碩士學位論文

高等學校에서 Maple을 利用한 函數의 指導에 관한 硏究

-共通數學 敎科 中心으로-

指導敎授 金 道 鉉

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

金 錫 滿

2000年 8月

高等學校에서 Maple을 利用한 函數의 指導에 관한 研究

-共通數學 敎科 中心으로-

指導敎授 金 道 鉉

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

2000年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 金 錫 滿

金錫滿의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

2000年 7月 日

審査委員長 印

審 査 委 員 印

審 査 委 員 印

< 抄 錄 >

高等學校에서 Maple을 利用한 函數의 指導에 관한 硏究

-共通數學 敎科 中心으로-

金 錫 滿

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 金 道 鉉

본 논문은 컴퓨터 응용 software인 Maple의 기능을 이용하여 「고등학교 공통 수학」의 교과과정 중 효율적인 함수의 지도를 위해 교수 학습 자료를 최적화 하는데 있다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 첫째, 함수의 그래프의 개념을 쉽게 획득할 수 있도록 Maple을 이용하여 그래프의 생성 과정을 구체적으로 개발하였고 둘째, 교과서에서 제시된 기존의 학습 내용을 근거로 하여 Maple의 그래픽 기능을 통하여 시각화함으로써 학습자로 하여금 흥미를 유발하도록 하였으며 셋째, Maple을 사용하여 문제들을 해결하고 그 결과를 쉽게 얻는 방법을 제시하여 수학에 대한 흥미도를 높이고 창의적 사고력을 향상시키려는 의도로 시행된 연구로써, 이 내용을 좀 더 발전시킨다면 교사 스스로 학생들에게 보여줄 자료를 만드는데 도움이 될 것으로 예상된다. 또한 이 연구는 개념의 습득면을 중시하였으므로 학습 지도시 필요한 내용은 추가하여 지도되어져야 하며, 또한 함수 그래프 개념의 습득에 대한 효과 여부는 추후 연구자들에 의하여 검증되어야 한다.

< 目 次 >

표 목 차

Ⅰ. 서　론

1. 연구의 필요성

교육부의 제 7차 교육과정에서 수학 교육에 계산기나 컴퓨터의 도입을 강조하고 있듯이 학생들의 컴퓨터 사용 능력을 키우는 일은 매우 중요하다. 정보의 수집과 처리 및 분석에 관한 소양을 배양시키는 일은 21세기의 정보화 사회에 능동적으로 대처하는 방법이 되고 있기 때문이다. 현대 사회가 산업 사회로부터 정보화 시대로 이동함에 따라 교육의 방법론도 변해야 되는데 수학 교육에서도 이러한 경향이 나타나고 있다. 근래에 등장한 구성주의적 방법론과 상황적 인지(situated cognition)에 관련된 이론들은 수학 교육에 많은 영향을 주고 있는데, 특히 인터넷의 활용과 관련하여 이론적 근거로써 제시되고 있다. 구성주의의 이론은 교사가 학생들에게 일방적으로 지식을 전달하는 방식을 탈피하여, 학생 스스로 수준에 맞는 지식을 찾아서 구축해 나가는 것을 강조하고 있다. 교사는 학생들이 반영적 추상화를 통하여 개별화 학습을 할 수 있도록 안내자 역할을 하도록 제시하고 있고, 그것은 단순히 수학 문제를 공식에 따라서 해결해 나가는 것이 아니라, 문제 상황에 따라서 교사와 수학적 지식을 교환하고 토론해 봄으로써 학생 스스로 의미 있는 지식을 구현해 나가는 학생 중심의 학습 방법이다. 컴퓨터에 의한 교육은 시청각 효과, 체계적 전달, 개별 학습 기능과 아울러 학생들의 흥미 유발에 있어 어떤 교재 보다 뛰어난 것으로 평가되고 있으며 컴퓨터를 통한 애니메이션이나 자기 학습과 같은 새로운 학습을 통하여 수학 교과의 흥미를 유발하고, 교과 내용을 새로운 방식으로 이해할 수 있을 것이다.

