碩士學位請求論文

極限概念을 使用하지 않은 代數函數의 導函數

指導敎授 高 鳳 秀

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

玄 泰 榮

1995年 8月

極限概念을 使用하지 않은 代數函數의 導函數

指導敎授 高 鳳 秀

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1995年 6月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 玄 泰 榮

玄泰榮의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1995年 7月 日

審査委員長 梁 永 五 印

審査委員 고 윤 희

審査委員 고 봉 수 印

<초록>

극한 개념을 사용하지 않은 대수함수의 도함수

현 태 영

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 봉 수

실수들의 집합의 부분집합인 구간 상에서 정의된 실수치 대수함수에 대한 도함수의 정의를 극한개념을 사용하지 않고 유도한다. 그 정의로부터 대수방정식의 중근의 성질과 일차함수의 기하학적개념, 인수분해등 중·고등하교 수학교실에서 얻을수 있는 기초적인 수학적 방법에 의하여 특수한 형태의 대수함수 족에 대한 도함수및 도함수의 선형성을 얻는다. 기하학적 방법으로 유도된 위의 도함수의 정의를 사용하여 대수함수의 단조성, 극값, 미분의 평균치정리들도 증명한다.

목　　　차

I. 서 론

논문"극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의및 성질들의 연구"(참고문헌 2)에서 극한 개념을 사용하지 않고 일반적인 다항식들의 도함수를 유도하였고, 논문"극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수"(참고문헌 3)에서는 다항식들의 도함수의 정의및 성질들의 개념을 포함하고 일반화하는 연구로서 일반적인 유리함수에 대한 도함수를 극한개념을 도입하지 않고 유도하였다. 유도 과정에서 사용한 방법들은 중학교 3학년 또는 고등학교 1학년 수학교육 과정에서 학습한 대수방정식의 전개, 인수분해, 중근의 성질, 계수비교 그리고 함수그래프의 직관적 이해이다. 또한 고차다항식및 유리함수들의 값의 변화상태 그리고 최대, 최소 등도 연구되었다.

고등학교 수학교육에 있어서 중심이 되는 미분법은 극한개념을 도입하여 그 이론을 전개하고 있기 때문에 학생들이 미분법을 이해하기 위해서는 먼저 극한개념에 대한 학습이 선행되어야 한다. 그러나 고등학교 교육과정에서 극한개념을 학습하기 전에 미분법을 필요로 하는 경우가 많으므로 극한개념을 사용하지 않는 미분법 연구는 연구대상으로 충분한 가치가 있다.

본 논문의 연구목적은 극한개념을 사용하지 않는 다항식및 유리함수들의 도함수 정의와 성질들의 개념을 포함하고 일반화하는 연구로서 특수한 대수함수들까지 확장하는데 있다. 대수함수들에 대한 도함수는 극한개념을 도입하지 않고 단순히 대수 방정식의 전개, 분모의 유리화, 조립제법을 이용한 인수분해 및 중근의 성질등 기하학적 직관으로 이해할 수 있는 지식들만 가지고 유도한다. 부가적인

목적으로써 위의 정의를 사용하여 미분법에 대한 개념들을 쉽게 이해시킬 수 있는 방법들과 대수함수들의 값의 변화 상태및 최대 최소들을 추정할 수 있는 방법을 연구하는 데 있다.

본 논문의 본론 제1부에서는 다항식 및 유리함수들의 도함수들을 극한개념없이 연구된 선행연구들의 결과들을 요약한다.

본 논문의 본론 제2부에서는 대수함수의 정의및 도함수, 간단한 대수함수의 도함수의 기하학적 의미, 여러 대수함수들에 대한 미분공식을 유도하며 그 결과들은 극한을 사용하여 얻을 수 있는 미분공식들의 결과들과 같음을 증명한다.

본 논문의 본론 제3부에서는 대수함수의 도함수와 그래프의 관계로서 함수의 증감, 최대 최소, 미분의 평균치 정리들을 얻으며 그 결과들은 극한개념을 사용하여 증명한 결과들과 같음을 보인다. 또한 그 증명 과정들을 비교할 때 본 논문의 증명방법은 중학생, 고등학생들이 미분의 성질들을 이해하는 데 극한개념을 사용한 증명보다 기하학적이다.

II. 본　　론

제1부 다항식 및 유리함수의 도함수

1. 다항식의 도함수

1절에서 언급되는 다항식에 대한 도함수의 정의및 정리들은 논문 "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의및 성질들의 연구"(참고문헌 2)에서 유도 및 증명되었다.

정의 1-1. $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때, 방정식 $f(x)=0$가 $x=x_0$에서 중근을 갖는다는 의미는

$$f(x)=(x-x_0)^n Q(x)\ (n \geq 2\text{인 자연수})$$

의 형태로 바꿀 수 있다는 것이다. 여기서 $Q(x)$는 다항식이다.

정의 1-2. $f(x)$가 x에 관한 다항식인 때, 방정식

$$f(x)-ax-b=0$$

가 $x=x_0$에서 중근을 갖도록 하는 상수 a, b가 존재하면, "함수 $y=f(x)$는 $x=x_0$에서 미분가능하다"고 하며 "a를 $y=f(x)$의 $x=x_0$에서 변화율"이라고 하고 다음과 같은 기호로 나타낸다.

$$a=f'(x_0),\ a=y'_{x=x_0},\ a=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}.$$

참고. $f'(x_0)$의 기하학적 의미

다항식 $f(x)$에 관하여 방정식

$$f(x) - f'(x_0)x - b = (x - x_0)^n P(x) = 0 \ (n \geq 2\text{인 자연수})$$

이 $x = x_0$에서 중근을 갖는다는 의미는 함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = f'(x_0)x + b$의 그래프가 점 $(x_0, f(x_0))$에서 접한다는 기하학적 의미와 같으므로 $f'(x_0)$의 기하학적 의미는 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(x_0, f(x_0))$에서 접선의 기울기다.

정의 1-3. 상수함수 $y = f(x) = c$와 일차함수 $y = g(x) = ax + b$들에 관한 도함수는 $f'(x_0) = 0$, $g'(x_0) = a$로 정의한다.

참고. 상수함수와 일차함수에 관한 도함수의 정의는 다음과 같은 의미를 갖는다. 방정식

$$f(x) - 0 \cdot x - c = 0,$$

$$g(x) - ax - b = 0$$

들은 다음과 같은 형태

$$f(x) - 0 \cdot x - c = (x - x_0)^n x \cdot 0,$$

$$g(x) - ax - b = (x - x_0)^n x \cdot 0$$

으로 표현할 수 있기 때문에

$$f'(x) = 0, \quad g'(x) = a$$

로 정의한다.

