를 상수 $a, b, c, d \in R$에 대하여

$$\begin{cases} g(x) = (ax+b)/(cx+d) \ (x \in R), & \text{단} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \\ g(P_\infty) = a/c \end{cases}$$

로써 정의한다. 이와 같은 일차 분수 변환 전체 $G_p{}^1$은 변환의 합성에 관하여 한 군을 이루고, 이것을 사영 직선 P^1의 사영 변환군이라고 부른다. 이 때, 임의의 $P, Q \in P^1$에 대하여 $g(P) = Q$인 $g \in G_P{}^1$가 존재하고, 또 $g(P_\infty) = P_\infty$가 되는 $g \in G_P{}^1$의 전체는 A^1의 $Affine$변환군 $G_A{}^1$이 된다. 더욱이, 다음의 관계가 성립한다.

$$G_P{}^1 \cong GL(2, R)/Z^2, \quad Z^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R - \{0\} \right\}$$

$g \in G_P{}^1$는 다음 기본 성질을 가진다.

(i) 임의의 서로 다른 3점을 임의의 서로 다른 3점으로 옮기는 사영 변환은 반드시 존재하고, 다만 하나 뿐이다.

(ii) P^1의 사영 변환은 복비를 불변으로 하는 것으로서 특징 지워진다.

사영 공간 P^n에서 P^n에로의 전단사 f가 P^n위의 임의의 한 사영 직선 $\bar{l}$의 상 $f(\bar{l})$도 사영 직선이 되도록 옮길 때, f를 P^n에서의 사영 변환이라고 정의한다. 이와 같은 사영 변환 전체 $G_P{}^n$은 변환의 합성에 관하여 한 군을 이

루고, 이것을 P^n 에서의 사영 변환군이라고 부른다. 이 경우에도 다음의 관계가 성립한다.

$$G_P{}^n \cong GL(n+1, R)/Z^{n+1}$$

$$Z^{n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & a \end{pmatrix} \mid a \in R - \{0\} \right\}$$

여기에서 $GL(n+1, R)/Z^{n+1}$ 을 $n+1$ 차원 일반 사영 변환군이라고 부른다.

4) 사영적 성질

사영 평면 P^2 위의 두 사영 직선 $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ 에 대하여, 이들 위에 있지 않은 임의의 한 점 $P_\circ$ 를 잡고, $P_\circ$ 를 중심으로 하여 $P \in \overline{l_1}$ 를 $Q \in \overline{l_2}$ 로 사영하는 함수 $f : \overline{l_1} \rightarrow \overline{l_2}$ 를 P^2 위에서의 배경 사상이라고 부른다. 사영 평면의 배경 사상을 자연스럽게 확장하여, n차원 사영 공간 P^n 위에서의 배경 사상이 정의된다.

일반적으로, 배경 사상에 의하여 불변인 성질을 사영적 성질이라 한다. 사영 기하학은 사영적 성질을 그 연구 대상으로 한다. 예컨대, 어떤 도형이 직선이다, 점이 직선 위에 있다, 한 점을 지나는 직선속 등은 사영적 성질이지만 길이, 각의 크기, 체적 등 계량적인 개념은 사영적인 성질이 아니다.

III. 현행 교육과정의 변환에 관한 학년(과목)목표 분석

(1) 초등학교 학년목표의 특징[14)]

(i) 여러 가지 물건의 직관적인 관찰과 구성 등의 활용을 통하여 삼각형, 사각형, 원모양의 특징을 알아보고, 이를 활용하여 여러 가지 모양을 만들어 보게 하였다.

(ii) 삼각형, 사각형의 성질과 두 직선의 수직, 평행 관계와 평행선 그리고 도형을 관찰하는 새로운 방법으로 위상적 사영적인 간단한 성질을 알아보게 하였다.

---

14) [2], 교육부, PP, 238~248.

(iii) 평면도형의 합동, 닮음, 대칭에 대한 성질과 기둥모양, 뿔 모양인 입체도형의 성질을 이해하고, 전개도를 그릴 수 있으며 회전체의 성질을 알아보게 하였다.

