

碩 士 學 位 論 文

構 造 解 析 을 위 한 有 限 要 素 分 割 및 合 成 法 에
관 한 研 究

指 導 教 授 殷 熙 昌



濟 州 大 學 校 產 業 大 學 院

建 設 環 境 工 學 科

建 築 工 學 專 攻

玄 斗 植

2003

構造 解析을 위한 有限 要素 分割 및
合成法에 관한 研究

指導教授 殷 熙 昌

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

2003 년 6 월 일

濟州大學校 産業大學院

建設環境工學科



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

建築工學專攻

玄 斗 植

玄斗植의 工學 碩士學位論문을 認准함

2003 년 월 일

委員長 _____ 인

委 員 _____ 인

委 員 _____ 인

목 차

목 차	i
Summary	ii
Figure contents	iii
I. 서 론	1
1. 연구 배경	1
2. 연구 목적	2
3. 연구 방법	3
II. Lagrange 역학	4
1. 구속력	4
2. 구속조건과 일반화 좌표	5
3. 일반화 좌표와 연류된 항등식	8
4. 가상 변위, 가상 일 및 일반화 힘	10
5. 운동에너지	13
III. 정적 평형방정식	16
1. 힘의 평형방정식	16
2. 정적 축약에 의한 정적 평형방정식	19
3. 강체 거동을 포함하는 정적 평형방정식	25
4. 적용 예	31
IV. 결 론	36
참고문헌	37

A Study on Finite Element Tearing and Interconnection Method for Structural Analysis

Hyun, Doo-Sik

Department of Construction and Environmental Engineering
Graduate School of Industry
Cheju National University
Supervised by Professor Eun, Hee-Chang

Summary



This paper presents an explicit equilibrium equation related to a finite element tearing and interconnection method for structural analysis. This method is based on a decomposition of the finite element model into substructures. Using the displacement compatibility at each interface among substructures and modifying the previous results provided by Eun, Yang, and Chung, this study determines the equilibrium equation of the global structure with floating substructures as substructures. The new method can explicitly determine the static displacements from the explicit form of equilibrium equation. But, it has a disadvantage not to be able to reduce the global number of dof due to the calculation of generalized inverse matrix. Also, several applications illustrated the validity and easiness of the proposed method.

Figure Contents

Fig. 1. A simple pendulum in x-y coordinate -----	7
Fig. 2. A simple pendulum with a generalized coordinate θ -----	8
Fig. 3. Force distribution in region Ω divided into n_s subregions -----	19
Fig. 4. Continuous system consisted of 2 subsystems -----	20
Fig. 5. A structure connected by 3 springs -----	22
Fig. 6. A structural system including subregions to show rigid-body behavior -----	26
Fig. 7. A structural system consisted of 2 springs -----	28
Fig. 8. A structure connected by 5 springs -----	33

I. 서론

1. 연구 배경

구조물을 여러 개의 하부 구조물들(substructures)로 분할하고 이들 각 하부 구조물을 이산계(discrete system)에 의해 평형 방정식을 결정하고 이를 합성함으로써 전체 구조물에 대한 평형방정식을 결정할 수 있다. 이러한 방법을 취하는 예로서 구조물과 지반으로 이루어진 전체 구조물에 대한 정적 거동의 평가나 비행기의 날개와 본체에 의한 구조체를 들 수 있다. 구조물과 지반에 의한 전체 구조물에 대해 구조물, 근접 지반, 그리고 원거리 지반으로 각각 구분을 하여 이들이 접촉하는 부분에 적합 조건을 부여하여 전체 구조물의 평형방정식을 얻게 된다.

하부 구조물로의 분할과 결합은 정적 축약법, 라그란지 승수법, 페널티법(penalty method)을 주로 사용하였으며, 그 연구의 대부분은 동적 시스템에 대한 동적 특성을 규명하는 연구들이다. 1996년 Yang, Kuo, Liang은 진동수 영역에서 구조물, 근접 지반과 원거리 지반에 대한 각각의 방정식을 산정하고 이를 정적 축약(static condensation)에 의해 결합시키는 방법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 강체 진동 모드(rigid-body mode)를 고려할 수 없는 한계가 있다. 즉, 주어진 강성 행렬이 전계수 행렬(full rank matrix)이 아닐 경우에 정적 축약을 행할 수 없다.

1997년 Park, Justino, Felippa는 구조해석을 위한 유한 요소 분할 및 합성법(finite element tearing and interconnection method, FETI)을 제안하였다. 이 방법은 라그란지 승수를 사용하였으며, 강체 거동을 명확히 설명할 수 없는 한계가 있다. 강체 거동에 대한 설명을 위해 1997년 Felippa와 Park은 direct flexibility method를 제시하였다. 이 방법은 자유-자유인 구조체의 유연성 행렬을 결정하는 방법으로 유연성 행렬이 전계수가 아닌

행렬이므로 그 타당성의 검증을 필요로 한다. 1998년에 Farhat, Lacour, Rixen은 구조체 내에 지정된 변위의 구속 조건이 부여될 경우에 FETI법을 확대 적용하는 방법을 수치 해석에 의해 제시하고 있다. 이상과 같은 연구들의 대부분은 명확한 형태의 수식 전개보다는 수치 해석에 의존하므로 복잡한 형태의 구조물일 경우에 이들 제시법들은 점점 더 복잡한 중간 과정을 요할 것이다.

2002년 은희창, 양근혁, 정현수는 여러 개의 하부 구조물로 이루어진 전체 구조물의 정적 평형방정식을 유도하였다. 이 방법은 접촉면에서 발생하는 힘과 기타 모든 절점에서의 변위를 결정할 수 있으나, 강체 거동을 나타내는 하부 구조는 제시된 평형방정식의 수정없이 적용하기 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 2002년에 제시한 방법을 수정하여 강체 거동을 고려한 새로운 형태의 방법을 제시한다. 그리고 그 타당성 및 적용성을 예제를 통하여 검증한다.

2. 연구 목적



대형 구조물에 대한 구조 해석을 실시할 때는, 구조물을 여러 개의 하부 구조로 분할하고 이를 합성하면 일부의 하부 구조물은 강체 진동 모드 즉 자유-자유의 구조물일 경우가 발생한다. 이러한 탄성 구조체는 그 해석이 불가능하다. 즉, 지점에 의한 구속이 없으므로 강체로서의 탄성 해석이 불가능하기 때문이다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 어려움을 제거하고 그 해석을 용이하게 할 수 있는 방법을 제안한다. 그 제한된 방법의 타당성 및 용이함을 예를 들어서 검증한다.

여기서 제시한 방법은 구조물의 해석에서 뿐만 아니라 날개와 본체로 이루어진 항공기의 해석에서도 적용이 가능하며, 그 외에도 적용 범위가 매우 크리라 판단된다. 특히, 제시된 방법은 수치 해석과 같은 방법이 아닌, 명확한 형태의 식으로 그 해는 직접적으로 풀이가 가능한 큰 장점을 지니고 있다.