정의 1-4. $x = x_1$에서의 $f(x)$의 변화율 $f'(x_1)$의 값은, x_1의 값에 종속된다. 따라서 x_1을 변수로 보면 $f'(x_1)$은 x_1의 함수로 볼 수 있다. 즉, 집합 D를 함수 f의 정의구역이라 하고, 집합

$$D' = \{x \in D \mid y = f(x)\text{는 } x\text{에서 미분 가능하다}\}$$

을 형성하면, 임의의 원소 $x \in D'$에 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 대응 관계가 나타난다. 이때 이 함수 f'를 함수 f의 도함수라고 한다.

함수 $y = f(x)$의 도함수를

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

등으로 나타낸다.

정리 1-1. 다항식 $f(x), g(x)$가 $x = x_0$에서 미분가능하면

[1] $\{C \cdot f(x_0)\}' = Cf'(x_0)$ (여기서 C 는 상수).

[2] $\{f(x_0) \pm g(x_0)\}' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ (복호동순).

[3] $\{f(x_0)g(x_0)\}' = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

2. 유리함수의 도함수

2절에서 언급되는 유리함수들에 대한 도함수의 정의및 정리들은 논문 "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수"(참고문헌 3)에서 유도 및 증명되었다.

정의 1-5. 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$가 x_0에서 미분가능하다는 의미는 상수 a와 b 그리고 유리함수 $r(x)$가 유일하게 존재하며 다음 조건을 만족하는 경우라고 정의한다.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x).$$

이때, a를 $x = x_0$에서 유리함수 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$의 도함수라 하고

$$a = \left(\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\right)'$$

으로 표시한다.

정리 1-2. $x = x_0(\neq 0)$에서 함수 $\dfrac{1}{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)' = -\frac{1}{x_0^2}.$$

참고. $x = x_0(\neq 0)$에서 함수 $\dfrac{1}{x}$의 도함수의 기하학적 의미

$x = x_0$ 이면

$$\frac{1}{x_0} - (ax_0 + b) = 0,$$

$x > 0$ 이면

$$\frac{1}{x} - (ax + b) = \frac{(x - x_0)^2}{xx_0^2} > 0,$$

$x < 0$ 이면

$$\frac{1}{x} - (ax + b) = \frac{(x - x_0)^2}{xx_0^2} < 0.$$

위의 식으로부터 함수 $y = \dfrac{1}{x}$의 그래프와 직선 $y = ax + b$는 $x = x_0$에서 접해있다. 따라서, $x = x_0$에서 함수 $y = \dfrac{1}{x}$의 도함수는 점 $(x_0, \dfrac{1}{x_0})$에서 함수의 그래프의 접선의 기울기 $-\dfrac{1}{x_0^2}$로 받아들일 수 있다.

정리 1-3. $P(x)$를 다항식 그리고 $P(x_0) \neq 0$이라 하면 $x = x_0$에서 유리함수 $\dfrac{1}{P(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\frac{1}{P(x_0)}\right)' = -\frac{P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

정리 1-4. 유리함수 $\dfrac{1}{P(x)}, \dfrac{1}{Q(x)}$에 대하여 $P(x_0) \neq 0, Q(x_0) \neq 0$라고 하면

[1] $\left(\dfrac{C}{P(x_0)}\right)' = C\left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)'$ (여기서 C는 상수).

[2] $\left(\dfrac{1}{P(x_0)} \pm \dfrac{1}{Q(x_0)}\right)' = \left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)' \pm \left(\dfrac{1}{Q(x_0)}\right)'$ (복호동순).

[3] $\left(\dfrac{x_0}{P(x_0)}\right)' = \left(\dfrac{1}{P(x_0)}\right)' x_0 + \dfrac{1}{P(x_0)}$.

계. 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$가 $x = x_0(P(x_0) \neq 0)$에서 미분가능하면

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}x_0\right)' = \left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' x_0 + \frac{Q(x_0)}{P(x_0)}.$$

정리 1-5. 유리함수 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$는 $x = x_0(p(x_0) \neq 0)$에서 미분가능하고

$$\left(\frac{Q(x_0)}{P(x_0)}\right)' = \frac{Q'(x_0)P(x_0) - Q(x_0)P'(x_0)}{[P(x_0)]^2}.$$

제 2부 대수함수의 도함수

제2부에서는 대수함수에 대한 도함수의 개념을 극한개념을 사용하지 않고, 단지 대수방정식의 중근의 개념과 일차함수의 기하학적 개념을 사용하여 도함수를 정의하고 특수한 형태의 대수함수 족에 대한 도함수및 도함수의 선형성을 얻는다.

여기서 다루는 함수들의 독립변수와 종속변수는 실수들을 대표한다.

정의 2-1. $p(x,y)$가 x,y에 대한 n차의 다항식일 때 $p(x,y)=0$을 대수방정식이라 하며, 한 구간 상에서 $p(x,f(x))=0$ (또는 $p(g(y),y)=0$)를 만족하는 연속함수 $y=f(x)$ (또는 $x=g(y)$)를 대수함수라 한다.

참고. 변수 x와 상수 a에 대하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 세 연산을 유한 번 시행한 꼴로 나타나는 대응 규칙

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\text{은 상수}, a_0\neq 0)$$

으로 정해지는 함수를 다항함수라 하고, 나눗셈까지 허용한 네 가지 연산을 유한 번 허용하면 유리함수가 얻어지며, 사칙연산 외에 거듭제곱근 연산까지 허용하면 대수함수를 얻게 된다.

정의 2-2. 대수함수 $f(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능 하다는 의미는 방정식

$$f(x)-ax-b=(x-x_0)^2r(x)$$

를 만족하는 상수 a 와 b 그리고 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수 $r(x)$가 유일하게 존재하는 것이다. 이때 a를 $x=x_0$에서 대수함수 $f(x)$의 도함수라 하고

$$a=f'(x_0),\quad a=y'_{x=x_0},\quad a=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$$

등으로 표시한다.

정리 2-1. $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $f(x) = \sqrt{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$(\sqrt{x_0})' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

증 명. 함수 $\sqrt{x}$가 $x = x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

(1) $$\sqrt{x} - ax - b = (x - x_0)^2 r(x)$$

를 만족하는 상수 a, b 그리고 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수 $r(x)$를 찾는다. $y = \sqrt{x}$라 놓으면 $x = y^2$ $(y > 0)$이고, $y_0 = \sqrt{x_0}$ $(x_0 > 0)$라 하자. y와 y_0를 (1)식에 대입하면

(2) $$\begin{aligned} y - (ay^2 + b) &= (y^2 - y_0^2)^2 r(y^2) \\ &= (y - y_0)^2 (y + y_0)^2 r(y^2) \\ &= (y - \sqrt{x_0})^2 (y + \sqrt{x_0})^2 r(y^2). \end{aligned}$$

(2)의 좌변을 정리하면

(3) $$-ay^2 + y - b = (y - \sqrt{x_0})^2 (y + \sqrt{x_0})^2 r(y^2).$$

(3)의 양변을 $-a(\neq 0)$로 나누면

(4) $$y^2 - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y - \sqrt{x_0})^2 (y + \sqrt{x_0})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^2).$$