수학 교과는 개념이나 원리가 중요시되고, 내용의 연계가 강하여 교육이 진행될수록 학생들간의 개인차가 심한 것이 현실이다. 현 시점에서 수학 교육이 전통적인 수업 방법으로 진행된다고 볼 때, 교육의 효율성을 기대하기는 힘들다. 이를 극복하기 위한 것이 새로운 매체의 활용이다. 기술의 발달로 등장한 컴퓨터의 신속한 계산 능력, 정확성, 멀티미디어 기능을 이용하여 계산이나 식의 조작에만 매달리지 않고 학생들의 흥미를 유발함과 동시에 개념, 원리의 학습에 효과를 기대할 수 있다. 또한 가상 공간에서의 실험을 가능

하게 함으로써 수학을 학습하는데 있어 사고력과 창의력을 제고할 수 있다. 이런 방법을 모색하기 위하여 90년대 후반에 이르러 각급 학교의 교실마다 컴퓨터, 대형 모니터를 설치하고 네트워크를 구축하여 학생들에게 좀더 양질의 교육을 할 수 있도록 배려하고 있다. 그러나 수학 교과에서 활용할 수 있는 뉴 미디어에 대한 자료나 교육과정에 맞는 소프트웨어가 충분하지 않는 상황이므로 자료의 개발은 필수적이다. 이에 현행 수학 교육에서 일반적으로 사용하고 있는 언어는 아니지만, 그래픽 기능과 수치 계산, 대수적 계산, 프로그래밍 등의 다양한 환경을 제공하고 있고 사용이 편리하여 교육용 언어로서 특히 수학 교육용 언어로서 손색이 없다고 생각되는 컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종인 Maple을 이용한 수학 교과 자료를 개발하여 기초학력이 부족한 학습 부진아 학생들을 대상으로 기본 학습 능력 향상 및 선수 학습 결손 보충을 위한 자료를 개발하여 투입 적용할 필요를 느껴 연구를 추진하게 되었다.

2. 연구의 목적

수학이라는 교과의 성격을 살펴볼 때, 컴퓨터만큼 수학 학습 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육 매체도 드물다. 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적, 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

지금까지의 수학의 교수 방법은 교사가 판서를 해 가며 설명을 하고 있는데, 이런 방법으로는 계산을 한다던가 또는 그래프를 그리는데 시간을 많이 보내게 되어 많은 예를 보여주기 어렵고 그 과정에서 학생들이 지루함을 느끼고 있다. 컴퓨터를 이용한다면 이미 익숙해져 있는 계산 과정을 반복함으로써 나타나는 지루함을 예방할 수 있고, 특히 그래프를 그리는데 있어서 컴퓨터에서는 주어진 식을 변화시키면 바로바로 그래프가 그려지기 때문에 한정된 시간에 보다 더 많은 예를 보여줄 수가 있다. 이렇게 시각화하여 제시함으

로써 학생들이 내용을 이해하는데 용이하고 여기에 자신이 생긴 학생들은 직접 프로그래밍하고 이를 실행시킴으로써 문제 해결력 및 사고력 향상에 도움을 줄 수가 있을 것이다.

본 논문은 고교 수학에 있어서 집합과 더불어 가장 기초가 되고, 또 그렇기에 확실한 이해를 필요로 하는 함수에 대하여 살펴보겠다. 특히 함수에서 내용을 시각화하여 학생들에게 제시함으로써 내용을 보다 더 쉽게 이해할 수 있도록 하는데 초점을 맞추었다.

수학에 관련된 여러 가지 software들 중에서 Maple의 기능을 먼저 소개하고, 이러한 기능들 중에서 주로 animation기능을 이용하여 그래프를 시각화하여 제시함으로써 학습자가 스스로 개념과 성질을 이해하도록 할뿐만 아니라 수학 문제를 Maple에서 구현하는 방법을 제시함으로써 더 좋은 자료가 개발되는데 도움이 되고자 한다.

