

碩 士 學 位 論 文

拘束된 시스템의 靜的 平衡에 關한 研究

指導教授 殷 熙 昌



濟州大學校 産業大學院
建設環境工學科
建築工學專攻
羅 景 煥

2003

拘束된 시스템의 靜的 平衡에 關한 研究

指導教授 殷 熙 昌

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함.

2003 년 6 월 일

濟州大學校 産業大學院

建設環境工學科

建築工學專攻

羅 景 煥



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

羅景煥의 工學 碩士學位論文을 認准함.

2003 년 월 일

委員長 _____ 인

委 員 _____ 인

委 員 _____ 인

목 차

목 차	i
Summary	ii
Figure Contents	iii
I. 서 론	1
1. 연구 배경	1
2. 연구 목적	2
3. 연구 내용	3
II. 구속 조건을 고려한 Lagrange 운동 방정식	4
1. 일반화좌표	4
2. Lagrange 승수법에 의한 Lagrange 방정식	8
3. 일반화 된 힘과 Lagrange 방정식	10
4. 구속 조건과 Lagrange 승수	12
III. 구속 조건을 만족하는 정적 평형방정식	17
1. 평형 방정식의 유도	17
2. 구속력의 물리적 의미	22
3. 적용	24
3.1 탄성체의 합성 및 평형방정식	24
3.2 탄성 구조체의 변위 구속	27
3.3 단순지지 보와 두 개의 캔틸레버 보	29
3.4 연속계의 구속	31
IV. 결 론	35
참고 문헌	36

A Study on Static Equilibrium of Constrained Systems

Ra, Kyung-Hwan

Department of Construction and Environmental Engineering
Graduate School of Industry
Cheju National University
Supervised by Professor Eun, Hee-Chang

Summary

Although Nature basically satisfies the static equilibrium, to give a discrete system geometrical constraints leads to some additional forces to sustain the static equilibrium. This paper presents an explicit static equilibrium equation of elastic structures to satisfy compatibility conditions. Extremizing the difference of total potential energy, which is a quadratic function of the deformation difference of unconstrained and constrained systems, and utilizing the fundamental linear algebra, this study exactly determines the static equilibrium equation including a term to calculate the constraint forces. And it is observed that Nature takes the constraint forces as the minimum values of all forces to satisfy the given geometrical conditions. Through the application of several structures with constraints and its extension to continuous systems, it is shown that the proposed equation is valid.

Figure Contents

Fig. 1. Graphical meaning of constraint force-----	22
Fig. 2. Bi-sected elastic body-----	25
Fig. 3. Internal forces and displacement of bi-sected elastic body ----	26
Fig. 4. A three dof system -----	27
Fig. 5. A elastic system contacted at the mid-point of two simply supported beams and cantilever beam -----	31
Fig. 6. A simply supported beam constrained at a mid-point -----	34



I. 서론

1. 연구 배경

자연의 원리를 이용한 모든 구조물이나 장치들은 힘의 평형을 기본적으로 만족하여야 한다. 힘의 불균형은 곧 구조물이나 기타 장치들의 붕괴를 초래하게 된다. 그러나 구조물들의 구조 해석은 힘의 평형 조건만으로는 반력을 포함한 부재력, 변위들을 결정하는데 한계가 있다. 즉, 기하학적인 변위 조건들과 힘의 평형 조건에 의해 이들을 산정할 수 있다. 이때에 기하학적인 조건을 충족하는 힘을 산정하고, 이 추가된 힘을 포함하는 힘의 평형방정식에 의해 부재력이나 변위들이 결정된다.

매트릭스 부정정 구조 해석에서는 먼저, 지점에 변위가 발생하지 않는다는 조건을 강성 행렬에 부여하고 이들 제약 조건에 해당하는 자유도 수를 소거하여 평형방정식을 결정하게 된다. 다음으로 조건을 충족시키는 지점의 반력을 계산하게 되며, 이 힘은 지점의 변위 조건을 만족하기 위한 최소의 힘이 된다. 따라서, 매트릭스 구조해석은 두 단계로 해석이 이루어지며, 구속력은 연산에 의해 결정된다. 특히 구조체나 탄성체가 복잡해질수록 두 단계에 의한 연산 과정이 점점 복잡하게 될 것이다. 즉, 여러 면으로 분할된 탄성체의 경우에 여러 접합면들에서의 적합 조건을 사용하므로 그 연산은 단순하지 않을 것이다.

힘의 평형방정식 외에 적합 조건과 같은 기하학적인 조건들의 부여는 미지의 변수(부재력과 변위) 보다 식이 많으므로 조건식들을 만족하는 값들은 무한하게 존재한다. 이들 무한한 경우들 중에 평형을 만족하는 실제 값을 결정할 필요가 있다. 이 실제 값은 자연 상태에서의 평형을 유지하기 위해 필요한 힘으로 적절히 산정되지 않을 경우에 평형이 유지되지 않거나 비경제적으로 과도한 설계로 이어질 수 있다.

그리하여 적절한 힘을 산정하고, 보다 광범위한 구조물에 간략히 구조 해석을 할 필요가 있다. 구속 조건이 주어질 경우에 Udwadia와 Kalaba는 Gauss 원리를 이용하여 구속된 시스템에 대한 최적의 운동을 묘사하는 방법을 유도하였다. 이때에 Gauss 함수를 최소화하여 구속 조건을 만족하는 가속도를 결정하였다. 이 방법은 비록 구조물의 동적인 특성을 파악하고 있으나, 유사하게 정적 해석에 대해 그 개념을 확대시킬 수가 있다.

Chan과 Cai는 주기적으로 연속되는 구조체에 대해 탄성해석을 실시하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 반복되는 구조체의 거동을 한 주기에 해당하는 구조체에 대해 해석을 실시하여 적합 조건을 부여하여 해석하는 과정을 취한다. 이 해석에서는 U 변환에 의해 좌표 변환을 실시하였으며, 주기적인 구조체나 탄성체에 광범위하게 적용할 수 있음을 보였다.

본 연구의 목적은 정적 구조체에 부여된 기하학적인 조건을 만족하는 구속력 및 힘의 평형방정식을 결정하는 것이다. 여기서, 기하학적인 조건이란 지점의 구속된 변위나 구조체 상호간의 변위 관계 등과 같은 선형 조건을 포함하며, 비선형 관계나 부등식의 관계는 배제한다. 구속 조건식의 부여로 인한 퍼텐셜 에너지의 변화량을 최소화하여 구속력 및 새로운 형태의 힘의 평형방정식을 유도한다. 또한, 간단한 부정정 구조물들과 탄성체에 적용하고, 그리고 연속계로 확대 적용하여 제시된 방법의 용이함과 타당성을 검증하여 복잡한 구조체에 적용 가능성을 입증한다.

2. 연구 목적

주어진 시스템에서 정적인 변형을 구속할 경우에 이러한 조건들을 만족하기 위해 구속력을 요한다. 이러한 조건을 지닌 예로서 여러 개의 하부들로 이루어진 전체 구조물에서 각 하부 구조물들에 대한 지배방정식을 결정하고 이를 조합하는 방법을 취한다. 이 때에 각 하부 구조물이 접하는 부분에서의 절점 변위는 동일하고 접촉면에서 내부 힘의 합은 0이라는 조건을 만족하여야 한다. 혹은 지반과 건축물로 이루어진 전체 시스템에서 지반과 건축물 각각에 대한 힘의 평형 방정식을 결정하고 이를 조합하

는 경우들이 이 해석 범주에 속한다.

구속 조건이 주어질 경우에 그 구조물들 간에 구속 조건을 만족하는 명확한 구속력이 작용되어야 시스템은 정적 안정을 얻을 수 있다. 만약 부정확하게 산정된 힘을 인위적으로 가할 경우에 그 구조물은 붕괴되거나 과다 설계될 것이다. 또한 기존의 연구들은 대부분이 Lagrange 승수법에 의해 수치적으로 접근하는 방법을 취하고 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 수치해석법이 아닌 목적함수를 최소로 하여 직접적으로 지배방정식을 유도하였다.