(2) 중학교 학년 목표의 특징15)

(i) 기본도형과 그의 성질을 직관적으로 이해하게 하며, 도형을 고찰하는 능력을 가지게 한다.

(ii) 삼각형의 합동과 닮음을 이해하게 하고, 평면도형의 성질을 추론하게 하여, 그 내용을 논리적으로 표현하는 능력을 가지게 한다.

(iii) 직각삼각형과 원의 성질을 추론하게 하여, 그 내용을 논리적으로 표현하는 능력을 가지게 한다.

(3) 고등학교 과목목표의 특징

(i) 공통수학에서는 좌표의 개념을 바탕으로 하여, 직선과 원의 방정식, 도형의 이동의 성질을 고찰하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

(ii) 수학Ⅱ에서는 포물선, 타원, 쌍곡선 및 공간도형의 성질을 이해하게 하고, 일차변환을 행렬로서 나타내고, 변환의 개념을 더욱 깊이 이해시키도록 하였다.

(4) 변환에 관련되는 학년목표의 종합적 특징

도형을 조사하는 새로운 방법인 변환에 관한 여러 개념들을 관찰과 조작을 통하여 초등학교 저학년부터 이해시키고, 학년과 학교가 높아지는데 따라서 같은 개념을 나선형으로 취급함으로써 단계적으로 체계화하고 더욱 깊게 이해시키도록 하였다.

Ⅳ. 변환에 관한 설문지 조사

1. 설문지 조사

고등학교 공통수학 단원Ⅳ. 도형의 방정식에서 도형의 이동에 대한, 지도학습 내용의 이해도를 알아보기 위하여 제주도 내 중·고등학교 교사 60명과 남·여 고등학교 8개교 1, 2학년 학생 600명을 대상으로 설문지 조사를 실시하여 교사42명, 학생442명의 설문지를 회수하였다. 설문지의 내용은 교사와 학생에게 공통된 것 7문제, 서로 다른 것 3문제 합계 10문제씩 사지선다형으로 작성하였다. 그리고, 설문지

15) [3], 교육부, PP, 68~69.

의 통계처리는 교사와 학생별로 각 문제마다 정답자 수의 백분율을 산출하여 그 이해도를 표시하였다.

1) 설문지 내용 작성 방침

(1) 지도 · 학습목표를 이해하고 있는가 ? (문제1)

(2) 교과서에서 설명이 불충분하고, 또 이해가 부족하다고 생각되는 개념에 대한 이해도를 알아본다. (문제2, 3 교사문제11)

(3) 개념들의 관계를 이해하고 있는가 ? (문제 4, 5 교사문제12)

(4) 어떤 개념들의 속성들을 구별해서 이해하고 있는가 ? (문제6, 7 교사문제 13)

(5) 선수학습의 내용을 구별하고 있는가 ? (학생문제8, 9, 10)

2) 설문내용의 결과

설문지의 구성내용과 교사와 학생별 이해도(정답과 백분율)는 아래의 표5와 같다.

표5. 설문내용과 이해도

문제 번호	설 문 내 용	이해도(%)	
		교사	학생
1	도형의 평행이동에 대한 지도 · 학습 목적을 안다.	100	32.99
2	도형의 대칭이동에 대한 교과서의 정의를 안다.	100	54.95
3	선대칭도형의 정의를 안다.	100	57.57
4	점대칭이동이 회전이동의 특수 경우임을 안다.	57.14	20.55
5	합동변환의 정의를 안다.	51.16	23.67
6	뒤집어서 옮기는 합동변환의 이름을 안다.	19.09	20.08
7	합동변환의 성질 중 가장 기본이 되는 것을 안다.	47.62	40.43
8	합동변환의 의미를 안다.		31.42
9	함수가 되는 대응을 안다.		48.42
10	일대일 대응한 함수의 그래프를 안다.		29.91
11	도형의 변환의 정확한 정의를 안다.	33.33	
12	닮음변환의 정의를 안다.	38.09	
13	닮음변환의 성질 중 가장 기본이 되는 것을 안다.	66.66	

2. 설문지 조사 결과의 분석

1) 조사결과의 개황

앞의 표11에서 교사와 학생의 이해도를 조사하여 보면 대체로 상관이 높은 것으로 나타나고 있으며, 양자의 이해도는 모두 좋지 않은 편이다.