3. 연구 방법

본 연구는 힘의 평형을 나타내는 식을 나타내는 방법 및 그 해를 구하는 연구로 강제 진동 모드를 포함하는 광범위한 형태의 구조 해석에 적용할 수 있다. 기존의 연구 결과들을 평가하고 강제 진동 모드를 나타내는 구조체에 대한 힘의 평형 방정식을 유도한다. 앞선 연구의 연장선상에서 제안된 식을 수정하여 이를 확대 적용하는 방법으로 유도된다.

제시된 방법을 통하여 이를 구조체에 적용하여 제시된 방법의 타당성 및 적용성을 입증한다. 입증하는 방법으로 접촉면에서의 변위가 동일하며, 그 내부 힘의 합은 0임을 나타내므로 그 타당성이 검증될 것이다. 특히, 제시된 방법의 용이함은 수치해석에 의하지 않고, 식에서 요구하는 각 계수들만에 의해 결정될 수 있음에 있을 것이다.



II. Lagrange 역학

1. 구속력

단일 입자 또는 입자 시스템들은 일반적으로 시공간에서 이들 시스템들의 운동을 결정하는 세 가지 형태의 조건을 만족하고 있다. 즉 운동방정식을 통해 시스템에 작용한 힘으로 표현되는 동역학적 조건과 보통 입자들의 위치좌표나 속도 좌표의 초기 값 또는 어떤 보존되는 동역학적 양들로 표현되는 초기 조건들이다. 초기 조건에 의해 운동방정식의 무수히 많은 가능한 해들로부터 실제의 궤도가 선정된다.

Newton의 법칙은 이들 두 형태의 조건들만을 만족하는 시스템의 거동을 연구하는 데 적합하다. (이 조건을 만족하는 것 이외에는 삼차원 공간에서 자유롭게 움직이는) 입자가(예를 들어 등방 선형 조화 진동자의 힘의 영향으로) 닫히는 경우가 때때로 나타났다. 이러한 경우에는 삼차원 공간의 어떤 부분 공간 내에서 입자의 그 특수한 운동은 힘의 법칙의 동역학적 대칭성으로부터 나왔다.

만일 시스템이 기하학적인 조건 또는 구속조건을 만족한다면 전적으로 새로운 상황이 일어난다. 이들은 힘 법칙과 상관없이 입자들의 좌표에 가해지는 조건들이다. 예를 들면 구면 진자의 동작은 구의 표면에서만 움직일 수 있도록 되어 있다. 기하학적인 조건들은 시스템의 입자들을 구속조건들이 없었을 때 입자에 작용하는 모든 내력 및 외력의 벡터합의 방향과는 다른 방향으로 가속시키게 할 수 있다. 시스템이 구속 조건을 받을 때는 소위 구속력이라는 부가적인 힘이 나타난다.

모든 구속력과 더불어 시스템에 작용하는 다른 힘들이 알려진다면 (동역학적인 조건들과 초기 조건들만으로 표시된) Newton의 운동방정식을 사용하기 위해서는 먼저 구속 조건의 방정식과 시스템에 가해진 힘들로부터

터 구속력을 계산하여야 한다. 어떤 상황에서는 운동 방정식도 필요로 한다. (다른 한편 기하학적인 조건들은 다른 정보와 더불어 구속력으로부터 구할 수 있다.) 구속력을 포함하지 않는 운동방정식을 만들기 위한 직접적이고도 오히려 간편한 방법이 존재한다. 더욱이 힘이라는 개념이 전적으로 제거된다. Lagrange에 의해서 도입된 이 이론은 구속 조건이 없는 시스템에도 똑같이 적용된다.

2. 구속 조건과 일반화 좌표

N개의 입자들로 된 한 시스템을 생각하자. 이것은 직각 좌표계에서 3N개의 시간의 함수인 위치좌표

$$x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n \quad (2.1)$$

과 속도 좌표



$$\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{z}_n \quad (2.2)$$

로 표현된다. 3N개의 좌표(2.1)은 3N 차원 좌표 공간의 요소라 말할 수 있으며, 3N 차원 좌표 공간의 어떤 점도 실 공간에서의 시스템의 배위를 기술한다고 말할 수 있다.

만일 시스템이 어떤 구속 조건도 받지 않는다면 입자들은 삼차원 공간에서 자유롭게 움직이며 좌표들은 모두 서로 독립이다. 그러나 구속조건이 이 시스템에 가해지면 좌표들은 모두가 서로 독립은 아니며 이들은 임의의 값을 갖지 않을 수 있다.

구속 조건은 크게 다음과 같이 구별된다. 만일 구속조건이 좌표들 사이에 대수적 관계식이 존재한다면 홀로노믹(holonomic)하다고 말한다. 이것은

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0 \quad (2.3)$$

인 형식의 방정식으로 표시될 수 있다.

구속조건이 (2.3)의 형식으로 쓸 수 없을 때에도 비홀로노믹(nonholonomic)하다고 말한다. 가장 흔한 비홀로노믹한 구속 조건은 부등식 형식으로 표현된다. 또는 이들은 좌표의 미분을 포함할 때도 있다.

구속 조건의 다른 분류는 구속 조건이 시간함수냐 아니냐에 따라 이루어진다. 첫 번째 종류의 구속 조건은 레오노믹(rheonomic)하고 두 번째 종류의 구속 조건은 스크러노믹(scleronic)하다고 말한다.

비홀로노믹 구속 조건을 갖는 문제를 푸는 일반적인 방법은 존재하지 않는다. 만일 비홀로노믹한 조건들이 미분방정식으로 기술되고 있다면 이들 미분방정식들은 운동 방정식의 시스템과 연립하여 풀어야만 한다. 고전역학의 대부분의 문제는 현대물리학의 대부분의 문제와 더불어 단지 홀로노믹한 구속조건만을 가지고 있다.

c 개의 독립된 홀로노믹한 구속 조건을 만족하는 시스템을 고려하자. 그러면 (2.3) 형식의 c 개의 독립된 방정식

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, c, \quad (2.4)$$

가 존재한다. 각 방정식은 임의의 한 좌표를(삼차원 좌표 공간내 한점 주위의 작은 영역내에서) 나머지 $3N-1$ 개의 좌표들로 풀 수 있다. 그러면 $3N$ 개의 원래의 좌표 중 임의의 c 개를 소거할 수 있으며 따라서 독립 좌표의 수는

$$f = 3N - c \quad (2.5)$$

로 주어진다. 이 f 를 시스템의 자유도의 수 또는 간단히 자유도라 부른다. 이것은 시스템에 비홀로노믹한 구속 조건을 가하였을 때 얻는 '미시

적' 자유도보다는 더 크다.

시스템을 (거시적으로) 완전히 기술하는 f 개의 독립된 좌표들의 어떤 세트를 일반화 좌표들의 세트라 부른다. 이 일반화 좌표들을

$$q_1, q_2, \dots, q_f \quad (2.6)$$

라 한다. 식(2.6)을 시간에 관해 미분하면 다음과 같은 일반화 속도를 얻을 수 있다.

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f \quad (2.7)$$

수학적인 용어로 (2.4)의 세트는 $3N$ 차원공간으로부터 배위 공간이라 부르는 f 차원의 부분 공간으로 투영하는 것이다. 홀로노믹한 구속 조건이 없는 특수한 경우에 자유도의 수는 $f=3N$ 이다. 그리고 임의의 $3N$ 개의 독립좌표는 이미 일반화 좌표이다. 일반화 좌표 q_i 는 길이의 차원을 가져야 될 필요는 없다. 이 사실은 일반화된 힘과 일반화 운동량을 도입할 때 중요한 의미를 갖는다.