특히 가중 행렬은 적용 예를 통하여 강성 행렬임을 보였으며, 그 적용 범위는 매우 광범위할 것으로 판단된다. 제시된 방법을 적용하고자 이산계 및 연속계에도 확대 적용하여 그 방법의 적용성 및 타당성을 검증하였으며, 이 연구의 결과가 강성 모드의 시스템에도 확대 적용할 수 있을 것이다.

3. 연구 방법



정적 평형 상태를 결정하는 방법에는 여러 방법이 있으며, 본 연구에서는 동적 접근법을 사용하였다. 특히 구속 조건이 주어질 경우에 그 에너지의 변화는 새로운 형태의 운동방정식으로 표현되므로 정적 평형 상태를 나타내는 지배 방정식에 영향을 미친다. 따라서 구속된 시스템의 운동방정식을 표현하는 방정식을 유도하고 이로부터 MATLAB을 사용하여 그 조건을 만족하는 해를 결정하여 이를 정적 평형 상태로 본다. 또한 제안한 방법의 타당성 및 용이함을 여러 예를 통하여 입증한다.

II. 구속 조건을 고려한 Lagrange 운동 방정식

1. 일반화좌표

공간에서 한 입자의 위치는 지름 벡터 r 로 표현된다. r 의 성분은 어떤 좌표계를 택하든지 3개이다. 곧 3개의 좌표(또는 파라미터)가 필요하다. 따라서 n 개의 입자로 된 일반적인 역학 시스템의 경우에는 $3n$ 개의 좌표가 필요하다. 어떤 역학시스템의 위치(또는 배위, configuration)를 온전히 결정하는데 필요한 서로 독립인 파라미터의 수를 그 시스템의 자유도(degree of freedom)라 부른다. n 개의 입자로 된 시스템의 자유도 s 는 $3n$ 이다. 만일 구속조건이 있으면 $3n$ 개의 좌표(또는 파라미터) 모두 서로 독립이라 할 수 없다. 구속조건이 m 개이면 $(3n-m)$ 개의 파라미터만이 서로 독립이다. 따라서 자유도는 $s=3n-m$ 이다.

자유도가 s 일 때 s 개의 좌표는 직각좌표의 경우와 같이 반드시 길이의 차원을 갖는 파라미터일 필요는 없다. 어떤 s 개의 파라미터이든지 역학시스템의 상태를 온전히 기술할 수 있으면 된다. 그 s 개의 파라미터가 어떤 것들은 에너지의 차원, 또는(길이)²의 차원, 또 다른 것들은 무차원이라도 좋다. 역학시스템의 배위를 온전히 기술할 수 있는 s 개의 파라미터의 집합 $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ 또는 $\{q_j ; j=1, 2, \dots, s\}$ 를 일반화좌표(generalized coordinates)라 부른다. 이들 일반화좌표의 시간에 대한 도함수 $\dot{q}_j(j=1, 2, \dots, s)$ 를 일반화속도(generalized velocity)라 한다. 이 s 차원의 공간에서 어떤 역학시스템의 배위상태는 한 점으로 표현되고, 그 시스템의 시간에 따른 변화과정 또는 운동은 곡선으로 나타난다. 이 s 차원의 공간을 배위공간(configuration space)이라 한다.

직각좌표 $x_{a,i}$ 와 일반화좌표 q_j 사이의 변화식은

$$x_i = x_{a,i}(q_1, q_2, \dots, q_s; t) \equiv x_{a,i}(q_j; t) \quad (a=1, 2, 3, \dots, n; j=1, 2, 3 \dots s; i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 첨자 a 는 입자를 나타내고, i 는 직각좌표의 x, y, z 성분 곧 $i=1, 2, 3$ 을, j 는 일반화좌표를 나타내기로 한다. 속도의 직각좌표성분과 일반화속도 사이에는

$$\dot{x}_{a,i} = \sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \quad (2.2a)$$

$$\dot{x}_{a,i} = \dot{x}_{a,i}(q_j, \dot{q}_j; t) \quad (2.2b)$$

의 관계가 있다. 또 이들의 역변환식은

$$q_j = q_j(x_{a,i}; t) \quad (2.3)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{a,i}, \dot{x}_{a,i}; t) \quad (2.4)$$

와 같이 표현된다. 여기서 m 개의 구속조건식

$$g_k = g_k(x_{a,i}; t); k=1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

가 첨가되기도 한다.

Lagrange함수는 스칼라함수이므로 식(2.1)과 같은 좌표변환에 대하여 불변이다. 곧 일반화좌표로 표현할 때도 역시 $L=T-U$ 의 꼴이 될 것이다. 위치에너지 U 는 좌표변화 식(2.1)에 의하여

$$U(x_{a,i}) = U(q_j, t) \quad (2.6)$$

가 된다. 운동에너지의 경우에는 조금 복잡하여 식(2.2a)에 의하여

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{a,i}^2 &= \left(\sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right) \\
&= \left(\sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right) \left(\sum_k \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right) \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

이므로 운동에너지 $T = \sum_{a,i} m_a \bar{x}_{a,i}^2 / 2$ 는

(2.7)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j m_j \dot{q}_j + m_0 \tag{2.8a}$$

$$T = T(q_j, \dot{q}_j; t) \tag{2.8b}$$

의 형태로 변환된다. 여기서



$$m_{jk} \equiv \sum_{a,i} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \tag{2.9a}$$

$$m_j \equiv \sum_{a,i} m_a \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t}, \tag{2.9b}$$

$$m_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_{a,i} m_a \left(\frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right)^2 \tag{2.9c}$$

이다. 이들은 $q_j(j=1, 2, \dots, s)$ 와 t 의 함수이다.

만일 좌표변환이 시간에 무관하면, 곧 변화 식(2·1)에 시간 t 에 관한 함수가 아니면

$$U(x_{a,i}) = U(q_j) \tag{2.10}$$

$$T(\dot{x}_{a,i}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = T(q_j, \dot{q}_j) \quad (2.11)$$

와 같이 변환된다. $m_j = m_0 = 0$ 이며 m_{jk} 는 $q_j (j=1, 2, \dots, s)$ 만의 함수이기 때문이다. 이 경우 식(2.11)에서

$$\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (2.12)$$

의 관계식을 얻는다. 이는 운동에너지 T 가 \dot{q}_j 의 2차 동차식이기 때문이다.

Lagrange함수는 식(2.6) 및 식 (2.8)에 의하여

$$L = T(\dot{x}_{a,i}) - U(x_{a,i}) = T(q_j, \dot{q}_j; t) - U(q_j; t) \quad (2.13a)$$

$$L = L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots; t) \equiv L(q_j, \dot{q}_j; t) \quad (2.13b)$$

와 같이 일반화좌표로 쓸 수 있다. 따라서 Hamilton의 원리는

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j; t) dt = 0 \quad (2.14)$$

으로 표현된다. 곧 한 역학시스템이 배위공간의 한 점에서 다른 점으로 시간 t_1, t_2 사이에 이동하는 실제 경로는 그 시스템의 Lagrange 함수의 시간적분이 극치(또는 극소치)를 갖는 곡선이다. 따라서 일반화 좌표로 표현된 Lagrange운동방정식은 아래와 같음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.15)$$

이 $s=3n$ 개의 방정식과 m 개의 구속조건식 및 초기조건에 의하여 역학시스템의 운동은 온전히 기술된다. 이는 단지 다음 조건을 만족하는 경우에만 한다.

(1) 구속력을 제외한 역학시스템에 작용하는 힘들은 모두 위치에너지를로부터 구할 수 있어야 하며,

(2) 구속조건식은 좌표들 사이의 관계를 나타내는 식이어야 한다.