함수 y^2은 $y_0 = \sqrt{x_0}$에서 미분가능하므로, 정리 1-3에 의하여

$$\frac{1}{a}, \quad -\frac{b}{a}, \quad (y + \sqrt{x_0})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^2)$$

은 유일하게 존재하고, 그 도함수는 $\frac{1}{a}$이다. 즉

$$\frac{1}{a} = 2\ y_0 = 2\sqrt{x_0}.$$

따라서

$$a = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

a의 값을 (4)식에 대입하여 b의 값을 구하면

$$y^2 - 2\sqrt{x_0}y + 2\sqrt{x_0}b = (y - \sqrt{x_0})^2$$
$$= y^2 - 2\sqrt{x_0}y + x_0.$$

그러므로

$$b = \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$

(4)식에 a, b의 값을 대입하면

$$y^2 - 2\sqrt{x_0}y + x_0 = (y - \sqrt{x_0})^2(y + \sqrt{x_0})^2(-2\sqrt{x_0})r(y^2).$$

따라서

$$-2(y + \sqrt{x_0})^2\sqrt{x_0}\ r(y^2) = 1.$$

즉

$$\sqrt{x_0}(y + \sqrt{x_0})^2 r(y^2) = -\frac{1}{2}.$$

$y = \sqrt{x}$를 윗식에 대입하여 $r(x)$를 구하면

$$\sqrt{x_0}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2 r(x) = -\frac{1}{2}.$$

따라서

$$r(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2}.$$

간단한 검산 과정을 거치면, $a, b, r(x)$는 식(1)을 만족하고 유일하게 결정됨을 안 수 있다. 따라서, 함수 $f(x) = \sqrt{x}(x > 0)$는 $x = x_0$에서 미분가능하고,

$$(\sqrt{x_0})' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

참고. $x = x_0(x > 0)$에서 대수함수 $y = \sqrt{x}$의 도함수의 기하학적 의미를 고찰한다.

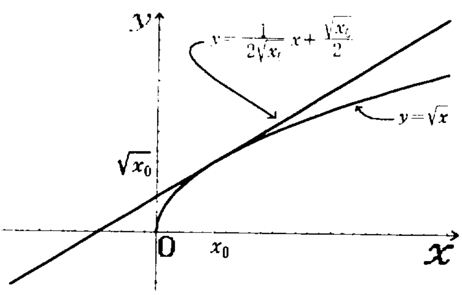
$x > 0$이면

$$\begin{aligned}&\sqrt{x} - (ax + b)\\&= \sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x_0}} - \frac{\sqrt{x_0}}{2}\\&= -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - 2\sqrt{x}\sqrt{x_0} + x_0)\\&= -\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})^2 < 0.\end{aligned}$$

$x = x_0$이면

$$\sqrt{x} - (ax + b) = 0.$$

위의 식들로부터 대수함수 $y = \sqrt{x}$의 그래프와 직선 $y = ax + b$는 $x = x_0$에서 접해 있다. 결론적으로 위의 정리 *2-1*은 기하학적으로 함수 $f(x) = \sqrt{x}$의 그래프와 직선 $g(x) = ax + b$가 점 $(x_0, \sqrt{x_0})$에서 접한다는 기하학적 의미를 갖는다.



따라서, $x = x_0$에서 대수함수 $y = \sqrt{x}$의 도함수는 점 $(x_0, \sqrt{x_0})$에서 그래프의 접선의 기울기 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$로 받아들일 수 있다.

정리 2-2. x_0를 포함하는 한 구간에서 $f(x) > 0$이고, $f(x)$를 유리함수라 하면, $x = x_0$에서 대수함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{f(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

증명. $y = f(x)$를 유리함수라 하고, $y_0 = f(x_0)$라 놓고, y_0에서의 함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수를 계산하다. 정리 2-1에 의하여

(1)
$$\begin{aligned}\sqrt{y} - ay - b &= \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{y_o}} - \frac{\sqrt{y_o}}{2} \\ &= -\frac{y - 2\sqrt{y}\sqrt{y_o} + y_0}{2\sqrt{y_o}} \\ &= -\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{y_o})^2}{2\sqrt{y_o}} \\ &= -\frac{(y - y_0)^2}{2\sqrt{y_o}(\sqrt{y} + \sqrt{y_o})^2} \\ &= -\frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)^2}{2\sqrt{f(x_o)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_o)}\right)^2}.\end{aligned}$$

한편 정리 1-3에 의하여 유리함수 $f(x)$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

(2)
$$f(x) - f'(x_0)x - b_0 = (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이며 b_0는 상수이다. 따라서

$$f(x) = f'(x_0)x + b_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

그리고

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b_0.$$

그러므로

(3) $$b_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

식 (3)을 식 (2)에 대입하고, 그 결과식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}&\sqrt{f(x)} - \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\\ &- \frac{1}{2\sqrt{f(x_0)}}\left[f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)\right]\\ &= -\frac{\Big(f(x) - f(x_0)\Big)^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}.\end{aligned}$$

윗식의 좌변을 전개하면

$$\begin{aligned}&\sqrt{f(x)} - \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x - \frac{f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} - \frac{(x - x_0)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}} - \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\\ &= -\frac{\Big(f(x) - f(x_0)\Big)^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}.\end{aligned}$$

윗식의 우변에 식(2)를 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}&\sqrt{f(x)} - \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x - \left(\frac{f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\right)\\ &= -\frac{[f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)]^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2} + \frac{(x - x_0)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\Big[(x-x_0)\Big(f'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\Big)\Big]^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}$$

$$+\frac{(x-x_0)^2\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}$$

$$=(x-x_0)^2\left[\frac{-[f'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)]^2+\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}\right].$$

결론적으로

$$a=\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}},\ b=\frac{f(x_0)-f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}}+\frac{\sqrt{f(x_0)}}{2},$$

$$Q(x)=\frac{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x)-[f'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)]^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}.$$

가 유일하게 결정되므로 $x=x_0$에서의 함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{f(x_0)}\right)'=\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

정리 2-3. 임의의 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $x=x_0(>0)$에서의 대수함수 $x^{\frac{1}{n}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\,x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

증 명. $\sqrt[n]{x}$가 $x=x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

$$\sqrt[n]{x}-ax-b=(x-x_0)^2 r(x).$$

를 만족하는 상수 a, b 그리고 대수함수 $r(x)$를 구한다.