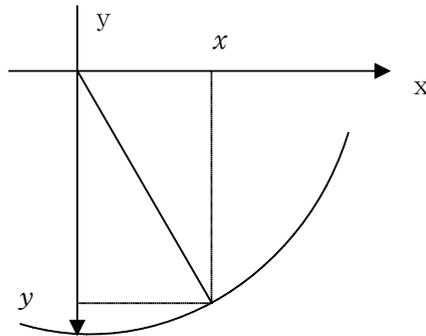


Fig. 1 A simple pendulum in x-y coordinate system

Fig.1과 같은 단진자에서 항상 시스템의 대칭성과 직접적으로 연관되는 '자연스러운' 좌표, 그리고 그 좌표를 찾아야 된다는 것을 밝히고 있다. 주어진 시스템에 대해서 그러한 '자연스러운' 좌표를 찾는 일은 경험과 직감이 요구된다.

c 개의 홀로노믹한 구속 조건을 만족하는 N 입자들로 된 시스템은 $f=3N-c$ 개의 일반화 좌표로 시스템의 운동 방정식을 구하는 것이 가능하다. 사실 이러한 방정식은 존재하며 발견자의 이름을 따서 Lagrange의 방정식이라 부른다.

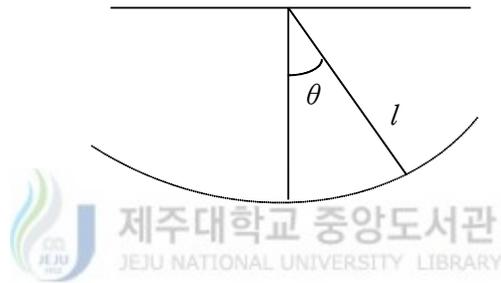


Fig. 2 A simple pendulum with a generalized coordinate θ

Fig. 2와 같이 단진자가 각 θ 가 일반화 좌표로 선택되고 있다. 단진자의 위치를 나타내는 방법으로 Fig. 1과 같이 x-y 평면상이나 Fig. 2와 같이 일반화 좌표를 사용할 경우에 모두 충족된다. 일반화 좌표의 사용은 단진자의 운동을 구속하는 조건을 충족함과 동시에 자유도의 수를 줄이는 장점이 있다.

3. 일반화 좌표와 연류된 항등식

한 세트의 일반화 좌표 $q_j, j=1,2,\dots,f$ 가 주어진 시스템을 묘사한다고 가정하자. 그러면 위치벡터 $r_i, i=1,2,\dots,N$ 의 각각 좌표 x_i, y_i, z_i 는

q_j 의 함수라고 생각될 수 있다. 벡터 기호를 사용하면

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_f) = r_i(q_1(t), \dots, q_f(t)), i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

이다. r_i 는 q_j 를 통해 내적으로 시간에 의존된다. 만일 시스템이 레오노믹한 구속 조건을 만족한다면 r_i 는 또한 시간에 뚜렷하게 의존되며 이 경우에는

$$r_i = r_i(q_1(t), \dots, q_f(t), t) \quad (2.9)$$

이다. 그러면 속도 벡터는

$$\frac{dr_i}{dt} = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.10)$$

과 같다.

(2.9)로부터 두 개의 항등식이 유도된다. 일반화 속도 \dot{q}_k 에 대해 편미분을 취하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta_{jk} \\ &= \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

를 얻는다. $\partial r_i / \partial t$ 는 \dot{q}_k 에 무관하기 때문이다. q_k 에 대한 \dot{r}_k 의 편미분

을 취하고 편미분의 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) q_j \\
 &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

을 얻는다. 식(2.12)는 미분 연산자 d/dt 와 $\partial/\partial q_k$ 가 교환 가능하다는 것을 말하고 있다.

4. 가상변위, 가상 일 및 일반화 힘

질점 m_i 의 무한소 변위에 관한 두 가지 형태로, 입자가 시간 간격 dt 사이에 작용된 힘의 영향으로, 그리고 운동 방정식과 모순이 없이 또 구속 조건과도 모순이 없이 r_i 에서 $r_i + dr_i$ 로 움직인다면 이 변위를 실제의 변위 dr_i 라 부른다. 만일 그 변위가 단지 구속조건에만 모순이 없다면 이를 가상변위라 부른다. 입자의 가상변위는 운동방정식이나 또는 시간을 포함하고 있지 않다. 예를 들면 단진자의 진자가 항상 반지름 R 의 원상에 남아 있는 한 어떤 임의의 시간 간격 동안에도(평균 극좌표로 말해서) 점(R, φ)에서 점($R, \varphi + \delta\varphi$)로 움직일 수 있다. 그러므로 식(2.8)로부터 어떤 가상변위도 만족함을 알 수 있다. 여기서 δq_i 는 일반화 좌표 q_i 의 가상변위이다. 총 가상 일 δW 는 일반화된 힘 F_i 은 각 입자가 가상 변위 $\delta r_i, i=1, 2, \dots, N$ 를 취할 때 시스템의 가해지는 힘에 의해서 한 총 일로 정의되며, 다음과 같은 수식에 의한다.

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=0}^N F_i \cdot \delta r_i \\
&= \sum_{i=1}^N F_i \left(\sum_{j=0}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j
\end{aligned} \tag{2.13}$$

를 얻는다. 일반화 좌표 q_j 와 관련된 일반화 힘 Q_j 를

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{2.14}$$

식(2.13)에 사용하면 다음과 같다.

$$\delta W = \sum_{j=1}^f Q_j \delta q_j \tag{2.15}$$

를 얻는다. 힘 F_i 와 일반화된 힘 Q_j 사이에는 두 개의 중요한 관계가 있다. F_i 는 삼차원 공간에서 벡터이지만 Q_j 는 벡터가 아니다. 가상 일은 항상 에너지의 차원을 가지고 있다. 그러나 일반화 좌표 q_j 는 꼭 길이의 차원을 가져야 하는 것이 아니기 때문에 q_j 에 연관된 일반화 힘 Q_j 는 힘의 차원을 가져야 될 필요가 없다.

(2.14)를 사용한 일반화된 힘의 계산은 많은 경우에 대단히 지루한 일이 될 수 있다. Q_j 의 물리적 뜻을 조사하여 직접 가상일로부터 일반화된 힘을 유도하는 것이 때로는 더욱 편하다.

정적 평형 상태에 있는 N개의 절점으로 된 시스템을 고려하자. Newton 역학에서 평형은 조건

$$F_i = 0, i = 1, 2, \dots, N \tag{2.16}$$

로 표시된다. 만일 시스템이 구속 조건을 받고 있다면 이 식들은 이 형식으로는 대단히 유용하지 못하다. 왜냐하면 힘 F_i 는 작용된 힘과 구속력으로 구성되어 있기 때문이다. 그러나 (2.16)에 의해 시스템에 한 일이 0이 되는 가상일 즉

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.17)$$

을 계산할 수 있다. 일반화 좌표로는

$$\delta W = \sum_{j=1}^f Q_j \cdot \delta q_j = 0 \quad (2.18)$$

이다. q_j 는 모두 서로 독립이기 때문에 식(2.18)은 일반화된 힘이 각각 0이 될 때에만 성립된다. 입자 시스템은

$$Q_j = 0, j = 1, 2, \dots, f \quad (2.19)$$

일 때에 평형상태에 있다고 볼 수 있다.