이런 구속조건이 있는 시스템을 홀로노믹 시스템(holonomic system)이라 한다. 그렇지 않은 경우 비홀로노믹 시스템(nonholonomic system)이라 한다. 구속조건식이 시간을 포함하기도하고, 포함하지 않는 경우도 있다. 전자의 경우를 레오닉 시스템(rheonomic system), 후자의 경우를 스크레로노믹 시스템(scleronomic system)이라 부르기도 한다. 홀로노믹 시스템에서 Lagrange 방정식은 Hamilton원리의 필요충분조건이 된다.

조건 (1)의 경우는 보존력 시스템에서 만족된다. 만일 위치에너지를로부터 유도되지 않는 힘, 곧 비보존력 Q'_j 이 있는 경우 Lagrange 방정식은

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \quad (2.16)$$

와 같은 꼴을 한다. 이 식은 마찰력과 같은 비보존력이 있는 경우에 유용하다. 조건 (2.2)의 경우에 구속조건은 식(2.5)과 같은 꼴을 한다. 따라서 독립이 아닌 변수들을 소거할 수 있어서 식 (2.15)와 같은 Lagrange 방정식을 세워서 문제를 해결할 수 있다. 그러나 구속조건이 홀로노믹 시스템이 아닐 경우에는 식 (2.15)를 이용할 수 없다.

2. Lagrange 승수법에 의한 Lagrange 방정식

구속조건식이 좌표뿐 아니라 속도를 포함하는 경우가 있다. 곧

$$g_k(x_{a,i}, \dot{x}_{a,i}; t) = 0, \quad g_k(q_{ji}, \dot{q}_j; t) = 0 \quad (2.17)$$

이 경우 완전미분꼴로 바꿀 수 있어서 적분가능이면 식 (2.5)와 같이 좌표들만의 관계식을 구할 수 있다. 가령 구속조건이

$$\sum_j a_{kj} dq_j + a_k dt = 0 \quad \text{또는} \quad \sum_j a_{kj} \dot{q}_j + a_k = 0 \quad (2.18)$$

으로 표현된 경우, 만일 어떤 함수 $g_k(q_j; t)$ 에 대하여

$$a_{kj} = \frac{\partial g_k}{\partial q_j}, \quad a_k = \frac{\partial g_k}{\partial t} \quad (2.19)$$

로 주어질 수 있다면 구속조건식은

$$0 = \sum_j \frac{\partial g_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial g_k}{\partial t} dt = dg_k \quad (2.20)$$

가 되어 홀로노믹 구속조건

$$g_k(q_j; t) = (\text{일정}) \quad (2.21)$$

의 꼴로 된다. 식 (2.19)와 같은 경우 구속조건이 미분형이더라도 홀로노믹 시스템을 알 수 있다.

구속조건이 식 (2.21)로 주어질 때 승수법에 의한 Lagrange 운동방정식

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) a_{kj} = 0; \quad a_{kj} \equiv \frac{\partial g_k}{\partial q_j} \quad (2.22)$$

을 얻을 수 있다. 홀로노믹인 구속조건에 대하여 생각하였으나 비홀로노

택인 경우일지라도 구속조건이 식 (2.18) 또는

$$\sum_j a_{kj} \delta q_j = 0 \quad (2.23)$$

로 표현될 수 있으면 식 (2.22)와 구속조건식 (2.23)을 연립하여 해를 구할 수 있다.

식 (2.16)과 (2.22)를 비교하면 $\sum_k \lambda_k a_{kj}$ 는 어떤 힘에 대응함을 짐작할 수 있다. 이는 구속조건 대신에 외부에서 힘을 가해 주어서 구속조건이 있을 때와 똑같은 운동효과를 가져오는 일반적인 구속력이다.

3. 일반화된 힘과 Lagrange 방정식

n개 입자로 된 어떤 입자시스템에 힘 $F_a = m_a \ddot{r}_a (a=1, 2, \dots, n)$ 가 작용하여 $\delta r_a (a=1, 2, \dots, n)$ 의 변위가 생겼다고 가상하면 이들 힘이 시스템에 한 미소한 일 δW 는

$$\delta W = \sum_a F_a \cdot \delta r_a \quad (2.24)$$

이다. 식 (2.24)를 일반화좌표 $q_j (j=1, 2, \dots, 3n)$ 로 나타내면

$$\delta x_{a,i} = \sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \delta q_j \quad \text{또는} \quad \delta r_a = \sum_j \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.25)$$

이므로

$$\delta W = \sum_{a,j} F_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (2.26)$$

라 두었다. 일은 (힘) \times (변위)로 주어지므로, δq_j 를 변위라고 보면 Q_j 는

힘에 대응한다. 따라서 Q_j 를 일반화된 힘이라 한다.

이 입자시스템의 운동에너지를 $T = \sum_a m_a \dot{r}_a^2 / 2$ 라 하면

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{r}_a^2 \right) = \sum_a m_a \dot{r}_a \cdot \frac{\partial \dot{r}_a}{\partial q_j}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{r}_a^2 \right) = \sum_a m_a \dot{r}_a \cdot \frac{\partial \dot{r}_a}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.28)$$

$r_a = r_a(q_j; t)$ 이므로

$$\dot{r}_a = \sum_j \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_a}{\partial t} \quad \text{또는} \quad \frac{\partial \dot{r}_a}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \quad (2.29)$$

이다. 따라서



$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_a m_a \dot{r}_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \quad (2.30)$$

가 되고

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_a m_a \dot{r}_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_a m_a \ddot{r}_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} + \sum_a m_a \dot{r}_a \cdot \frac{\partial \dot{r}_a}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.31)$$

가 된다. 위 식은 그 끝항이 $\delta T / \delta q_j$ 이며 $m_a \ddot{r}_a = F_a$ 임을 고려하면

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_a F_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} \quad (2.32)$$

가 된다. 한편 우변은 바로 일반화된 힘 Q_j 이므로

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; j=1, 2, \dots, 3n \quad (2.33)$$

를 얻는다. 만일 F_a 가 보존력이면

$$F_a = -\nabla_a U \text{ 또는 } F_{a,i} = -\frac{\partial U}{\partial x_{a,i}} \quad (2.34)$$

이므로 일반화된 힘 Q_j 는

$$Q_j = \sum_a F_a \cdot \frac{\partial r_a}{\partial q_j} = \sum_{a=1}^n \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial U}{\partial x_{a,i}} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (2.35)$$

가 된다. $L = T - U$ 라 두면 식 (11)은 Lagrange운동방정식 (2.15)가 됨을 알 수 있다. 따라서 식(2.33)은 일반화힘으로 표현된 Lagrange운동방정식이다. 만일 힘 Q_j 에 비보존력 Q'_j 이 존재한다면

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + Q'_j \quad (2.36)$$

과 같이 되어 식 (2.33)은 식 (2.16)과 같이 된다.

4. 구속조건과 Lagrange의 승수

f 가 여러 개의 변수의 함수인 경우 적분 I 가 어떤 구속조건하에서 극치가 될 조건 또는 경로 $y_i(x)$ 를 구하는 경우가 많이 있다. 이 경우 구속조건에 의하여 변수의 수를 줄이고, 따라서 방정식의 수를 줄여서 문제를

풀 수 있다. 그러나 그렇게 하는 것이 오히려 번거롭고 복잡하여 불편할 때가 많다. 그래서 보통 Lagrange의 미완승수(Lagrange's undetermined multiplier)의 방법을 많이 사용한다.

함수 f 가 두 개의 종속변수 $y_1(x), y_2(x)$ 및 한 개의 독립변수 x 의 함수인 경우를 고려하자. 곧

$$f = f[y_1(x), y_2(x), y_{1,x}(x), y_{2,x}(x), ; x] \quad (2.37)$$

로 나타내어진다고 하자. 적분 I 의 변분 $\delta I = (\partial I / \partial \alpha)_{\alpha=0} \delta \alpha$ 는

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f[y_1, y_2, y_{1,x}, y_{2,x}; x] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_{1,x}} \delta y_{1,x} + \frac{\partial f}{\partial y_{2,x}} \delta y_{2,x} \right] dx \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{1,x}} \right) \right] \delta y_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{2,x}} \right) \right] \delta y_2 \quad (2.39)$$

여기서 $\delta y_1, \delta y_2$ 는 서로 독립이 아니므로 다음의 관계로 나타낼 수 있다.