이 조사에서 특히 이해도가 낮은 것은 뒤집어서 옮겨지는 합동변환의 이름을 묻는 문제6, 도형의 변환의 정확한 정의를 묻는 교사문제11, 닮음변환의 정의를 묻는 교사 문제12, 합동변환의 정의를 묻는 문제5 이다. 그 다음에 저조한 것은 일대일 대응한 함수의 그래프를 묻는 문제10과 합동변환의 의미를 묻는 문제8 이다. 이 밖에도 학생의 이해도가 낮은 것으로는, 점대칭이동이 회전이동의 특수한 경우임을 묻는 문제4, 도형의 평행이동에 대한 학습 목적을 묻는 문제1 등이다.

2) 조사결과의 분석

조사 결과는 표6 에 있다. 여기서 계열에 따른 이해도는 전체적으로 보아서 매우 유의하고, 점대칭이동, 뒤집어서 옮기는 합동변환, 합동변환의 성질에 대해서는 유의하지 않으며, 이것은 모든 문항에 대해 실업계보다는 일반계가 더 이해도가 높다는 것을 보여 준다. 문제에 대한 이해도가 낮은 이유는 주로「도형의 변환」에 대한 교과서의 내용 때문이라고 생각된다. 더욱이, 현행 교과서 바로 앞에 나온 「중학수학」교과서는 이 단원에서 특히 많은 목표의식이 결여된 서술을 하고 있었다.

도형의 변환에 관한 교사의 이해가 부족한 것도 이 단원의 지도를 바르게 하지 못하는 이유중의 하나이다. 또한 참고 도서의 부족은 지도교사 들에게 이 분야에 대한 자기연수의 기회마저 어렵게 하고 있다.

Ⅳ. 결　론

학교 교육 8년차인 중학교 2학년 수학에서는, 단원Ⅶ. 도형의 성질에서 합동 및 여러 가지 사각형의 성질과 처음으로 명제가 도입되면서 증명의 뜻과 그 방법을 학습하게 되고, 단원Ⅷ. 도형의 닮음에서는 직관을 통하여 배워 온 많은 성질들을 다시 논증을 통해 체계적으로 밝혀나간다. 중학교 3학년 단원Ⅵ. 피타고라스의 정리에서 평면도형 및 입체도형이 활용되고, 고등학교 1학년 공통수학 단원Ⅳ. 도형의 방정식에 와서 평행이동과 대칭이동을 간단히 전개하고 된다.

한 평행이동에 의하여 선분의 길이가 같고 평행인 선분으로 옮겨진다는 명제는 종전과 같은 관찰에서도 예상할 수 있다. 그러나, 평행사변형의 성질로부터 이들

표6. 계열에 따른 이해도 차이검정

문항 \ 계열	일반계		실업계		t 값	P 값
	평균	표준편차	평균	표준편차		
평행 이동	0.3907	.4890	0.2691	.4445	.2726	**.007
대칭 이동	0.6605	.4747	0.4350	.4969	4.853	***.001
선대칭 이동	0.7163	.4519	0.4350	.4969	6.192	***.001
점대칭 이동	0.2047	.4044	0.2063	.4055	-.042	.966
합동 변환	0.1953	.3974	0.2780	.4490	-2.038	**.042
뒤집어서 옮기는 합동변환	0.1953	.3974	0.2063	.4055	-.285	.776
합동변환의 성질	0.4140	.4937	0.3946	.4899	.411	.681
합동변환의 의미	0.3907	.4890	0.2377	.4266	3.493	***.001
함 수	0.6186	.4869	0.3498	.4780	5.831	***.000
일대일 대응	0.4233	.4952	0.1749	.3807	5.897	***.000
전 체	0.4209	.4580	0.2987	.4474		

* $P<0.1$ ** $P<0.05$ *** $P<0.01$ (순서대로 90%, 95%, 99% 유의수준)

P는 소수점 넷째자리에서 반올림 함.