$y = \sqrt[n]{x}$라 놓으면 $x = y^n$이 되고, $y_0 = \sqrt[n]{x_0}$라 하여 윗식에 대입하면

$$y - ay^n - b = (y^n - y_0^n)^2 r(y^n).$$

양변을 $-a$로 나누고 정리하면

$$y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y^n - y_0^n)^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n). \tag{1}$$

(1)에서 $y^n - y_0^n$을 인수분해 한다.

i) $n = 2k+1$일때

$$\begin{aligned} &y^n - y_0^n \\ &= y^{2k+1} - y_0^{2k+1} \\ &= (y - y_0)(y^{2k} + y^{2k-1}y_0 + \cdots + y_0^{2k}). \end{aligned} \tag{2}$$

ii) $n = 2k$일 때

$$\begin{aligned} &y^n - y_0^n \\ &= y^{2k} - y_0^{2k} \\ &= (y - y_0)(y + y_0)(y^{k-1} + y^{k-2}y_0 + \cdots + y_0^{k-1}) \\ &(y^{k-1} - y^{k-2}y_0 + y^{k-3}y_0^2 - \cdots + yy_0^{k-2} - y_0^{k-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

$n = 2k+1$일 때, (2)식을 (1)식에 대입하면

$$y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y - y_0)^2 (y^{2k} + y^{2k-1}y_0 + \cdots + y_0^{2k})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n). \tag{4}$$

$n = 2k$인 때, (3)식을 (1)식에 대입하면

$$(5) \quad y^n - \frac{1}{a}y + \frac{b}{a} = (y-y_0)^2(y+y_0)^2(y^{k-1} + y^{k-2}y_0 + \cdots + y_0^{k-1})^2$$
$$(y^{k-1} - y^{k-2}y_0 + y^{k-3}y_0^2 - \cdots + yy_0^{k-2} - y_0^{k-1})^2 \left(-\frac{1}{a}\right) r(y^n).$$

(4)와 (5)에 의하여 함수 y^n은 $y = y_0$에서 미분가능하고 $\frac{1}{a}$, $-\frac{b}{a}$, $r(y^n)$이 유일하게 존재하며, 그 도함수는 $\frac{1}{a}$이다. 즉

$$\frac{1}{a} = ny_0^{n-1}.$$

따라서

$$a = \frac{1}{n}y_0^{1-n} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

(1)식에 $y = y_0$와 a의 값을 대입하여 b의 값을 구하면

$$y_0^n - ny_0^{n-1}y_0 + bny_0^{n-1} = 0.$$

윗식을 계산하면

$$bny_0^{n-1} = ny_0^n - y_0^n.$$

그러므로

$$b = \frac{(n-1)y_0}{n} = \frac{(n-1)\sqrt[n]{x_0}}{n}.$$

(1)식에 a, b의 값을 대입하여 조립제법으로 $r(x)$를 구한다.

$$y^n - n\, y_0^{n-1}\, y + (n-1)y_0^n = (y^n - y_0^n)^2(-ny_0^{n-1})r(y^n).$$

i) $n = 2$일 때

$$y^2 - 2y_0 y + y_0^2 = (y^2 - y_0^2)^2(-2y_0)r(y^2).$$

즉

$$(y - y_0)^2 = (y - y_0)^2(y + y_0)^2(-2y_0)r(y^2).$$

그러므로

$$r(y^2) = -\frac{1}{2y_0(y + y_0)^2}.$$

$y = \sqrt{x}$이므로

$$r(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)^2}$$

ii) $n = 3$일 때

$$y^3 - 3y_0^2 y + 2y_0^3 = (y^3 - y_0^3)^2(-3y_0^2)r(y^3)$$

이 되고, 윗식의 좌, 우변을 조립제법을 사용하여 인수 분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3y_0^2 & 2y_0^3 \\
y_0 & & y_0 & y_0^2 & -2y_0^3 \\
\hline
 & 1 & y_0 & -2y_0^2 & \boxed{0} \\
y_0 & & y_0 & 2y_0^2 & \\
\hline
 & 1 & 2y_0 & \boxed{0} &
\end{array} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -y_0^3 \\
y_0 & & y_0 & y_0^2 & y_0^3 \\
\hline
 & 1 & y_0 & y_0^2 & \boxed{0}
\end{array} \qquad \cdots\cdots ②$$

따라서

$$(y-y_0)^2(y+2y_0)=(y-y_0)^2(y^2+y_0y+y_0^2)^2(-3y_0^2)r(y^3).$$

그러므로

$$r(y^3)=-\frac{y+2y_0}{3y_0^2(y^2+y_0y+y_0^2)^2}.$$

$y=\sqrt[3]{x}$이므로

$$r(x)=-\frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x_0}}{3\sqrt[3]{x_0^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}\right)^2}.$$

iii) $n=4$일 때

$$y^4-4y_0^3y+3y_0^4=(y^4-y_0^4)^2(-4y_0)^3r(y^4)$$

의 좌, 우변을 조립제법을 사용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & -4y_0^3 & 3y_0^4 \\
y_0 & & y_0 & y_0^2 & y_0^3 & -3y_0^4 \\
\hline
 & 1 & y_0 & y_0^2 & -3y_0^3 & \boxed{0} \\
y_0 & & y_0 & 2y_0^2 & 3y_0^3 & \\
\hline
 & 1 & 2y_0 & 3y_0^2 & \boxed{0} &
\end{array} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -y_0^4 \\
y_0 & & y_0 & y_0^2 & y_0^3 & y_0^4 \\
\hline
 & 1 & y_0 & y_0^2 & y_0^3 & \boxed{0}
\end{array} \qquad \cdots\cdots ②$$

따라서

$$(y-y_0)^2(y^2+2y_0y+3y_0^2)=(y-y_0)^2(y^3+y_0y^2+y_0^2y+y_0^3)^2(-4y_0^3)r(y^4).$$

그러므로

$$r(y^4)=-\frac{y^2+2y_0y+3y_0^2}{4y_0^3(y^3+y_0y^2+y_0^2y+y_0^3)^2}.$$

$y=\sqrt[4]{x}$이므로

$$r(x)=-\frac{\sqrt[4]{x^2}+2\sqrt[4]{x_0x}+\sqrt[4]{x_0^2}}{4\sqrt[4]{x_0^3}\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x_0x^2}+\sqrt[4]{x_0^2x}+\sqrt[4]{x_0^3}\right)^2}.$$

iv) $n=5$일 때

$$y^5-5y_0^4+4y_0^5=(y^5-y_0^5)^2(-5y_0^4)r(y^5).$$

윗식의 좌변과 우변을 조립제법을 사용하여 인수 분해하면

$$\begin{aligned}&(y-y_0)^2(y^3+2y_0y^2+3y_0^2y+4y_0^3)\\&=(y-y_0)^2(y^4+y_0y^3+y_0^2y^2+y_0^3y+y_0^4)^2(-5y_0^4)r(y^5).\end{aligned}$$

그러므로

$$r(y^5)=-\frac{y^3+2y_0y^2+3y_0^2y+4y_0^3}{5y_0^4(y^4+y_0y^3+y_0^2y^2+y_0^3y+y_0^4)^2}.$$