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} y_2 = 0 \quad (2.40)$$

의 관계가 있다. 이식에서 δy_2 는

$$\delta y_1 = - \left[\frac{\partial g}{\partial y_1} / \frac{\partial g}{\partial y_2} \right] \delta y_2 \quad (2.41)$$

로 주어진다. 이를 식 (2.39)에 대입하면

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[-\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{1,x}} \right) \right] - \left[-\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{2,x}} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y_1} / \frac{\partial g}{\partial y_2} \right) \right] \right\} \delta y_1 \quad (2.42)$$

과 같이 된다. 여기서 δy_1 은 임의의 미소변위이다. 따라서 I 가 극치를 가질 조건 $(\partial I / \partial \alpha)_{\alpha=0} \delta \alpha = \delta I = 0$ 에 의하여 다음 식을 얻는다.

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{1,x}} \right) \right] / \frac{\partial f}{\partial y_1} = \left[-\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{2,x}} \right) \right] / \frac{\partial f}{\partial y_2} \quad (2.43)$$

이 식의 왼편은 f 와 g 의 y_1 및 $y_{1,x}$ 에 대한 도함수만을 포함하는데 반하여 오른편은 y_2 및 $y_{2,x}$ 에 대한 도함수만을 포함하고 있다. 한편 $y_i (i=1,2)$ 는 x 의 함수이므로 식 (2.43)의 양변은 x 의 어떤 함수와 같게 놓을 수 있다. 곧 $-\lambda(x)$ 라 놓으면

$$-\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{1,x}} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_1} = 0 \quad (2.44a)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{2,x}} \right) + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_2} = 0 \quad (2.44b)$$

을 얻는다. 이들은 구속조건 g 가 있을 때 $f[y_1, y_2, y_{1,x}, y_{2,x}; x]$ 의 Euler 방정식이다. 이 두 식에는 원하는 미지의 함수 $y_1(x), y_2(x)$ 외에 $\lambda(x)$ 가 하나 더 있으므로 식 (2.44a)만으로는 불충분하다. 그래서 문제의 완전한 해를 얻기 위해서는 식 (2.44a)뿐 아니라 구속조건을 함께 고려하여야 한다.

$\lambda(x)$ 는 결정되지 않은 상수이다. 그래서 이를 보통 Lagrange의 승수라 부른다. 이 Lagrange의 승수 λ 는 식 중에 상수로 나타나지만 구속조건식에 의하여 소거될 수 있다. 그러나 해를 구하는 과정 중에서 그 미정승수가 정하여지고 그 물리적인 의미가 밝혀진다. 곧 $\lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} (i=1,2)$ 는 구속력을 나타냄을 알 수 있게 된다.

식 (2.44a)는

$$F[y_1, y_2, y_{1,x}, y_{2,x}] = f[y_1, y_2, y_{1,x}, y_{2,x}] + \lambda(x)g[y_1, y_2; x] \quad (2.45)$$

인 함수 $F[y_i, y_{i,x}; x]$ 의 Euler방정식

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,x}} \right) = 0 ; i=1,2 \quad (2.46)$$

과 같음을 알 수 있다. 이는 곧

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F[y_1, y_2, y_{1,x}, y_{2,x}; x] dx = 0 \quad (2.47)$$

임을 뜻한다. 이상의 논의를 일반적인 경우로 확장할 수 있다. 곧 구속조건이

$$g_k[y_1, y_2, \dots, y_m; x] = 0 ; k=1, 2, \dots, m \quad (2.48)$$

인 경우 I 가 극대화를 가질 조건식 곧 Euler 방정식은

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{i,x}} \right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(x) \frac{\partial g_k}{\partial y_i} = 0 ; i=1, 2, \dots, M \quad (2.49)$$

가 된다. 따라서 $y_i(x)$ 및 $\lambda_k(x)$ 는 식 (2.48) 및 (2.49)를 연립하여 풀면 얻어진다.



Ⅲ. 구속 조건을 만족하는 정적 평형방정식

1. 평형 방정식의 유도

모든 구조체는 기본적으로 힘의 평형 조건을 만족하여야 한다. 힘의 평형 조건은 퍼텐셜 에너지의 변분을 최소로 하는 정적인 평형 상태를 일컫는다. 이런 개념을 기본으로 기하학적인 조건들의 부여에 의한 정적 평형 즉, 힘의 평형방정식을 유도할 수 있다. 부정정 구조물들의 구조 해석은 평형방정식 외에 기하학적인 조건들을 이용하여 해석이 행해진다. 이때에 기하학적인 조건을 만족하기 위하여 추가적인 힘을 포함하는 새로운 형태의 평형방정식이 된다. 다음에서는 구속 조건이 주어질 경우에 평형방정식을 유도하며, 이때 발휘되는 구속력을 정의하는 식을 결정한다.

n 자유도의 탄성 구조체의 퍼텐셜 에너지는 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (3.1)$$

여기서, \mathbf{u} 와 \mathbf{F} 는 각각 $n \times 1$ 변위 및 하중 벡터를 나타내며, \mathbf{K} 는 $n \times n$ 대칭의 강성 행렬을 나타낸다. 이 구조물의 일부의 절점에 변위를 구속시키거나 변위의 상대적인 관계를 구속시킬 경우에 이들은 다음과 같이 표현되며, 식(3.1)의 퍼텐셜 에너지는 새로운 형태를 취하게 된다.

$$\phi_i(\mathbf{u}) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad n > m \quad (3.2)$$

이 조건은 변위에 대한 선형 관계에 국한되며, c_i 는 상수이다. 구조체에 식(3.2)와 같은 조건들을 부여한다면 역학적인 특성 변화에 영향을 미치며

정적 평형 상태에 변화가 나타난다. 즉, 식(3.1)의 퍼텐셜 에너지는 이러한 영향을 포함하여 다음과 같이 수정된다.

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{F} + \mathbf{F}^c) \quad (3.3)$$

여기서, \mathbf{F}^c 는 식(3.2)의 조건을 만족하기 위해 구조체에 작용하는 추가적인 구속력 벡터를 나타낸다.

식(3.2)의 조건으로 인하여 식(3.1)로부터 식(3.3)의 퍼텐셜 에너지에 변화가 발생하게 된다. 이 퍼텐셜 에너지의 차이를 변위 벡터의 차이에 의한 이차형과 가중치 행렬로서 강성 행렬을 사용하면 다음과 같은 함수로 표현할 수 있다.

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{K} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \quad (3.4)$$

여기서, 변위 벡터 $\hat{\mathbf{u}}$ 는 단부들의 조건이 자유인 강체(rigid body)를 배제한 정적 구조물에 식(3.2)와 같은 조건이 부여되지 않은 상태에서의 변위 벡터를 나타내며, \mathbf{u} 는 그 조건들이 부여되었을 경우에 구조체의 실제 변위 벡터를 나타낸다.

식(3.4)와 같이 주어진 퍼텐셜 에너지의 변화량을 최소화함으로서 실제의 변위를 얻을 수 있다. 여기서, 최소화란 식(3.2)와 같은 조건의 부여에도 불구하고 자연의 상태에서 평형을 유지시키기 위한 조건으로 해석될 수 있다. 식(3.4)의 최소화는다음의 수학적인 기호로 표현할 수 있다.

$$\Delta\pi = \|\mathbf{K}^{1/2}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})\|_2^2 = 0 \quad (3.5)$$

여기서, $\|\cdot\|_2^2$ 는 (\cdot) 의 제곱 합의 최소를 의미하며, 식(3.5)의 최소화는 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ 에 해당될 수 있으나 공학적인 의미가 없으므로, 공학적인 의미가

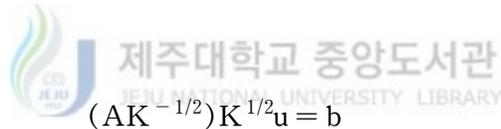
있는 새로운 해를 구할 필요가 있다.