힘 F_i 가 보존력이라 가정한다. 그러면

$$F_i = - \nabla_i V, \quad (2.20)$$

인 퍼텐셜 에너지 함수 $V(r_1, \dots, r_N)$ 가 존재한다. 식(2.8)에 의해 퍼텐셜 에너지는 일반화 좌표를 써서 $V(q_1, \dots, q_f)$ 로 쓸 수 있다. 그러면 일반화 힘 Q_j 는 일반화 좌표에 대한 V 의 음의 미분과 같아진다. 왜냐하면

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.21)$$

이기 때문이다.

5. 운동에너지

Lagrange의 이론에서 운동에너지 T 는 일반적으로 일반화 좌표의 함수이다. 식(2.10)을 사용하면 T 는 다음의 형식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left(\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j \\
 &+ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t}
 \end{aligned}$$

(2.22a)

또는

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^f b_j \dot{q}_j + c \quad (2.22b)$$

이다. 여기서

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad (2.23a)$$

$$b_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.23b)$$

$$c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (2.23c)$$

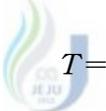
이다.

레오노믹한 구속 조건이 있을 때에는 적어도 한 개의 벡터 r_i 에 대해서 $\partial r_i / \partial t \neq 0$ 이기 때문에 계수 b_j 와 c 는 0이 아니다. 레오노믹한 구속 조건이 없을 때에는 운동 에너지는 일반화 속도 \dot{q}_j 에 대해 동차 형식, 즉

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.24)$$

이다. a_{ij} 는 대칭 행렬을 이룬다. a_{ij} 는 일반화 좌표의 함수일 수 있다.

일반화 힘의 경우에서와 같이 운동에너지를 (2.22b) 혹은 (2.24)를 직접 계산하는 것보다는 일반화 좌표의 물리적 의미로부터 유도하는 것이 때로는 더 간단화가 나타난다. a_{ij} 의 비대각선 요소는 0이다. 그리고 운동 에너지는 간단히



$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f a_{jj} \dot{q}_j^2 \quad (2.25)$$

이다.

만일 T 가 일반화 속도에 대해서 동차 2차 형식이라면 식(2.25)로부터

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^f \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^f \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \dot{q}_l a_{jk} \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_k + \dot{q}_j \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} \sum_{l=1}^f \dot{q}_l (\delta_{jl} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{kl}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f a_{jk} (\dot{q}_j \dot{q}_k + \dot{q}_j \dot{q}_k) \\ &= 2T \end{aligned} \quad (2.26)$$

을 얻는다. 이것은 변수 x_i 의 임의의 n 차 동차형식 f 에 대해서 항등식

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf \quad (2.27)$$

가 성립한다고 하는 Euler 정리의 특별한 경우이다.



Ⅲ. 정적 평형방정식

1. 힘의 평형방정식

영역 Ω 에 탄성 해석을 위해 유한 요소로 정식화하기 위하여 K , u , f 를 각각 대칭 양의정치성(positive definite)의 강성 행렬, 변위 벡터 및 외력 벡터라고 하자. 이들에 의해 힘의 평형방정식은 다음과 같은 형태를 취한다.

$$Ku = f \quad (3.1)$$

영역 Ω 를 Fig. 3(b)에서와 같이 n_s 개의 하부 구조로 구분할 경우에 n_s 개의 하부 구조물 각각의 평형방정식은 다음과 같다.

$$K_{ii}^s \bar{u}_i^s + K_{ib}^s \bar{u}_b^s = f_i^s, \quad s = 1, \dots, n_s$$

$$\sum_{s=1}^{n_s} K_{ib}^{sT} \bar{u}_i^s + \left[\sum_{s=1}^{n_s} K_{bb}^s \right] \bar{u}_b^s = \sum_{s=1}^{n_s} f_b^s \quad (3.2)$$

여기서, 아래 첨자 i 와 b 는 각각 내부의 자유도와 경계 부분의 자유도를 나타내며, 윗첨자 T 는 행렬의 전치를 나타낸다. 또한 \bar{u} 는 결합 전의 변위 벡터로 결합 후에 경계면에서의 내력에 의해 실제 변위 벡터 u 와는 다른 값을 취한다. 식(3.2)의 첫 번째 식은 하부 구조 영역 Ω^s 의 내부 영역에 평형방정식을 나타내며, 두 번째 식은 하부 영역 사이의 접합면에서의 자유도에 해당하는 평형방정식을 각각 나타낸다.

분할된 이들 하부 구조물을 결합시킬 경우에 하부 구조물 간에 경계면에서의 변위 u^s 가 동일하다는 다음과 같은 조건을 충족하여야

한다.

$$\sum_{s=1}^{n_s} B^s u^s = 0 \quad (3.3)$$

여기서, u^s 는 실제의 변위 벡터가 된다. 식(3.2)와 같은 형태의 결합 전의 평형 방정식은 식(3.3)과 같은 형태의 제약 조건에 의해 다음과 같이 라그란지 승수를 사용한 평형 방정식으로 표현된다.

$$K^s u^s = f^s - B^{sT} \lambda, \quad s = 1, 2, \dots, n_s$$

$$\sum_{s=1}^{n_s} B^s u^s = 0 \quad (3.4)$$

식(3.4)의 첫 번째 식에서 λ 는 라그란지 승수를 사용한 하부 구조 영역 Ω^s 의 힘의 평형을, 식(3.4)의 두 번째 식은 하부 구조 영역 간의 접촉면에서 발생하는 적합 조건을 나타내며, B^s 는 1, -1, 0으로 적합 조건과 관계되는 Boolean 행렬이다. 따라서, 적합 조건은 라그란지 승수에 의해 설명되어야 한다.

식(3.4)에서 하부 구조 영역 Ω^s 의 강성 행렬, 변위 및 외력 벡터를 각각 K^s , u^s , f^s 라 정의하면 다음으로 표현된다.

$$K^s = \begin{bmatrix} K_{ii}^s & K_{ib}^s \\ K_{ib}^{sT} & K_{bb}^s \end{bmatrix}, \quad u^s = \begin{bmatrix} u_i^s \\ u_b^s \end{bmatrix}, \quad f^s = \begin{bmatrix} f_i^s \\ f_b^s \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

식(3.4)의 첫 번째 식의 우변의 두 번째 항은 적합조건을 만족하기 위해 필요한 구속력을 나타내므로 이 구속력은 적합 조건을 부여하지 않은 식(3.2)의 두 번째 식에서 양 변의 차이로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{f}_b^{c^s} = \sum_{\text{접촉영역}} \mathbf{K}_{ib}^{s^T} \mathbf{u}_i^s + \mathbf{K}_{bb}^{s^T} \mathbf{u}_b^s - \mathbf{f}_b^s \quad (3.6)$$