$y=\sqrt[5]{x}$이므로

$$r(x)=-\frac{\sqrt[5]{x^3}+2\sqrt[5]{x_0x^2}+3\sqrt[5]{x_0^2x}+4\sqrt[5]{x_0^4}}{5\sqrt[5]{x_0^4}\left(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x_0x^3}+\sqrt[5]{x_0^2x^2}+\sqrt[5]{x_0^3x}+\sqrt[5]{x_0^4}\right)^2}.$$

v) $n=m$일 때

$$y^m-my_0^{m-1}+(m-1)y_0^m=(y^m-y_0^m)^2(-my_0^{m-1})r(y^m).$$

m이 일반적인 자연수인 경우도 조립제법을 사용하여 좌변과 우변을 인수 분해할 수 있으므로

$$\begin{aligned} r(y^m) &= -\frac{y^{m-2} + 2y_0 y^{m-3} + \cdots + (m-1)y_0^{m-2}}{m y_0^{m-1}\left(y^{m-1} + y_0 y^{m-2} + \cdots + y_0^{m-2} y + y_0^{m-1}\right)^2} \\ &= -\frac{\sum_{k=1}^{m-1} k y_0^{k-1} y^{m-1-k}}{m y_0^{m-1}\left(\sum_{k=1}^{m} y_0^{k-1} y^{m-k}\right)^2}. \end{aligned}$$

$y = \sqrt[m]{x}$이므로

$$r(x) = -\frac{\sum_{k=1}^{m-1}\left(k \sqrt[m]{x_0^{k-1}}\ \sqrt[m]{x^{m-1-k}}\right).}{m \sqrt[m]{x_0^{m-1}}\left(\sum_{k=1}^{m} \sqrt[m]{x_0^{k-1}}\ \sqrt[m]{x^{m-k}}\right)^2}.$$

결론적으로 함수 $x^{\frac{1}{n}}$의 $x = x_0$에서의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\ x_0^{\frac{1-n}{n}}.$$

정리 2-4. x_0를 포함하는 한 구간에서 유리함수 $f(x)$가 정의되고, $f(x) > 0$이면, $x = x_0$에서 대수함수 $[f(x)]^{\frac{1}{n}}$ ($n \geq 3$ 자연수)의 도함수는 다음과 같다.

$$\left([f(x_0)]^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0).$$

증명. $y = f(x)$를 유리함수라 하고, $y_0 = f(x_0)$라 놓고, y_0에서의 함수 $\sqrt[n]{f(x)}$의 도함수를 계산한다. 정리 2-3에 의하여

(1) $$\sqrt[n]{y} - ay - b = (y - y_0)^2 Q(y).$$

즉

$$\sqrt[n]{f(x)} - \frac{1}{n}\left[f(x_0)\right]^{\frac{1-n}{n}} f(x) - \frac{n-1}{n}\left(f(x_0)\right)^{\frac{1}{n}} = \Big(f(x) - f(x_0)\Big)^2 Q(f(x)).$$

여기서 $Q(f(x))$는 x_0를 포함하는 구간에서 정의된 유리함수이다.

한편 정리 1-3에 의하여 유리함수 $f(x)$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

(2) $$f(x) - f'(x_0)x - b_0 = (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이며 b_0는 상수이다.
따라서

$$f(x) = f'(x_0)x + b_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

그리고

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b_0.$$

그러므로

(3) $$b_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

식(3)을 식(2)에 대입하고, 그 결과식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{f(x)} - \frac{n-1}{n}(f(x_0))^{\frac{1}{n}} \\
&- \frac{1}{n}\left[f(x_0)\right]^{\frac{1-n}{n}}\left[f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)\right] \\
&= \left[f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^2 Q_0(x)\right]^2 Q(f(x)) \\
&= (x - x_0)^2\left[f'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)\right]^2 Q(f(x)).
\end{aligned}$$

윗식의 좌변을 전개하여 정리하면

$$\sqrt[n]{f(x)} - \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0)x - \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0)x_0$$
$$- \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}}(x-x_0)^2 Q_0(x) - (f(x_0))^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}(f(x_0))^{\frac{1}{n}}$$
$$= (x-x_0)^2 [f'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)]^2 Q(f(x)).$$

윗식을 정리하면

$$\sqrt[n]{f(x)} - \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0)x - \left[(f(x_0))^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}(f(x_0))^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0)x_0\right]$$
$$= (x-x_0)^2 \left[\{f'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)\}^2 Q(f(x)) + \frac{1}{n}\{f(x_0)\}^{\frac{1-n}{n}} Q_0(x)\right].$$

결론적으로

$$a = \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0), \quad b = (f(x_0))^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}(f(x_0))^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0)x_0,$$

$$Q(x) = \{f'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)\}^2 Q(f(x)) + \frac{1}{n}\{f(x_0)\}^{\frac{1-n}{n}} Q_0(x)$$

가 유일하게 결정되므로 $x = x_0$에서의 함수 $[f(x_0)]^{\frac{1}{n}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left([f(x_0)]^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}[f(x_0)]^{\frac{1-n}{n}} f'(x_0).$$

정리 2-5. $x = x_0(>0)$에서 $f(x) = x + \sqrt{x}$의 도함수는 다음과 같다.

$$(x_0 + \sqrt{x_0})' = \frac{2\sqrt{x_0}+1}{2\sqrt{x_0}}.$$

증 명. $x + \sqrt{x}$가 $x = x_0$에서 미분가능함을 보이기 위하여

(1) $$x + \sqrt{x} - ax - b = (x-x_0)^2 q(x).$$

를 만족하는 상수 a, b 및 대수함수 $q(x)$를 구한다. 정리 2-1에 의하여 $\sqrt{x}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로

(2) $$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} + (x - x_0)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2} \right).$$

(2)식을 (1)식에 대입하여 정리하면

$$x + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2} + (x - x_0)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2} \right) - ax - b$$
$$= (x - x_0)^2 q(x).$$

윗식의 좌변을 정리하면

$$\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - a\right)x + \left(\frac{\sqrt{x_0}}{2} - b\right) + (x - x_0)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{x_0}(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})^2} \right)$$
$$= (x - x_0)^2 q(x).$$

그러므로

$$a = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}},\ b = \frac{\sqrt{x_0}}{2},\ q(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)^2}$$

들은 유일하게 존재하고 그 도함수는 a이다. 즉,

$$a = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{2\sqrt{x_0} + 1}{2\sqrt{x_0}}.$$

정리 2-6. $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $\sqrt{x + \sqrt{x}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}} \left(\frac{2\sqrt{x_0} + 1}{2\sqrt{x_0}} \right).$$

증 명. $y = f(x) = x + \sqrt{x}$, $y_0 = f(x_0) = x_0 + \sqrt{x_0}$라 놓고 y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \sqrt{y} - ay - b \\
&= \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{y_0}} - \frac{\sqrt{y_0}}{2} \\
&= -\frac{y - 2\sqrt{y}\sqrt{y_0} + y_0}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})^2}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{(y - y_0)^2}{2\sqrt{y_0}(\sqrt{y} + \sqrt{y_0})^2} \\
&= -\frac{\left(f(x) - f(x_0)\right)^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

정리 2-5에 의하여 대수함수 $f(x) = x + \sqrt{x}$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다고 가정하자.

$$(2) \qquad f(x) - f'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x).$$

여기서 $Q_0(x)$는 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다.