식(3.2)의 조건을 만족하는 해는 실제의 해이나, 식의 수가 미지수 보다 작으므로, 명확한 해를 얻기 힘들다. 그러므로 식(3.5)를 적용하여 다음과 같이 해를 산정한다. 식(3.2)의 조건은 다음과 같이 행렬의 형태로 나타낼 수 있다.

$$Au = b \quad (3.6)$$

여기서, 행렬 A 는 $m \times n$ 의 계수 행렬을 나타내며 계수(rank)는 m 이 되며, b 는 $m \times 1$ 벡터이다. 행렬 A 는 정방행렬이 아니므로 변위 벡터 u 를 명확히 산정하는 것은 매우 힘들다.

식(3.5)에 $F = K\hat{u}$ 와 식(3.6)의 조건을 사용함으로 이들을 연관시킬 수 있다. 식(3.6)을 식(3.5)에 사용하기 위하여 다음과 같이 강성 행렬을 사용하여 변환한다.



$$(AK^{-1/2})K^{1/2}u = b \quad (3.7)$$

여기서, K 는 양의정치성 행렬(positive definite matrix)로, 행렬 $(AK^{-1/2})$ 는 $m \times n$ 행렬이 되며 식(3.7)의 일반해¹⁾는 선형대수학으로부터 일반화된 역행렬을 사용하면 다음과 같은 해로 정의된다.

$$K^{1/2}u = (AK^{1/2})^+b + [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y \quad (3.8)$$

여기서, ‘+’는 일반화된 역행렬을 나타내며, y 는 임의의 벡터이므로 식

1) A , x , b 가 각각 $m \times n$, $n \times 1$, $m \times 1$ 행렬일 경우에 $Ax = b$ 의 x 에 관한 일반해는 다음과 같이 정의된다.

$$x = A^+b + (I - A^+A)r$$

여기서, r 은 임의의 벡터이다.

(3.8)에서 변위들은 무한함을 볼 수 있다. 이들 무한해 중에서 힘의 평형 조건을 만족하는 실제의 해를 구하여야 한다. 이를 위해 식(3.8)을 식(3.5)에 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K^{1/2}\hat{u} - (AK^{1/2})^+b - [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y = 0 \quad (3.9)$$

식(3.9)에서 $Q = [I - (AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]$ 라 하고, 행렬 Q 의 계수(rank)는 최대 m ($n > m$)이므로 일반화된 역행렬의 풀이법을 사용하여야 한다. y 에 관한 일반해를 또 다시 구하면 다음과 같이 유도된다.

$$y = Q^+[K^{1/2}\hat{u} - (AK^{-1/2})^+b] + [I - Q^+Q]z \quad (3.10)$$

여기서, z 는 임의의 벡터이며, 일반화된 역행렬의 기본 성질인 $(AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})(AK^{-1/2})^+ = (AK^{-1/2})^+$ 을 사용하면 $Q^+Q = Q$ 가 되며, 간단한 연산 과정을 통하여 식(10)은 다음과 같이 유도된다.

$$y = [K^{1/2} - (AK^{-1/2})^+A]\hat{u} + [I - Q]z \quad (3.11)$$

식(3.11)을 식(3.8)에 대입하고 일반화된 역행렬의 기본 성질을 사용하면 다음의 평형방정식을 얻는다.

$$K^{1/2}u = K^{1/2}\hat{u} + (AK^{-1/2})^+(b - A\hat{u}) \quad (3.12a)$$

혹은

$$u = \hat{u} + K^{-1/2}(AK^{-1/2})^+(b - A\hat{u}) \quad (3.12b)$$

위에서 보는 바와 같이 구속 조건에 의한 변위 성분들의 소거 없이 각 변위 및 부재력이 계산된다.

식(3.12)에 유도된 변위 벡터 u 는 식(3.2)의 조건을 만족하며, 퍼텐셜 에

너지의 변화량에 관한 이차 함수를 최소로 하는 변위 벡터가 된다. 힘의 평형방정식은 식(3.12)의 양변에 강성 행렬 K 를 곱하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Ku = K \hat{u} + K^{1/2}(AK^{-1/2})^+(b - A \hat{u}) \quad (3.13)$$

여기서, 우변의 두 번째 항은 조건 (3.2)를 만족하기 위해 필요한 구속력 F^c 에 해당한다. 식(3.3)의 퍼텐셜 에너지에 대해 변위에 관한 변분을 취하면 다음을 얻는다.

$$\delta\pi = \delta u^T(Ku - F - F^c) = 0 \quad (3.14)$$

여기서, F 와 F^c 는 식(3.13)의 우변에 처음 항과 두 번째 항에 각각 해당하며, 이 식에서 보는 바와 같이 탄성 구조체에 변위의 구속은 추가적인 힘을 요하며, 탄성체에 대한 후크 방정식에 추가적인 구속력의 합으로 표현됨을 알 수 있다. 식(3.13)의 평형방정식은 식(3.2)의 조건을 만족하는 모든 변위 성분들 중에 퍼텐셜 에너지의 변화량을 최소로 하는 식이다.

탄성 구조체에 식(3.2)와 같은 조건이 부여된다면 구속력이 추가로 발휘됨을 알 수 있었으며, 그림 1은 정정 구조물의 강성과 정정 구조물의 임의 절점들의 변위를 구속시켰을 경우에 강성을 비교하고 있다. 이 그림에서 절점의 변위가 구속된 경우로 식(3.6)에서 $b=0$ 인 기하학적인 조건에 해당된다. 이 그림에서 구속 조건이 주어지지 않을 경우에 탄성 구조체의 강성을 K 로 가정하였으며, 임의의 절점에서의 변위를 구속시켰을 경우에 그 강성을 K^* 로 정의하면, $K^* = K - K^{1/2}(AK^{-1/2})^+A$ 로 나타낼 수 있다. 그리고 두 그래프의 차는 구속 조건으로 인한 구속력을 의미한다. 이 그림에서 보는 바와 같이 구속 조건에 의한 강성의 차이 및 구조체의 역학적인 특성의 변화가 나타남을 알 수 있다.

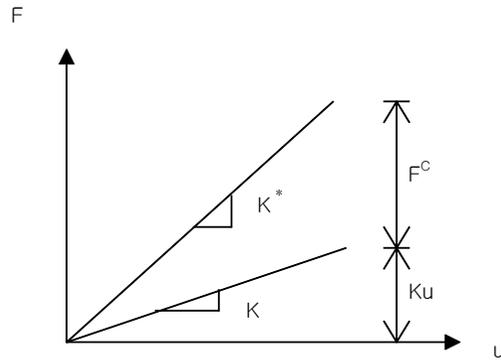


Fig. 1 Graphical meaning of constraint force

또한 구속력의 명확한 산정에 의해서만이 구조체의 물리적 변화를 고려한 각종 설계를 행할 수 있을 것이다.

2. 구속력의 물리적 의미

전절의 유도 과정에서 보는 바와 같이 구속력은 주어진 구속 조건을 만족하기 위해 자연에 의해 발휘되는 힘이라고 볼 수 있다. 그러나 구속 조건을 만족하는 구속력은 식(3.8)에서와 같이 무한하다. 따라서, 식(3.13)과 같은 구속력의 물리적인 의미는 다음과 같이 볼 수 있다. 식(3.14)로부터 구속력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F^c = Ku - K\hat{u} \quad (3.15)$$

식(3.15)를 식(3.4)에 적용하면 퍼텐셜 에너지의 변화량은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} F^{cT} K^{-1} F^c \quad (3.16)$$

식(3.16)은 변위 차에 의한 함수가 아니라 구속력에 관한 이차 함수로 퍼

텐셜 에너지의 변화량을 최소로 하는 구속력은 다음과 같이 얻어진다.