식(3.6)에서의 \mathbf{f}_b^s 는 식(3.2)에 정의된 값을 나타내므로, 식(3.6)의 구속력은 접촉면에서의 실제 변위와 결합 전의 변위에 의한 힘의 차이로 설명된다. 식(3.6)과 식(3.4)의 첫 번째 식을 비교하면 구속력은 라그랑지 승수를 사용할 경우에 다음으로 정의됨을 볼 수 있다.

$$\mathbf{f}_b^{c^s} = -\mathbf{B}^{s^T} \lambda_b = - \left(\sum_{\text{접촉영역}} \mathbf{K}_{ib}^{s^T} \mathbf{u}_i^s + \mathbf{K}_{bb}^{s^T} \mathbf{u}_b^s - \mathbf{f}_b^s \right) \quad (3.7)$$

여기서, $\mathbf{f}_b^{c^s}$ 는 접합면에서의 구속력 벡터로 분할된 영역을 결합하기 위한 최소의 힘이라고 가정하여, 참고문헌 6에서는 식(3.2)와 같은 형태의 제약 조건이 부여될 경우에 평형 방정식을 제시하고 있다. 이 구속력은 내부 자유도에 해당하는 영역의 힘에는 영향을 미치지 않는다.

식(3.3)과 같은 구속 조건이 부여될 경우에 참고문헌 6에서 구속력 \mathbf{f}^{c^s} 와 평형 방정식은 각각 다음과 같이 제시하고 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{c^s} &= -\mathbf{K}^{s^{1/2}} (\mathbf{B}^s \mathbf{K}^{s^{-1/2}})^+ \mathbf{B}^{s^-} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{K}^{s^-} \bar{\mathbf{u}}^s &= \mathbf{K}^{s^-} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}^{s^{(-1/2)}} (\mathbf{B}^s \mathbf{K}^{s^{-1/2}})^+ \mathbf{B}^{s^-} \bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

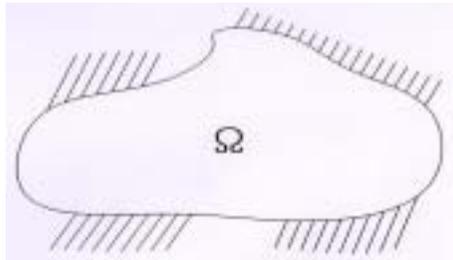
여기서, 위 첨자 ‘+’는 일반화된 역행렬(generalized inverse matrix)을 나타낸다. 식(3.4)의 첫 번째 식을 사용하면 구속력 벡터는 다음으로 정의된다.

$$\mathbf{B}^{s^T} \lambda = \mathbf{K}^{s^{1/2}} (\mathbf{B}^s \mathbf{K}^{s^{-1/2}})^+ \mathbf{B}^{s^-} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

식(3.9)의 양변에 \mathbf{B}^s 를 곱하고, $(\mathbf{B}^s \mathbf{B}^{s^T})$ 가 전계수(full rank)라고 가정

하면 라그랑지 승수는 수치 해석에 의할 필요없이 다음과 같은 수식으로 명확히 결정될 수 있다.

$$\lambda = (B^s B^{sT})^{-1} K^{s1/2} (B^s K^{s-1/2})^+ B^s \bar{u}^s \quad (3.10)$$



(a)



(b)

Fig. 3 Force distribution in region Ω divided into n_s subregions

2. 정적 축약에 의한 정적 평형방정식

여러 개의 하부 구조물로 분할된 구조물의 평형방정식은 정적 축약에 의해 결정할 수 있다. 식(3.4)의 첫 번째 식에서 $-B^{sT} \lambda = f^{cs}$ 을 사용하고 이를 행렬로 표현하여 다음과 같은 평형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} K^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K^{n_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 + f^{c^1} \\ f^2 + f^{c^2} \\ \vdots \\ f^{n_s} + f^{c^{n_s}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

여기서, K^s , u^s , f^s 는 식(3.5)에 정의되어 있다. 식(3.11)과 같은 형태의 평형 방정식이 주어질 경우에 정적 축약에 의한 접근법을 나타내기 위하여 Fig. 4와 같은 2개의 영역으로 구분되는 연속체를 고려하자.



(b)

Fig. 4 Continuous system consisted of 2 subsystems

Fig. 4(a)와 같은 연속체를 (b)와 같은 형태로 분할할 수 있다. 이들 두 개의 분할체에 대한 평형방정식은 구속력을 포함하여 다음과 같은 형태의 평형방정식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^1 & K_{ab}^1 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^1 \\ u_b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 + f^{c1} \end{bmatrix} \quad (3.12a)$$

$$\begin{bmatrix} K_{cc}^2 & K_{cd}^2 \\ K_{dc}^2 & K_{dd}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c^2 \\ u_d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f^{c1} \\ f_d^2 \end{bmatrix} \quad (3.12b)$$

여기서, 윗 첨자 1과 2는 각각 하부 영역을 나타내며, f^{c1} 은 접합점에서의 동일한 변위를 나타내기 위한 구속력이다. 식(3.12b)를 정적 축약에 의해 u_d^2 에 관해 풀면 다음을 얻는다.

$$u_d^2 = (K_{dd}^2)^{-1} (f_d^2 - K_{dc}^2 u_c^2) \quad (3.13)$$

이를 식(3.12b)의 첫 번째 식에 대입하고 구속력에 관해 풀면 다음의 관계식을 얻는다.



$$f^{c1} = (K_{cc}^2 - K_{cd}^2 (K_{dd}^2)^{-1} K_{dc}^2) u_c^2 + K_{cd}^2 (K_{dd}^2)^{-1} f_d^2 \quad (3.14)$$

접합점에서의 변위가 동일하다는 적합 조건 $u_b^1 = u_c^2$ 을 만족하기 위하여 이들 접촉면에서의 구속력은 절대값이 같고 부호가 반대이므로 이를 식(3.12a)에 적용한다. 즉 식(3.14)를 식(3.12a)에 대입하면 최종으로 다음과 같은 평형방정식이 유도되며 이 식에 의해 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^1 & K_{ab}^1 & 0 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 & -K_{cc}^2 + K_{cd}^2 (K_{dd}^2)^{-1} K_{dc}^2 \\ 0 & K_{dc}^2 & K_{dd}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^1 \\ u_b^1 \\ u_d^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 + K_{cd}^2 (K_{dd}^2)^{-1} f_d^2 \\ f_d^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

위의 평형방정식은 접합점에서의 내부 힘이 동일하다는 조건하에서 정적 축약에 의한 전체 영역의 평형 방정식을 나타낸다. 그러나 일반적으로 Fig. 4(a)와 같은 구조체의 평형 방정식은 다음과 같이 명확히 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^1 & K_{ab}^1 & 0 \\ K_{ba}^1 & K_{bb}^1 + K_{cc}^2 & K_{cd}^2 \\ 0 & K_{dc}^2 & K_{dd}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^1 \\ u_b^1 \\ u_d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 \\ f_d^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

식(3.15)와 (3.16)은 동일한 형태를 취하지 않고 있음을 볼 수 있다. 따라서, 이들 결과가 동일한 지를 결정하기 위하여 Fig. 5와 같은 스프링으로 연결된 구조체의 절점 변위를 산정하였다.