그러면

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b.$$

따라서

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

식(2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$\sqrt{f(x)}-\frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{f(x_0)}}\left[f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0+(x-x_0)^2Q_0(x)\right]$$

$$=-\frac{[f(x)-f(x_0)]^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}.$$

좌변을 전개하여 정리하면

$$\sqrt{f(x)}-\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x-\frac{f(x_0)-f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}}-\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}}-\frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}$$

$$=-\frac{\{f(x)-f(x_0)\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}.$$

따라서, 식 (2)를 윗식의 우변에 대입하고 좌변을 정리하면

$$\sqrt{f(x)}-\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x-\left(\frac{f(x_0)-f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}}+\frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}\right)$$

$$=-\frac{\{f(x)-f(x_0)\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}+\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}}$$

$$=-\frac{\left\{f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+(x-x_0)^2Q_0(x)\right\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}+\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{f(x_0)}}$$

$$=-\frac{[(x-x_0)\{f'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}]^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}$$

$$+\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}$$

$$=(x-x_0)^2\left[\frac{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2Q_0(x)-\{f'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)^2}\right].$$

결론적으로

$$a = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}, \quad b = \frac{f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{\sqrt{f(x_0)}}{2}.$$

$$Q(x) = \frac{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2 Q_0(x) - \{f'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)\}^2}{2\sqrt{f(x_0)}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)^2}$$

가 유일하게 결정되므로 $x = x_0$에서의 함수 $\sqrt{f(x)}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{f(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

이며, 정리 2-5에 의하여

$$f'(x_0) = \frac{2\sqrt{x_0} + 1}{2\sqrt{x_0}}.$$

그러므로

$$\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}}\left(\frac{2\sqrt{x_0} + 1}{2\sqrt{x_0}}\right).$$

정리 2-7. $f(x), g(x)$가 유리함수이고, x_0를 포함하는 한 구간상에서 $g(x) > 0$일 때, $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $f(x) + \sqrt{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}\right)' = f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

증 명. 제1부의 정리1-5에 의하여 유리함수들은 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의되면 $x = x_0$에서 미분가능하고 제2부의 정리2-2에 의하여 대수함수 $\sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하다.

그러므로, 다음과 같은 등식을 얻는다.

(1) $$f(x) = f'(x_0)x + b + (x - x_0)^2 q(x),$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

$$(2) \qquad \sqrt{g(x)} = \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + C + (x - x_0)^2 r(x),$$
$$C = \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

여기서 $q(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수, $r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다.

(1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$\begin{aligned} f(x) + \sqrt{g(x)} &= f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 q(x) \\ &+ \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}} + (x - x_0)^2 r(x). \end{aligned}$$

윗식을 정리하면

$$\begin{aligned} &\left(f(x) + \sqrt{g(x)}\right) - \left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)x \\ &- \left(f(x_0) - f'(x_0)x_0 + \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}\right) \\ &= (x - x_0)^2 (q(x) + r(x)). \end{aligned}$$

따라서

$$\left(f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}\right)' = f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

정리 2-8. $f(x), g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의된 유리함수이고 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이면 $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $\sqrt{f(x) + \sqrt{g(x)}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}}\left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

증 명. $y = F(x) = f(x) + \sqrt{g(x)}$, $y_0 = F(x_0) = f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}$라 놓고 y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

(1)
$$
\begin{aligned}
&\sqrt{y} - ay - b \\
&= \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{y_0}} - \frac{\sqrt{y_0}}{2} \\
&= -\frac{y - 2\sqrt{y}\sqrt{y_0} + y_0}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{\left(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}\right)^2}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{(y - y_0)^2}{2\sqrt{y_0}\left(\sqrt{y} + \sqrt{y_0}\right)^2} \\
&= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

한편 정리 2-7에 의하여 대수함수 $F(x) = f(x) + \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 도함수를 다음과 같이 갖는다.

(2)
$$
\begin{aligned}
&F(x) - F'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x), \\
&F(x_0) = F'(x_0)x + b, \\
&b = F(x_0) - F'(x_0)x_0.
\end{aligned}
$$

여기서 $Q_0(x)$는 대수함수이다. 식 (2)를 식(1)에 대입하여 정리하면

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{F(x)} - \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2} \\
&- \frac{1}{2\sqrt{F(x_0)}}\left[F'(x_0)x + F(x_0) - F'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)\right] \\
&= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)})^2}.
\end{aligned}
$$

윗식의 좌변을 전개하면

$$\sqrt{F(x)}-\frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x-\frac{F(x_0)-F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}}-\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}-\frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}$$

$$=-\frac{(F(x)-F(x_0))^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}.$$

따라서, 식(2)를 윗식의 우변에 대입하여 정리하면

$$\sqrt{F(x)}-\frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x-\left(\frac{F(x_0)-F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}}+\frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}\right)$$

$$=-\frac{\{F(x)-F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}+\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}$$

$$=-\frac{\left[F'(x_0)x-F'(x_0)x_0+(x-x_0)^2Q_0(x)\right]^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}+\frac{(x-x_0)^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}$$

$$=-\frac{[(x-x_0)\{F'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}]^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$

$$+\frac{(x-x_0)^2\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$

$$=(x-x_0)^2\left[\frac{-\{F'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}^2+\{\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\}^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}\right].$$

결론적으로

$$a=\frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}},\quad b=\frac{F(x_0)-F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}}+\frac{\sqrt{F(x_0)}}{2},$$

$$Q(x)=\frac{-\{F'(x_0)+(x-x_0)Q_0(x)\}^2+\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)}+\sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$

가 유일하게 결정되고, $x = x_0$에서의 함수 $\sqrt{F(x)}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{F(x_0)}\right)' = \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}.$$

이며, 정리 2-7 에 의하여

$$F'(x_0) = f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

그러므로

$$\left(\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x_0) + \sqrt{g(x_0)}}}\left(f'(x_0) + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

정리 2-9. 대수함수 $f(x), g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 정의되고, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이면 $x = x_0(> 0)$에서 대수함수 $\sqrt{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$의 도함수는 다음과 같다.

$$\left(\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}}\left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

증 명. $f(x), g(x)$가 유리함수일때, 정리 2-2에 의하여 $\sqrt{f(x)}, \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로, 다음과 같은 등식을 얻는다.

(1)
$$\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x + b + (x - x_0)^2 q(x),$$
$$b = \frac{2f(x_0) - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}}.$$

(2) $$\sqrt{g(x)} = \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + c + (x - x_0)^2 r(x),$$
$$c = \frac{2g(x_0) - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

여기서 $q(x), r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다.