식(3.2)와 같은 기하학적인 조건들이 탄성 구조체에 부여된다면 식(3.8)의 양변에 $K^{1/2}$ 을 곱한 후에 $K\hat{u}$ 을 빼면 구속력에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$F^c = K u - K \hat{u} = K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ b + K^{1/2} [I - (AK^{-1/2})^+ (AK^{-1/2})] y - K \hat{u} \quad (3.17)$$

식(3.17)에서 보는 바와 같이 구속력 F^c 는 임의의 벡터 y 로 인하여 무한함을 볼 수 있다.

식(3.4) 혹은 (3.5)에서와 같이 $u - \hat{u}$ 를 최소로 하는 것과 유사하게 식(3.16)을 구속력에 관해 최소화시키면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ b + K^{1/2} [I - (AK^{-1/2})^+ (AK^{-1/2})] y - K \hat{u} = 0 \quad (3.18)$$

식(3.18)에서 $Q = [I - (AK^{-1/2})^+ (AK^{-1/2})]$ 이라고 정의하고, $Q^+ Q = Q$ 인 성질을 이용하면 임의의 벡터 y 는 다음과 같다.

$$y = K \hat{u} - (AK^{-1/2})^+ AK^{1/2} \hat{u} + (AK^{-1/2})^+ (AK^{-1/2}) z \quad (3.19)$$

여기서, z 는 또 다른 임의의 벡터가 된다.

식(3.19)의 벡터 y 에 대한 해를 식(3.17)에 사용하면, 다음과 같은 구속력에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$F^c = K^{1/2} (AK^{-1/2})^+ (b - A \hat{u}) \quad (3.20)$$

따라서, 식(3.16)의 최소화 과정으로부터 구속력은 구속 조건을 만족하

는 모든 구속력들 중에서 가장 작은 값임을 알 수 있다. 이 구속력은 부정정 구조 해석에서 지점의 반력으로 계산되므로 구조 설계시에 이 보다 작은 값의 부재력에 대하여는 불평형을, 이 보다 클 경우에는 비경제적인 설계를 나타낼 수 있다. 다음에서는 유도된 평형방정식을 사용하여 구조체의 변위 및 부재력을 산정하는 예를 제시한다.

3. 적용

3.1 탄성체의 합성 및 평형방정식

탄성체의 내부에 절점의 수가 많은 경우에 탄성체를 분할하여 평형방정식을 유도하고 이를 분할면에서의 변형이 일치한다는 적합 조건을 사용하여 탄성체 전체의 평형방정식을 결정한다. 예를 들어 그림 2와 같은 탄성체에 대한 분할 및 결합에 의해 정적 평형방정식을 결정하자. 양분된 탄성체 각각의 평형방정식은 다음과 같은 형태를 취한다.

$$F^{(i)} = K^{(i)} x^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (3.21)$$

여기서 첨자 i 는 2개의 탄성체를 나타내며, 변위 벡터 x 는 $n \times 1$ 벡터이다.

식(21)에 의해 탄성체 전체의 거동은 결정될 수 없으며, 이들 두 개의 탄성체의 접합면에서의 변위가 일치한다는 다음의 적합 조건을 평형방정식에 반영하여야 한다.

$$x_j^{(1)} = x_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad n > m \quad (3.22)$$

식(3.22)는 탄성체의 거동을 지배하는 구속 조건으로 볼 수 있으며, 이를 식(3.6)과 같은 행렬 형태로 나타내고 $b=0$ 이므로 식(3.12)의 평형방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}^{-1/2}(\mathbf{A}\mathbf{K}^{-1/2})^+ \mathbf{A}] \hat{\mathbf{x}} \quad (3.23)$$

여기서, 계수 행렬 \mathbf{A} 는 모든 요소가 0 혹은 1인 Boolean 행렬이며, 행렬 \mathbf{K} 와 $\hat{\mathbf{x}}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(1)} \\ \mathbf{F}^{(2)} \end{bmatrix}$$

또한 식(3.23)에서 강성 행렬 \mathbf{K} 를 양변에 곱하면 괄호 내의 두 번째 항은 구속 조건을 만족하기 위해 필요한 구속력이 된다. 그리고 분할면에서의 구속력은 절대값은 같고 부호가 다르므로 분할면에서 힘의 평형 조건을 만족한다. 다음은 간단한 탄성체를 이등분하여 식(3.23)을 적용한 예이다.

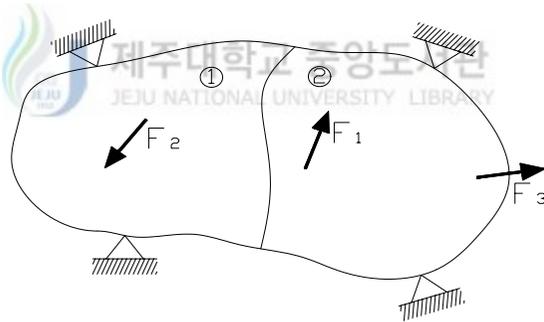


Fig. 2 Bi-sected elastic body

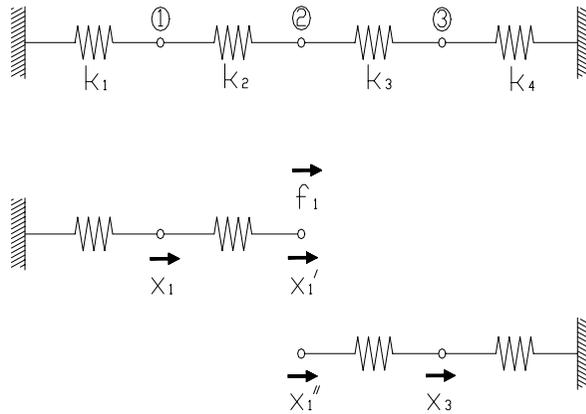


Fig. 3 Internal forces and displacement of bi-sected elastic body

그림 3에서와 같은 탄성체를 절점 ②에서 분할하여 두 개의 탄성체로 분할한다면 각 탄성체의 평형방정식은 식(3.21)의 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2'' \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

식(3.24)에서 $\hat{x} = K^{-1}F$ 에 의해 산정된 변위 벡터는 두 개의 분할된 탄성체의 변위를 나타내며, 접합점에서의 동일한 변위 조건을 부여하여야 한다.

분할면인 절점 ②에서의 변위는 동일하다는 조건은 다음으로 쓸 수 있다.

$$x_2' = x_2''$$

혹은 $A = [0 \ 1 \ -1 \ 0], \ b = 0 \quad (3.25)$

식(3.25)와 같은 조건은 식(3.24)의 평형방정식을 불만족하며, 추가적인 힘을 필요로 하게 된다. 그러므로 식(3.24)와 (3.25)의 계수들을 식(3.23)의 평형방정식에 대입하면 새로운 평형방정식을 얻을 수 있다. 일반화된 역행렬은 MATLAB이나 MATHEMATICA와 같은 소프트웨어를 사용하여 얻을 수 있다.

이 예제에서 보는 바와 같이 매트릭스 구조 해석과는 달리 주어진 조건식들의 계수들을 단지 식(3.23)의 방정식에 대입함으로써 해를 구할 수 있으며, 주어진 조건을 만족하기 위해 필요한 힘을 명백히 얻을 수 있음을 볼 수 있다. 이를 근거로 보다 복잡한 탄성체나 혹은 몇 개로 분할된 탄성체의 경우에 접합면에서의 적합 조건을 부여하여 평형방정식을 유도할 수 있다.