(a)

(b)

Fig. 5 A structure connected by 3 springs

Fig. 5(a)와 같이 1, 2, 3의 절점에서 수평 변위를 갖는 네 개의 스프링으로 연결된 구조물의 평형방정식은 다음으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Fig. 5(a)에서와 같이 네 개의 스프링으로 연결된 전체의 구조물의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

그러나 이 구조물을 Fig. 5(b)에서와 같이 절점 2에서 두 개의 구조로 분할을 행하고 결합하는 과정에 의해 평형방정식을 유도할 수도 있다. 이때 두 개의 구조물의 접촉면인 절점 2에서 절대값은 동일하며 부호가 반대인 내부 힘 f_2^c 이 작용하게 된다. 이는 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2+f_2^c \end{bmatrix} \quad (3.19a)$$

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2b} \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2^c \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.19b)$$

위와 같이 두 개의 방정식으로 분해되며, 두 번째 식에 정적 축약을 적용하여 식(3.19b)를 u_3 에 관해 풀면 다음을 얻게 된다.

$$u_3 = \frac{k_3}{k_3+k_4} u_{2b} + \frac{f_3}{k_3+k_4} \quad (3.20)$$

식(3.20)을 식(3.19b)의 첫 번째 식에 대입하고 구속력에 관하여 풀면 다

음을 얻는다.

$$f_2^c = -k_3 u_{2b} + \frac{k_3^2}{k_3 + k_4} u_{2b} + \frac{k_3 f_3}{k_3 + k_4} \quad (3.21)$$

식(3.21)을 식(3.19a)에 사용하고 적합 조건 $u_{2a} = u_{2b}$ 를 적용하면 다음과 같은 형태의 새로운 평형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \frac{k_3^2}{k_3 + k_4} & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 + \frac{k_3 f_3}{k_3 + k_4} \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

식(3.18)과 (3.22)는 동일한 형태를 취하고 있지 않으므로 필요한 각 값을 가정하여 변위를 결정하였다. Fig. 5의 구조체에 대한 물리적인 값으로 다음을 사용하였다.

$$\begin{aligned} k_1 = 300, \quad k_2 = 400, \quad k_3 = 700, \quad k_4 = 200, \\ f_1 = 800, \quad f_2 = 300, \quad f_3 = 800 \end{aligned} \quad (3.23)$$

이들 값을 사용하여 식(3.18)과 (3.22)의 평형방정식으로부터 각 변위를 결정한 결과 다음과 같은 동일한 변위를 얻었다.

$$u_1 = 3.5534, \quad u_2 = 4.2184, \quad u_3 = 4.1699 \quad (3.24)$$

따라서, 정적 축약에 의해 하부 영역들을 조합하여 전체 영역에 대한 평형 방정식 및 이 때에 요구되는 구속력을 명확히 산정할 수 있음을 알

수 있으며, 식(3.11)과 같이 여러 개의 하부 구조 영역으로 구분되었다 할 지라도 전체 구조 영역으로 명확히 결합할 수 있음을 볼 수 있다.

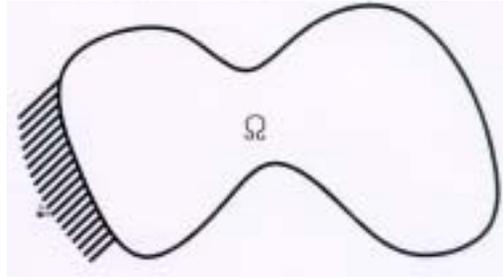
그러나 분할된 각 하부 구조 영역들 중에 강체 거동을 나타낼 경우에 즉, 자유-자유의 단부 조건을 지닐 경우에는 이 방법에 의할 수 없음을 알 수 있다. 즉, 강성 행렬이 전계수(full rank)가 아닐 경우는 정적 축약에 의해 접근할 수 없다. 즉, 하부 구조물로서 강체 거동(rigid body behavior)을 보이는 하부 구조물의 강성 행렬은 전계수가 될 수 없으며, 그 행렬의 역행렬 혹은 유연성 행렬(flexibility matrix)은 얻기 힘들다. 따라서, 이러한 어려움을 극복하기 위하여 참고문헌 2~5는 라그랑지 승수를 사용하여 해결하고자 하였으나 수치 해석에 의존해야 하는 한계를 보였다. 따라서 본 연구에서는 식(3.8)을 수정하여 강체 거동을 설명할 수 있도록 새로운 형태의 평형방정식을 제시한다.

3. 강체 거동을 포함하는 정적 평형방정식

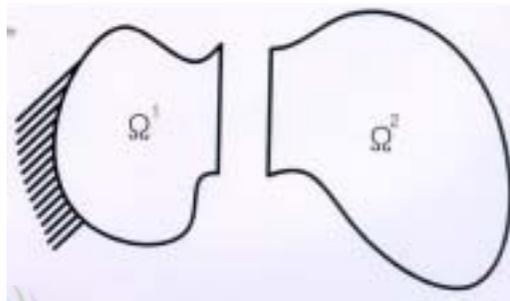


영역 Ω 을 분할한 Ω_s 영역들 중에 최소 한 개 이상의 하부 구조가 강체 거동을 나타낼 경우에 전체 영역으로 결합시키는 방법을 제시한다. 여기서도 Fig. 6과 같이 간단한 영역에 대해 설명하여 이를 확대 적용할 수 있도록 하였다. Fig. 6(a)의 전체 영역에서의 평형방정식은 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} + K_{ab} & K_{ab} & 0 \\ K_{ab} & K_{bb} + K_{cc} & K_{cd} \\ 0 & K_{cd} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_d \end{bmatrix} \quad (3.25)$$



(a)



제주대학교 중앙도서관
INTERNATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

Fig. 6 A structural system including subregions to show rigid-body behavior

Fig. 6(a)를 (b)와 같이 두 개의 영역으로 구분할 경우에 영역 Ω^2 는 강체 모드를 나타낸다. 각 하부 구조 영역에서의 평형방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \quad (3.26a)$$

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cd} \\ K_{dc} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_d \end{bmatrix} \quad (3.26b)$$

여기서, u_b 와 u_c 는 강체 구조물과의 접촉면에서의 변위들을 나타내며, 적합 조건으로서 $u_b = u_c$ 가 된다. 또한 식(3.26b)의 강성 행렬은 전계수

행렬이 아니다. 그러므로 정적 축약법에 의해 변위를 결정할 수 없다. 식 (3.26)에서 변위 벡터 $[u_a \ u_b \ u_c \ u_d]^T$ 에 대한 강성 행렬을 대각 행렬과 비대각 행렬의 합으로 표현하여 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ 0 \\ f_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & K_{ab} & 0 & 0 \\ K_{ba} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{cd} \\ 0 & 0 & K_{dc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

식(3.27)은 경계면에서의 적합 조건을 부여하지 않은 평형방정식으로 적합 조건의 부여와 더불어 변위는 다른 값을 취하게 된다. 접촉면에서의 변위가 동일하다는 구속 조건은 식(3.3)을 사용하여 다음과 같은 행렬의 형태로 표현할 수 있다.



$$[0 \ I \ -I \ 0] \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \end{bmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

여기서 I는 접촉면에서의 미지 변위 벡터의 차원과 동일한 행과 열의 단위 행렬을 나타내며, 계수 행렬 B는 식(3.28)의 첫 번째 행렬이 된다. 식 (3.27)로부터 적합 조건이 부여되지 않은 상태에서의 변위 벡터는 다음으로 계산된다.

$$\bar{u} = K_{M1}^{-1} (f_M + K_{M2} \bar{u}) \quad (3.29)$$

식(3.29)와 계수 행렬 B를 사용하면 적합 조건에 의해 합병된 전체 구조물의 평형방정식은 다음이 된다.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2}(\mathbf{B}\mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{K}_{M1}^{-1}(\mathbf{f}_M + \mathbf{K}_{M2}\bar{\mathbf{u}})] \quad (3.30)$$

따라서 적합 조건을 만족하는 실제의 변위 벡터는 다음으로 유도 된다.