(1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}x + \frac{2\sqrt{f(x_0)} - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + (x - x_0)^2 q(x)$$
$$+ \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}x + \frac{2\sqrt{g(x_0)} - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}} + (x - x_0)^2 r(x).$$

윗식을 정리하면

$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right) - \left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)x$$
$$- \left(\frac{2\sqrt{f(x_0)} - f'(x_0)x_0}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{2\sqrt{g(x_0)} - g'(x_0)x_0}{2\sqrt{g(x_0)}}\right)$$
$$= (x - x_0)^2 \left(q(x) + r(x)\right).$$

따라서,

$$\left(\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x_0)}}.$$

한편 $y = F(x) = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$, $y_0 = F(x_0) = \sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}$ 라 놓고

y_0에서의 함수 $\sqrt{y}$의 도함수를 계산하면

(3)
$$
\begin{aligned}
&\sqrt{y} - ay - b \\
&= \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{y_0}} - \frac{\sqrt{y_0}}{2} \\
&= -\frac{y - 2\sqrt{y}\sqrt{y_0} + y_0}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})^2}{2\sqrt{y_0}} \\
&= -\frac{(y - y_0)^2}{2\sqrt{y_0}(\sqrt{y} + \sqrt{y_0})^2} \\
&= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

한편 대수함수 $F(x) = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$는 $x = x_0$에서 미분가능하므로

(4)
$$
\begin{aligned}
&F(x) - F'(x_0)x - b = (x - x_0)^2 Q_0(x), \\
&F(x_0) = F'(x_0)x_0 + b, \\
&b = F(x_0) - F'(x_0)x_0.
\end{aligned}
$$

여기서 $Q_0(x)$는 대수함수이다. 식(4)를 식(3)에 대입하여 정리하면

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{F(x)} - \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2} \\
&- \frac{1}{2\sqrt{F(x_0)}}\left[F'(x_0)x + F(x_0) - F'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 Q_0(x)\right] \\
&= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

윗식의 좌변을 전개하면

$$\sqrt{F(x)} - \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x - \frac{F(x_0) - F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}} - \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}$$
$$- \frac{(x-x_0)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}$$
$$= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}.$$

따라서,

$$\sqrt{F(x)} - \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}x - \left(\frac{F(x_0) - F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}} + \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}\right)$$
$$= -\frac{\{F(x) - F(x_0)\}^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2} + \frac{(x-x_0)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}$$

$$= -\frac{\left[F'(x_0)x - F'(x_0)x_0 + (x-x_0)^2 Q_0(x)\right]^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2} + \frac{(x-x_0)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}}$$
$$= -\frac{\left[(x-x_0)\{F'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)\}\right]^2}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$
$$+ \frac{(x-x_0)^2\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$
$$= (x-x_0)^2\left[\frac{-\{F'(x_0) + (x-x_0)Q_0(x)\}^2 + \{\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\}^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}\right].$$

결론적으로

$$a = \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}, \quad b = \frac{F(x_0) - F'(x_0)x_0}{2\sqrt{F(x_0)}} + \frac{\sqrt{F(x_0)}}{2}.$$

$$Q(x) = \frac{-\{F'(x_0) + (x - x_0)Q_0(x)\}^2 + \left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2 Q_0(x)}{2\sqrt{F(x_0)}\left(\sqrt{F(x)} + \sqrt{F(x_0)}\right)^2}$$

가 유일하게 결정되고, $x = x_0$에서의 함수 $\sqrt{F(x)}$의 도함수는

$$\left(\sqrt{F(x_0)}\right)' = \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{F(x_0)}}.$$

그러므로

$$\left(\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}}}\left(\frac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}} + \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}\right).$$

정리 2-10. 대수함수 $f(x), g(x)$가 x_0를 포함하는 한 구간에서 미분가능하면, 대수함수 $f(x) + g(x)$, $cf(x)$도 $x = x_0$에서 미분가능하고 그 도함수는 다음과 같다.

$$\left(f(x_0) + g(x_0)\right)' = f'(x_0) + g'(x_0).$$

$$\left(cf(x_0)\right)' = cf'(x_0).$$

증 명. $f(x), g(x)$가 대수함수이고, x_0를 포함하는 한 구간에서 미분가능하면 정리 2-2에서 의하여 $f(x), g(x)$는 다음과 같은 등식을 얻는다.

(1) $$f(x) = f'(x_0)x + b + (x - x_0)^2 q(x)$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

(2) $$g(x) = g'(x_0)x + c + (x - x_0)^2 r(x)$$

$$c = g(x_0) - g'(x_0)x_0.$$

여기서 $q(x), r(x)$는 $x = x_0$를 포함하는 한 구간에서 정의된 대수함수이다. (1)식과 (2)식을 변변 더하면

$$f(x) + g(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 q(x)$$

$$+ g'(x_0)x + g(x_0) - g'(x_0)x_0 + (x - x_0)^2 r(x).$$

윗식을 정리하면

$$f(x) + g(x) - \Big(f'(x_0) + g'(x_0)\Big)x - \Big(f(x_0) - f'(x_0)x_0 + g(x_0) - g'(x_0)x_0\Big)$$

$$= (x - x_0)^2 \Big(q(x) + r(x)\Big).$$

그러므로

$$\Big(f(x_0) + g(x_0)\Big)' = f'(x_0) + g'(x_0).$$

식(1)의 양변에 c를 곱하면

$$cf(x) = c\left[f'(x_0)x + b + (x - x_0)^2 g(x)\right]$$

$$= cf'(x_0)x + bc + c(x - x_0)^2 g(x)$$

따라서

$$\Big(cf(x_0)\Big)' = cf'(x_0).$$

제 3부 대수함수의 도함수와 그래프

정의 3-1. x_1에 충분히 가까운 임의의 값을 x라 하자. 대수함수 $f(x)$가

$$x_1 < x \text{ 일 때 } f(x_1) < f(x),$$

$$x < x_1 \text{ 일 때 } f(x) < f(x_1)$$

과 같이 되면 $f(x)$는 $x = x_1$에서 증가상태에 있다고 한다.

$$x_1 < x \text{ 일 때 } f(x_1) > f(x),$$

$$x < x_1 \text{ 일 때 } f(x) > f(x_1)$$

과 같이 되면 $f(x)$는 $x = x_1$에서 감소상태에 있다고 한다.