3.2 탄성 구조체의 변위 구속

그림 4에서와 같이 변위가 u_1, u_2, u_3 에 의해 표현되는 3자유도의 탄성 구조체를 고려하자. 각 절점에 f_1, f_2, f_3 의 외력이 작용할 경우에 이 구조체의 정적 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

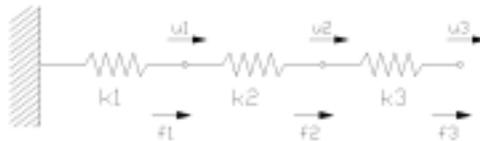


Fig. 4 A three dof system

만약 이 구조체의 정적 변위를 다음과 같은 관계식에 의해 구속하도록 가정하자.

$$2u_2 = u_1 + u_3$$

혹은

$$[1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

식(3.12)에 각 계수들은 다음과 같이 산정되며, 이들에 의해 새로운 평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_1 \\ \widehat{u}_2 \\ \widehat{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

$$A = [1 \quad -2 \quad 1], \quad b = 0 \quad (3.28)$$

구조체의 역학적인 성질을 다음과 같이 가정하여 구속 조건이 부여되었을 경우에 정적인 변위를 결정하였다.

$$k_1 = 200, \quad k_2 = 300, \quad k_3 = 400, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 20, \quad f_3 = 30$$

이들 값을 사용하여 식(3.23)의 각 항의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$\widehat{x} = [0.1159 \quad 0.1932 \quad 0.2682]^T$$

$$K^{-0.5} = \begin{bmatrix} 0.0548 & 0.0207 & 0.0123 \\ 0.0207 & 0.0574 & 0.0248 \\ 0.0164 & 0.033 & 0.0699 \end{bmatrix},$$

$$(AK^{-0.5})^+ = [5.2378 \quad -10.7262 \quad 5.7277]^T$$

이들에 의한 각 절점에서의 수직 변위는 $u_1 = 0.25, u_2 = 0.36, u_3 = 0.47$

이며, 이 값은 식(3.27)의 구속 조건을 만족함을 볼 수 있다. 또한 이 조건을 만족하기 위해 필요한 추가적인 구속력은 다음과 같이 산정된다.

$$f_1^c = 15.7, f_2^c = -31.4, f_3^c = 15.7$$

이들 구속력은 식(3.27)과 같은 조건을 만족하기 위해 필요한 힘으로 인위적으로 이들 힘을 발휘시킨다면 원하는 변위로 제어가 가능할 것이다. 또한 이 힘은 최적의 힘으로 이 보다 클 경우에 원하는 구속 제어가 불가능할 것이다.

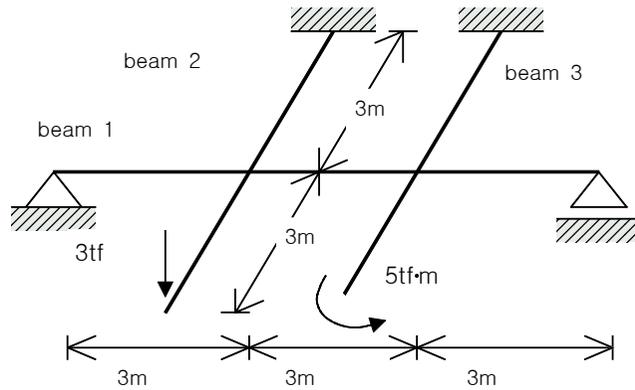
3.3 단순지지 보와 두 개의 캔틸레버 보

그림 5는 단순지지 보가 두 개의 캔틸레버 보의 중앙에 접합된 구조를 나타내고 있다. 두 개의 캔틸레버 보의 자유단에 각각 집중 하중과 모멘트가 작용한다. 각 절점에서의 수직 변위와 처짐각으로 정의되는 보 요소로 가정하였다. 단순지지보를 3개의 보 요소로, 캔틸레버 보는 각각 2개의 보 요소로 이루어졌다 가정하면 이들에 의한 평형방정식 $F = Kx$ 를 구할 수 있다.

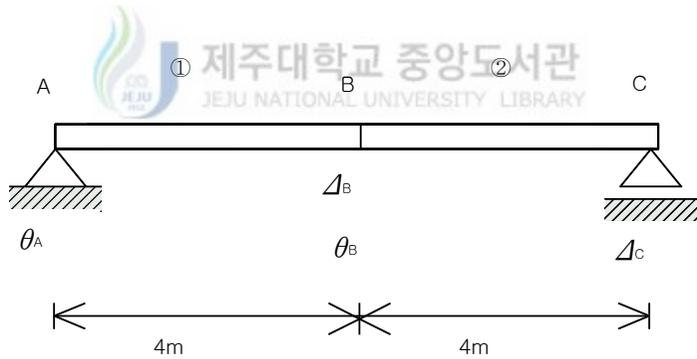
캔틸레버 보와 단순지지보가 접하는 점에서의 수직 변위가 동일하다는 기하학적인 조건이 발생한다. 따라서, 각 보의 평형방정식과 이들 조건들을 식(3.12)의 평형방정식에 대입하면 그림 5의 구조체의 평형방정식을 유도할 수 있으며, 적절한 연산에 의해 변위와 구속력을 결정할 수 있다.

보1과 보2의 접합점에서의 수직 변위는 0.127cm, 보1과 보3의 접합점에서의 수직 변위는 0.116cm으로 계산된다. 이 때에 두 접합점에서는 각각 $\mp 1.01tf$ 와 $\pm 1.20tf$ 의 구속력이 작용한다. 접합점에서 구속력의 합은 0이 되며, 접합점에서 동일한 수직 변위는 이들 힘에 의해 유지됨을 알 수 있다. 그러나 여기서 산정된 구속력은 이들 값 보다 크더라도 접합점에서의 절점 변위는 동일하지만 이 보다 작은 힘에 의해서는 주어진 조건을 불만족하게 될 것이다. 그러므로 여기서 얻은 구속력은 동일한 절점 변위를 나타내는 모든 힘들중에서 가장 작은 값으로 해석된다.

이 예제에서 보는 바와 같이 복잡한 구조물에 대하여도 식(3.12)와 같은 평형방정식의 기본 형태를 사용하면 간단히 해를 구할 수 있음을 볼 수 있다. 다음에서는 이산계로부터 연속계로 확대 적용한다.



(a) A lattice beam



(b) A simply supported beam consisted of two elements

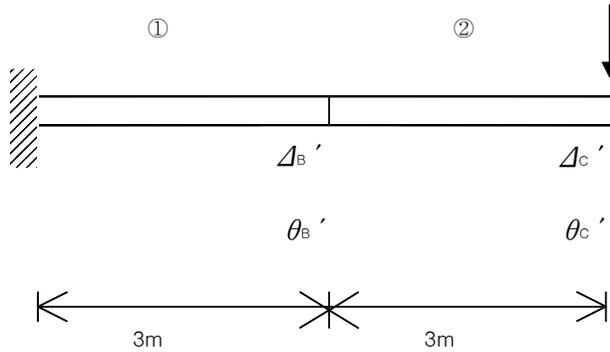


Fig. 5 A elastic system contacted at the mid-point of two simply supported beams and cantilever beam

3.4 연속계의 구축

모든 구조체는 연속계임에도 불구하고 해석상의 용이함을 위하여 이산계로 가정하여 해석을 행한다. 앞서 유도된 구조체의 변위가 구축된 시스템에 대한 평형방정식(3.12)는 이산계 구조체의 평형방정식을 나타내고 있다. 이 결과를 Ritz법을 사용하여 연속계로 확장시킬 수 있다.