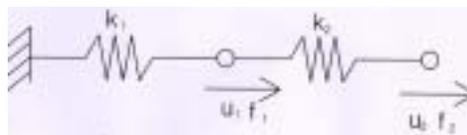
$$\mathbf{K}_M^* \mathbf{u} = \mathbf{F}_M^* \quad (3.31)$$

여기서,

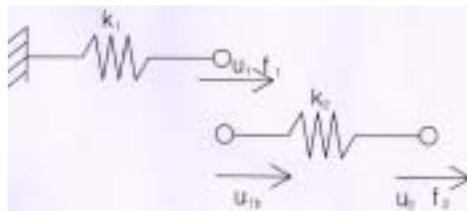
$$\mathbf{K}_M^* = [\mathbf{I} - \{\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2}(\mathbf{B}\mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{B}\} \mathbf{K}_{M1}^{-1} \mathbf{K}_{M2}]$$

$$\mathbf{F}_M^* = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{M1}^{-1/2}(\mathbf{B}\mathbf{K}_{M1}^{-1/2})^+ \mathbf{B}] \mathbf{K}_{M1}^{-1} \mathbf{f}_M$$

식(3.30)에서 경계면에서의 변위 벡터 \mathbf{u}_b 와 \mathbf{u}_c 는 동일하므로 식(3.30)에서 이들 두 개의 변위 벡터를 별도로 계산할 필요가 없이 한 개만을 필요로 한다. 그러나 식 중에 일반화된 역행렬의 결정이 요구되므로 이들 변위의 각각에 대한 식을 결정하는 데 어려움이 있다. 그럼에도 불구하고 이 방법에 의하면 라그랑지 승수와 같은 수치 해석과는 달리 명확히 해를



(a)



(b)

Fig. 7 A structural system consisted of 2 springs

얻을 수 있음을 알 수 있다. 향후에 일반화된 역행렬에 대한 많은 연구나 결과들에 의해 이를 분리하는 방법을 고려하여야 할 것이다.

위 결과의 타당성을 검증하기 위해서는 Fig. 7(a)에서와 같은 두 개의 스프링으로 연결된 구조물을 고려하자. 이 구조물의 평형방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

두 개의 스프링을 절점 1에서 두 개의 스프링으로 분할하면 Fig. 7(b)와 같이 표현할 수 있다. 이 때에 두 번째 스프링은 자유-자유 단부 조건을 갖는 강체 거동을 나타낸다. 즉, 이 스프링의 유연성을 좀처럼 결정할 수 없으므로 변위 또한 결정할 수 없게 된다. 그러나 앞선 방법에 의해 이를 다음과 같이 조합할 수 있다.

두 개의 스프링 각각의 평형방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$k_1 u_{1a} = f_1 \quad (3.33a)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1b} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.33b)$$

여기서 두 번째 방정식의 강성 행렬의 계수(rank)는 1이 되므로 정적 축약과 같은 방법에 의해 변위를 결정할 수 없다. 식(3.27)과 같이 접합면에서의 변위들에 관하여 식(3.33)을 재구성하면 다음으로 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$u_{1a} = u_{1b}$ 의 구속 조건과 식(3.31)을 사용하여 다음의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$K^*u = F^* \quad (3.35)$$

여기서,

$$K^* = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_1 - k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$F^* = \begin{bmatrix} f_1 & f_1 & \frac{k_1 + k_2}{k_2} f_2 \end{bmatrix}.$$

$$= \left(I - \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}^{-0.5} \left([1 \quad -1] \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}^{-0.5} \right)^+ [1 \quad -1] \right) \bar{u}$$

$$= \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1/k_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

(3.34)

여기서, $\bar{u} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ k_2 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1/k_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 이다. 식(3.33b)로부터 변위 $u_2 = u_{1b} + f_2/k_2$ 을 식(3.34)에 사용하고, $u_{1a} = u_{1b}$ 을 적용하면 다음과 같은 새로운 형태의 평형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

식(3.35)로부터 u_{1a} 와 u_{1b} 의 식은 동일한 형태를 취하고 있음을 볼 수 있다. 그럼에도 불구하고 식(3.31)의 평형방정식에는 일반화된 역행렬의 계산이 요구되므로 반복 계산해야 하는 점이 있다.

Fig. 7과 같은 구조물에 대해 식(3.32)와 식(3.35)와 같은 두 가지 형태

의 평형방정식을 얻었다. 이 결과가 동일한지를 파악하고자 다음과 같은 물리적인 값을 사용하여 그 때의 변위를 결정하였다.

$$k_1 = 300, \quad k_2 = 400, \quad f_1 = 5, \quad f_2 = -4 \quad (3.36)$$

식(3.36)을 식(3.32)와 식(3.35)에 사용하여 계산한 결과 다음과 같은 동일한 변위를 얻었다.

$$u_1 = 0.0033, \quad u_2 = -0.0067 \quad (3.37)$$

위의 예에서 보는 바와 같이 강체를 포함한 하부 영역을 포함하여도 그 해를 명확히 결정할 수 있음을 볼 수 있으나, 일반화된 역행렬의 명확한 해를 구하는 어려움으로 인하여 접촉면에서의 동일한 변위를 반복해서 결정하여야 하는 복잡성이 있다. 그러나 일반화된 역행렬이 계산된다면 정적 축약에 의해 자유도의 수를 줄일 수 있을 것이다.

4. 적용 예

여러 개의 영역으로 구분하고 이들 각 영역들에 대해 평형방정식을 결정하고 이들을 결합하는 방법은 대형 구조물이나 여러 개의 합성 구조에 그 적용성이 크다고 볼 수 있다. 앞에 제시된 방법은 하부 구조 영역이 강체이거나 아니거나 결합하는 데 별 문제가 없음을 보였으며, 그 효율성이 크다고 볼 수 있다. 여기서는 여러 개의 스프링으로 연결된 구조체에 적용하여 제시된 방법의 타당성을 검증한다.