정리 3-1. 대수함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x_1) > 0 \text{ 이면 } f(x)\text{는 } x = x_1\text{에서 증가상태에 있다.}$$

$$f'(x_1) < 0 \text{ 이면 } f(x)\text{는 } x = x_1\text{에서 감소상태에 있다.}$$

증 명. x를 x_1에 충분히 가까운 임의의 값이라 하고

$$f(x) - f'(x_1)x - d = (x - x_1)^2 p(x)$$

라 하자. $x_1 < x$일 때

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= f'(x_1)x + d - f(x_1) + (x - x_1)^2 p(x) \\ &= f'(x_1)x + d - f'(x_1)x_1 - d + (x - x_1)^2 p(x) \\ &= f'(x_1)(x - x_1) + (x - x_1)^2 p(x). \end{aligned}$$

따라서

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(x_1)+(x-x_1)p(x).$$

만약 x가 x_1에 충분히 가까운 값이면 $(x-x_1)p(x)$는 극히 작은 값이 되고,

$f'(x_1)>0$ 이므로

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>0.$$

$x-x_1>0$이므로

$$f(x)>f(x_1).$$

$x<x_1$일 때 마찬가지로

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(x_1)+(x-x_1)p(x)$$

를 생각하면

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>0.$$

$x-x_1<0$이므로

$$f(x)<f(x_1).$$

따라서 $f'(x_1)>0$이면 f는 x_1에서 증가상태에 있다. 비슷한 방법으로 $f'(x_1)<0$ 일 때 f는 x_1에서 감소 상태에 있음을 증명할 수 있다.

정리 3-2. 미분가능한 대수함수 f의 정의역내의 두점 a와 b $(a < b)$에 대하여

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$$

를 만족하는 x_0가 a와 b사이에 존재한다.

증 명. 대수함수 f의 그래프 위의 두점 $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 잇는 직선 L을 y축을 따라 평행 이동하면 그래프와 L이 한 점에서 접하게 되는 점 $(x_0, f(x_0))$가 존재한다. 여기서 $a < x_0 < b$이다. 접선의 식은 $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a)$이고 대수함수 f는 x_0에서 미분가능하므로

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a) = (x - x_0)^2 r(x)$$

로 표현할 수 있다. 따라서

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

정의 3-2. 한 구간의 임의의 두점 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) < f(x_2)\text{일 때}$$

대수함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다고 하고, $f(x)$를 그 구간에서 증가함수라고 한다.

$$x_1 < x_2 \text{ 이면 } f(x_1) > f(x_2)\text{일 때}$$

대수함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다고 하고, $f(x)$를 그 구간에서 감소함수라고 한다.

정리 3-3. 미분가능한 대수함수 $f(x)$가 한 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서 항상 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 항상 $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

증 명. 구간내의 임의의 두 점 $x_1, x_2(x_1 < x_2)$에 대하여 정리 3-2로 부터

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0)$$

를 만족하는 점 x_0가 x_1과 x_2사이에 존재한다. 만약 구간 내의 임의의 점 x에 대하여 $f'(x) > 0$이면

$$f(x_1) < f(x_2)$$

가되어 대수함수 f는 그 구간에서 증가한다. 만약 그 구간내의 임의의 점 x에 대하여 $f'(x) < 0$이면

$$f(x_1) > f(x_2)$$

가되어 대수함수 f는 그 구간에서 감소한다.

정의 3-3. 대수함수 $f(x)$가 $x = x_1$을 경계로 하여 증가상태에서 감소상태로 옮아 가면 $f(x)$는 $x = x_1$에서 극대라 하고, $f(x_1)$을 $f(x)$의 극대값이라 한다. 대수함수 $f(x)$가 $x = x_2$을 경계로 하여 감소상태에서 증가상태로 옮아가면 $f(x)$ 는 $x = x_2$에서 극소라 하고, $f(x_2)$를 $f(x)$의 극소값이라 한다. 극대값과 극소값을 극값이라 한다.

정리 3-4. 미분가능한 대수함수 $f(x)$가 $x = x_0$에서 극값을 가지면 $f'(x) = 0$.

증 명. 정리 3-2 의 증명 방법을 고찰하면 정리 3-4 의 증명은 명백하다.

III. 결　　론

1. 대수함수의 도함수를 접선의 개념과 일치하도록 이론을 전개하는 과정에서 극한 개념을 사용하지 않고, 단순히 대수방정식의 중근의 성질과 일차함수의 기하학적 개념, 인수분해등 기초적인 방법에 의하여 특수한 형태의 대수함수족에 대한 도함수및 도함수의 선형성을 얻었다. 그 결과들은 극한을 도입한 도함수의 정의를 이용하여 얻은 결과들과 일치한다.

2. 대수함수의 도함수와 그래프의 관계로써 함수의 증감, 최대 최소, 미분의 평균치 정리들을 얻었으며, 그 결과들도 역시 극한 개념을 도입하여 증명된 결과들과 같음을 보였다.

3. 이상의 결과들을 정리하면 본 논문의 증명 방법은 극한 개념을 선수 학습으로 습득하지 못한 학습자들에게 미분의 성질들을 이해시키는데 쉬운 과정이며, 특히 대수함수의 그래프 형태를 이해시키는 데도 극한 개념을 사용하여 얻은 결과보다 더 기하학적이다.

참 고 문 헌

1. 윤옥경 · 윤재한 (1992), 고등학교 수학 I · II, (주) 웅진문화.

2. 김광보(1991), "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의 및 성질들의 연구", 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

3. 홍성규(1993), "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수", 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

4. J. Dieudonne(1960), *Foundation of Modern Analysis*, Academic Press.

5. 박을용 · 김치영 · 박한식 (1988), 수학대사전, 홍문도서.

6. Spiegel(1985), *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum's Outline Series.

<Abstract>

DERIVATIVES OF ALGEBRAIC FUNCTIONS WITHOUT USING THE CONCEPT OF LIMIT

Hyeon, Tae-Yeong

Mathematics Education Major

Graduate School of Education

Cheju National University

Supervised by Professor Ko, Bong-Soo

The definition of the derivative for real valued algebraic functions defined on an interval is introduced without using the concept of limit.

With the definition, the derivatives and the linearity of derivative for a class of algebraic functions of special form are obtained by geometric property of multiple roots of algebraic equations, by the geometric concept of functions of the first degree and by the factorization, etc.

Furthermore, as its application, the monotonicity and local extreme values for real valued algebraic function can be found by the geometrical method of the derivative. And the mean value theorem of calculus for algebraic functions is proved by the above similar method.

This thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1995.

感謝의 글

本 論文이 完成되기까지 바쁘신 가운데도 많은 時間을 割愛하여 指導해 주신 指導敎授 高鳳秀 博士님과 檢討와 助言을 해주신 數學敎育科, 數學科의 모든 敎授님들께 眞心으로 感謝를 드립니다.

또한 講義를 같이 받았던 先輩, 同僚, 後輩 院生들을 비롯하여 學校 授業 進行의 어려움 속에서도 敎育課程을 무사히 마칠 수 있도록 配慮하여 주신 濟州第一中學校와 表善中學校 校長·校監 先生님을 비롯한 여러 同僚 先生님께도 깊은 謝意를 표합니다.

그리고 많은 어려움 속에서도 끊임없는 忍耐와 사랑으로 內助해준 아내, 健康하게 자라나는 珍娥, 珍淑, 珍旭, 父母님께도 感謝를 드리며 조그마한 기쁨을 나누고자 합니다.

1995年 8月

玄 泰 榮 드림