그림 6에서 단순지지보의 중앙부에 수직 처짐을 스프링에 의해 구속하고 있는 것을 볼 수 있다. 단순지지보를 연속계인 탄성체로 가정하면 보의 휨에 대한 퍼텐셜 에너지는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^L [w''(x)]^2 dx - \int_0^L q_0 w dx \quad (3.28)$$

식(3.28)의 함수에 Ritz법을 적용하고자 경계 조건을 고려한 처짐을 다음과 같은 형태로 가정하였다.

$$w = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.29)$$

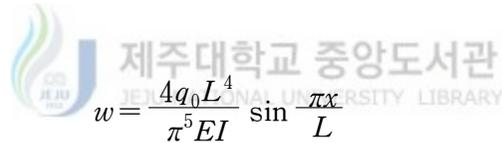
여기서, a 는 처짐의 최대 진폭으로 식(3.29)를 식(3.28)에 사용하면 다음과 같은 수식을 얻는다.

$$\pi = \frac{\pi^4 EI a^2}{4L^3} - q_0 \frac{2aL}{\pi} \quad (3.30)$$

이를 a 에 관하여 극대화시키면 최대 진폭은 다음과 같이 결정된다,

$$a = \frac{4q_0 L^4}{\pi^5 EI} \quad (3.31)$$

식(3.31)을 식(3.29)에 사용하면 처짐에 관한 변위는 다음과 같이 쓸 수 있다.



$$w = \frac{4q_0 L^4}{\pi^5 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (3.32)$$

식(3.32)로부터 $w'' = -(\pi^2/L^2)w$ 이 되며, 식(3.28)의 퍼텐셜 에너지는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \frac{\pi^4 \omega^2}{L^4} - q_0 w \right] dx \quad (3.33)$$

식(3.33)의 변분을 0으로 놓으면 다음과 같은 수식을 얻는다.

$$q_0 = \frac{\pi^4 EI}{L^4} w \quad (3.34)$$

보 중앙부에 설치된 스프링에 의한 평형방정식은 다음으로 쓸 수 있다.

$$kw_a = 0 \quad (3.35)$$

보 중앙부와 스프링의 처짐이 동일하다는 구속 조건은 다음으로 정의된다.

$$w_{(x=L/2)} = w_a \quad (3.36)$$

식(3.30)과 (3.33)을 식(3.12)의 평형방정식에 대입하면 다음과 같은 평형방정식²⁾을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w \\ w_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{4q_0L^4}{\pi^5EI} \sin \frac{\pi x}{L} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\frac{L^4}{\pi^4EI} + \frac{1}{k}} \begin{bmatrix} \frac{L^4}{\pi^4EI} \\ -\frac{1}{k} \end{bmatrix} \left(-\frac{4q_0L^4}{\pi^5EI} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4q_0L^4}{\pi^5EI + \pi kL^4} \sin \frac{\pi x}{L} \\ \frac{4q_0L^4}{\pi^5EI + \pi kL^4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

위식에 의해 단순지지보의 모든 위치에서의 처짐을 결정할 수 있다. $x=L/2$ 에서의 수직 변위는 식(3.34)로부터 얻을 수 있으며, 식(3.33)의 조건을 만족한다. 이 예제로부터 이산계에 대한 정적 평형방정식을 연속계로 확대 적용할 수 있음을 알 수 있다.

2) $A = [a \ b \ \dots \ z]$ 의 일반화된 역행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$A^+ = \frac{1}{a^2 + b^2 + \dots + z^2} [a \ b \ c \ \dots \ z]^T$$

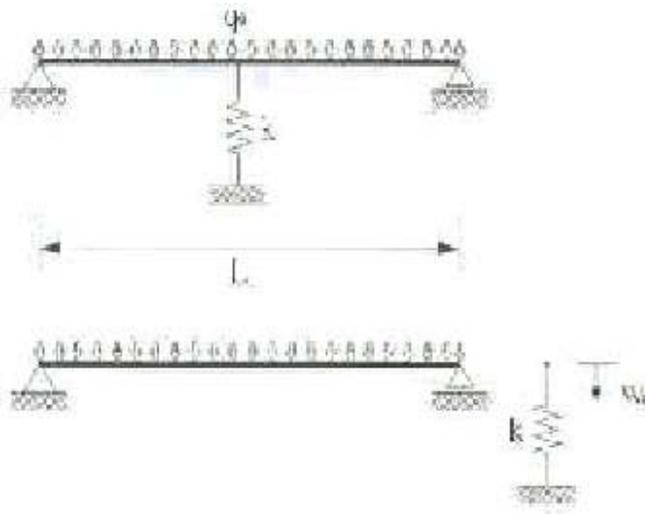


Fig. 6 A simply supported beam constrained at a mid-span

IV. 결 론

모든 구조체에 대한 변위나 부재력을 포함하는 정적 해석은 기본적으로 힘의 평형을 요구한다. 그러나 힘의 평형방정식만에 의해 그 해를 구할 수 없는 경우에 기하학적인 조건을 이용하여 해석이 행해진다. 이때에 기하학적인 조건을 만족하는 힘을 포함하는 새로운 형태의 평형방정식에 의해 힘의 평형을 유지하여야 한다.

본 연구에서는 탄성체 일부의 변위를 구속시킬 경우에 구속 조건으로 인한 퍼텐셜 에너지의 변화량을 최소로 하여 구속된 평형방정식을 유도하였다. 제시된 평형방정식은 기하학적인 조건을 만족하는 힘을 포함하며, 요구되는 각 계수들을 대입하므로써 조건을 만족하는 해를 명확히 얻을 수 있었다. 그리고 산정된 구속력은 구속 조건을 만족하는 모든 구속력들 중에서 가장 작은 값을 알 수 있었다. 부정정 구조물에 대한 매트릭스 구조 해석에서는 절점의 변위 그리고 반력의 산정과 같이 두 단계로 해석이 이루어지나 제시된 방정식에 의하면 간략하고 명확히 해를 구할 수 있었으며, 예를 통해 검증되었다. 또한 이산계로 제시된 방법을 연속계로 확대 적용하여 구속에 의한 평형방정식을 명확히 얻을 수 있었다. 제시된 방법은 유한 요소 해석이나 기타로 적합 조건을 응용하는 정적 해석에 광범위하게 적용이 가능하리라 판단된다.

참 고 문 헌

1. Udewadia, F. E and Kalaba, R. E., "A New Perspective on Constrained Motion," Proceedings of the Royal Society of London, 1992, pp. 407-410.
2. Ben, N. and James, W.D, "Applied Linear Algebra," Third Ed., Prentice-Hall International Inc., 1988.
3. Fung, Y.C., "Foundations of Solid Mechanics," Prentice-Hall International Inc., 1965.
4. Chan, H.C. and Cai, C.W., "Dynamics of Nearly Periodic Structures," Journal of Sound and Vibration, 1998, 213(1), pp. 89-106.
5. Chan, H.C., Cheung, Y.K. and Cai, C.W., "Exact Solution for Vibration Analysis of Rectangular Cable Networks with Periodically Distributed Supports," Journal of Sound and Vibration, 1998, 218(1), pp. 29-44.
6. Cai, C.W., Chan, H.C., and Liu, J.K., "Analytical Solution for Plane Trusses with Equidistant Supports," Journal of Engineering Mechanics, Apr. 2000, pp. 333-339.
7. Chan, H.C., Cai, C.W., and Liu, J.K., "Exact Static Solution of Grillwork with Periodic Supports," Journal of Engineering Mechanics, May 2000, pp. 480-487.
8. Yang, Y.B. and Kuo, S.R., "Consistent frame buckling analysis by finite element method," Journal of Structural Engineering, ASCE, 1991, pp. 1053-1069.
9. Yang, Y.B. and Kuo. S.R., "Frame buckling analysis with full consideration of joint compatible ties," Journal of Engineering

Mechanics, ASCE, 1992, pp. 871-879.

10. Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannakis, G.A., Scharph, D.W., "On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1978, pp. 99-135.

11. Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannakis, G.A., Scharph, D.W., "On the geometrical stiffness of a beam in space a consistent v.w. approach," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, pp. 105-131.

12. Elias, Z.M., "Theory and methods of structural analysis," New York, John Wiley, 1986.

13. Ziegler, H., "Principle of structural stability," 2nd ed. Stuttgart, Birkhauser Verlag, 1977.

14. Yang, Y.B., Shei도, M.S., "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points," *AIAA Journal*, 1990, pp. 2110-2116.