Fig. 8(a)에서와 같이 5개의 스프링이 연속적으로 연결된 구조체의 절점 변위를 결정하자. 이 그림의 스프링에 대한 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

이 스프링에 의한 구조체를 Fig. 8(b)에서와 같이 4개의 하부 영역으로 분할하고 이를 결합시키는 방법을 앞선 방법에 의해 나타내었다. 4개의 하부 영역으로 구분시킬 경우에 3개의 스프링은 강체 거동을 하는 구조체를 형성하고 있음을 볼 수 있다. 이들 각각의 하부 영역에 대한 평형방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$k_1 u_1 = f_1 \quad (3.39a)$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.39b)$$

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2a} \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.39c)$$

$$\begin{bmatrix} k_5 & -k_5 \\ -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{4a} \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad (3.39d)$$

여기서, 첨자 a 는 접촉면의 변위를 나타낸다. 식(3.39)를 변위 벡터 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_{1a} \ u_2 \ u_{2a} \ u_3 \ u_4 \ u_{4a} \ u_5]^T$ 에 의해 재구성하고 강성 행렬을 대각 행렬과 그 외의 비대각 행렬에 의한 강성 행렬의 합으로 표현하면 다음으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{K}_{M1} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_M + \mathbf{K}_{M2} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.40)$$

여기서,

$$K_{M1} = \text{diag}[k_1 \ k_2 \ k_2 \ k_3 \ k_3 + k_4 \ k_4 \ k_5 \ k_5 \],$$

$$f_M = [f_1 \ 0 \ f_2 \ 0 \ f_3 \ f_4 \ 0 \ f_5 \]^T,$$

$$K_{M2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \end{bmatrix}.$$

각 접촉면에서의 변위는 동일하다는 다음의 세 개의 구속 조건이 발생한다.

$$u_1 = u_{1a}, \quad u_2 = u_{2a}, \quad u_4 = u_{4a} \quad (3.41)$$



(a)

(b)

Fig. 8 A structure connected by 5 springs

식(3.41)은 식(3.3)과 같은 형태로 나타낼 수 있으며, Boolean 행렬 B는 다음으로 쓸 수 있다.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

각 하부 영역에 강성 행렬을 K_{M1} 과 K_{M2} 의 합으로 이를 식(3.8)에 사용하면 다음과 같은 새로운 형태의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$K^*u = F^* \quad (3.43)$$

여기서,

$$K^* = [I - [I - K_{M1}^{-1/2}(BK_{M1}^{-1/2})^+ B]K_{M1}^{-1}K_{M2}]$$

$$F^* = [I - K_{M1}^{-1/2}(BK_{M1}^{-1/2})^+ B]K_{M1}^{-1}f_M.$$

식(3.43)을 변위 벡터 u 에 관하여 풀면 전체 구조물의 자유도에 해당하는 변위를 결정할 수 있다. 식(3.38)과 (3.43)의 계산 결과가 동일한지를 결정하기 위하여 스프링에 대해 다음과 같은 물리적인 값을 사용하였다.

$$k_1 = 300, \quad k_2 = 400, \quad k_3 = 100, \quad k_4 = 600, \quad k_5 = 400$$

$$f_1 = 4, \quad f_2 = 3, \quad f_3 = -7, \quad f_4 = 9, \quad f_5 = 10$$

위의 값을 사용한 식(3.38)과 (3.43)은 동일한 변위를 나타내었다.

$$[u_1 \quad u_{1a} \quad u_2 \quad u_{2a} \quad u_3 \quad u_4 \quad u_{4a} \quad u_5]^T = [0.063 \quad 0.063 \quad 0.101 \quad 0.101 \quad 0.221 \quad 0.253 \quad 0.253 \quad 0.278]^T \quad (3.44)$$

위의 예제들에서 보는 바와 하부 구조 영역이 자유-자유의 단부를 가진 구조체를 합성하여 전체 구조물의 변위 및 이 때 필요한 내부 힘을 명확히 결정할 수 있었다. 그러나 일반화된 역행렬을 필요로 하므로 자유도의 수를 줄이지 못하였으나, 역행렬의 계산 결과로부터는 자유도의 수를 줄일 수 있을 것이다. 그 정확성과 용이함은 해석 결과의 비교로부터 입증되었다.



IV. 결 론

구조물을 여러 개의 하부 구조물들(substructures)로 분할하고 이들 각 하부 구조물에 대해 이산계(discrete system)의 평형방정식을 결정하고 이들을 조합할 경우의 적합 조건을 사용하여 전체 구조물의 평형방정식을 결정하였다. 이 방법으로는 정적 축약법, 라그랑지 승수법, 그리고 참고문헌 6의 방법을 들 수 있다. 그러나 이들 각각의 방법은 자유-자유의 단부 조건을 갖는 강제 거동을 나타낼 경우에 접근하기가 쉽지 않다.

따라서, 본 연구에서는 참고문헌 6에서 제시한 방법을 수정하여 탄성의 평형방정식을 유도하였다. 유도된 방정식은 매우 간단하고 명확하며 변위를 결정하는 데 어려움이 없는 것으로 평가되었다.

또한 제시된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 몇 개의 예를 들어 수치해를 비교한 결과 동일한 결과를 얻었다. 제시된 방법은 전체 자유도의 수를 줄이지 못하는 어려움이 있으나, 일반화된 역행렬이 계산되면 정적 축약에 의해 자유도의 수를 줄일 수 있다.

향후에 일반화된 역행렬의 특성에 대해 더 많은 연구를 통하여 보다 용이한 접근법으로 개선할 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. Yang, Y.B., Kuo, S.R., and Liang, M.T., "A Simplified Procedure for Formulation of Soil-Structure Interaction Problems," *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 4, 1996, pp. 513-520.
2. Park, K.C., Justino, M.R., and Felippa, C.A., "An Algebraically Partitioned FETI Method for Parallel Structural Analysis: Algorithm Description," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp. 2717-2737.
3. Justino, M.R., Park K.C., and Felippa, C.A., "An Algebraically Partitioned FETI Method for Parallel Structural Analysis: Performance Evaluation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp. 2739-2758.
4. Felippa, C.A. and Park, K.C., "A Direct Flexibility Method," *Comput Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 149, 1997, pp. 319-337.
5. Farhat, C., Lacour, C, and Rixen, D., "Incorporation of Linear Multipoint Constraints in Substructural Based Iterative Solvers. Part 1: A Numerically Scalable Algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 1998, pp. 997-1016.
6. 은희창, 양근혁, 정현수, "구속된 시스템의 정적 평형에 관한 연구," *대한건축학회 논문집*, 2002. 10,
7. Hutton, W.C., "Vibrations of structural systems by component-mode synthesis," *J. Eng. Mech.*, ASCE, 1960, pp. 51-69.
8. Craig, R.R., "Structural dynamics," New York, Wiley, 1981.
9. Curnier, A., "On three model synthesis variants," *J. Sound Vib.*, 1983, pp. 527-540.

10. Singh, M.P., Suraez, L.E., "Dynamic condensation with synthesis of substructures eigenproperties," J. Sound Vib., 1992, pp. 139-155.
11. Moon, J.D., Cho, W., "A component mode synthesis applied to mechanisms for an investigation of vibration," J. Sound Vib., 1992, pp. 67-79.
12. Meirovitch, L., "Computational methods in structural dynamics," Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
13. Muscolino, G., "Dynamic response of multiply connected primary-secondary systems, Earth Eng. Struct. Dyn., 1990, pp. 205-216.
14. Stamato, M.C., Stafford Smith B., "An approximate method for the three dimension analysis of tall buildings," Proc. Inst Civil Eng., 1969, pp. 361-379.