<참고>

※ t 값 $= \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}^2+\{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}^2}}$

선분의 두 끝점 사이의 거리가 같은 것을 쉽게 확인 할 수 있으며, 또 선분상의 임

의의 한 점의 행방을 조사함으로써 이 명제는 간단히 증명될 수 있다. 더욱이 평면에서의 한 변환에 의하여 도형만 옮겨지는 것이 아니고, 모든 점이 일정한 규칙에 따라서 옮겨지는 가운데 도형도 변환됨을 깊이 인식해야 한다. 그리고, 합동변환이나 닮음변환의 구체적인 성질들을 전혀 취급하지 않고, 다만 도형을 합동인 도형으로 옮기는 변환 혹은 두 도형에서 한쪽이 다른 쪽을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것과 합동일 때 두 도형은 닮음변환이라고 결론 지우고 만 것은 너무나 직관에 의존하고 있다. 그러므로, 「도형의 변환」의 지도 방법을 개선하려면 지도내용의 전개에서 다음과 같은 조치가 있어야 한다.

1. 상위개념인 변환과 하위개념인 각 이동 및 닮음의 위치에 있게 하는 변환의 뜻을 명확히 해야 한다. 특히, 닮음의 위치에 있게 하는 변환에 의하여 임의의 한 점이 어떤 규칙에 의하여 옮겨지는가를 밝혀야 한다.
2. 중위개념인 합동변환이나 닮음변환은 결론적인 속성인 합동이나 닮음이라는 용어를 써서 정의하여서는 안 된다.
3. 각 변환의 성질들은 가장 기본이 되는 것부터 차례로 체계적, 논리적으로 지도되어야 한다.
4. 합동변환과 닮음변환의 최후 지도 단계는, 두 도형이 주어 있을 경우에 그 한 쪽을 다른 쪽으로 옮기려면 구체적으로 어떤 변환으로 가능한가를 찾는 것이 되어야 한다. 이 단계에서 비로소 이들 두 가지 변환의 구조가 완전히 밝혀지기 때문이다.
5. 좌표평면에서의 변환의 고찰은 함께 취급되는 것이 좋다. 여기에서 학습한 결과는 함수와 그래프의 지도·학습에서 활용될 수 있도록 체계화되어야 한다.

참 고 문 헌

[1]. 교육부(1992), 국민학교 교육과정

[2]. 교육부(1993), 국민학교 교육과정 해설(Ⅰ)
- 총론, 국어, 수학 -

[3]. 교육부(1994), 중학교 수학과 교육과정해설

[4]. 교육부(1992), 고등학교 교육과정(Ⅰ)

[5]. 기우항(1997), 기하학의 흐름, 대한수학회

[6]. 김연식 · 김흥기(1996), 중학교 수학1, 2, 3 교사용지도서, 동아출판사
[7]. 김평국(1989), 기하학적 변환과 2×2행렬, 충북대학교 교육대학원
[8]. 교학사(1994), 중학교 수학과 교육과정해설
[9]. 박두일 · 신동선(1991), 고등학교 일반수학 교사용지도서, 교학사
[10]. 박두일 · 신동선(1991), 고등학교 수학Ⅱ(상) 교사용지도서, 교학사
[11]. 신동선 외(1986), 수학Ⅱ-1 교사지침서, 어문각
[12]. 양승갑 외(1995), 고등학교 공통수학, 금성교과서(주)
[13]. 임재규 · 기우항 · 정장춘 · 김해룡(1980), 수학교육의 현황 분석과 개선 방안(Ⅰ)
- 도형의 변환의 지도내용 분석 -
[14]. 최종렬(1992), 중등교육과정에서의 도형의 변환에 대한 연구
석사학위논문, 경성대학교
[15]. 현종익(1997), 현대수학 기초론, 경문사