본 자료는 특히 학교 현장 학습에서 수학 학습 부진 학생들에게 새로운 학습 환경을 제공하여 기초학력 향상은 물론 학습자에게 흥미를 유발시켜 학습 효과를 높일 수 있고 학습 시간의 단축, 능동적인 학습 태도를 길러 주는데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 컴퓨터와 열린 수학 교육

1) 수학 교육에서 이용되는 컴퓨터의 기능

수학을 학습하는데 활용되는 컴퓨터의 기능은 그래픽과 애니메이션, 시뮬레이션, 계산 속도와 능력, 오류 수정 등이 있다.

그래픽과 애니메이션의 효과는 학습에서 중요한 위치를 차지한다. 학생들이 컴퓨터로부터 정보를 얻으려 할 때에는 청각적인 것보다 시각에 의존한다. 이러한 점에서 그래픽과

애니메이션은 학습 내용의 전달이나 피드백을 강화하기 위하여 사용되는 중요한 기능이며, 학습자들이 학습 내용을 인지적으로 구조화하는데 도움을 준다. 그러나 컴퓨터 그래픽과 애니메이션이 수학 학습에서 항상 긍정적인 효과만 수반하는 것은 아니다. 활용을 잘 못하면 학생들을 엉뚱한 곳에 집중하게 하거나 부정적인 효과를 낳을 수가 있다. 그러므로 그래픽과 애니메이션을 수학 교육에 활용하기 위해서는 이에 대한 충분한 고찰과 주의 깊은 적용이 필요하다. 컴퓨터를 이용한 학습에서 그래픽의 세 가지 근본적 기능은 다음과 같다.

첫째, 중요한 정보의 표현 기능을 한다. 그래픽은 언어나 숫자를 대신해서 학습자에게 정보를 전달할 수 있는 좋은 방법이고, 중요한 정보를 쉽게 전달하는 수단이 된다. 예를 들어 원의 방정식을 학습시킬 때 학생들이 중심과 반지름을 입력시키면 해당하는 원이 움직이는 모습을 보여주게 된다. 즉 중심이 (0,0)이고 반지름이 1인 원의 방정식 $x^2+y^2=1$ 의 모습을 보여주고, 학생들에게 새로운 중심과 반지름을 입력하기 전에 머릿속으로 새로운 원의 위치와 크기를 상상하게 한 다음 그 원을 컴퓨터 화면에 나타나는 원과 비교해 보도록 함으로써 학생들이 그 위치를 정확히 알 수 있을 뿐만 아니라, 원의 공식도 쉽게 이해할 수 있게 된다. 이와 같은 방법으로 학습시키면 학생들이 어려워하는 포물선의 준선과 초점에 대해서도 개념을 정확히 파악할 수 있게 된다.

둘째, 유추에 의한 설명과 기억 보조로서의 기능을 한다. 수학 학습에서 유추에 의해 설명함으로써 학생들이 어떤 개념을 확실히 파악할 수 있게 해주고, 또한 잘 기억할 수 있도록 도와 줄 수 있다. 또한, 그림을 곁들인 컴퓨터 그래픽에 의한 학습은 학생들의 주의를 집중시킬 수 있으므로 교사들이 설명으로만 가르치는 것보다 더 큰 효과를 얻을 수 있다.

셋째, 암시로서의 기능을 한다. 그래픽은 중요한 교과서 내용에 대한 암시로서 사용된다. 즉, 학생들에게 학습시키고자 하는 내용을 요약해 보여주거나 암시함으로써, 학생들의 호기심을 자극하고, 목표에 집중하도록 한다.

시뮬레이션은 시각적 · 공간적 등의 이유로 실제로 조작할 수 없는 경우 실제와 유사한 상황을 제시함으로써 학생들로 하여금 직접적인 참여자로서의 역할을 수행한다. 시뮬레이

션 기능은 수학의 연역적인 성질을 경험적이고 귀납적인 성질로 바뀌게 한다는 점에서 수학 교육에서 중요한 위치를 차지한다.

컴퓨터의 가장 기본적인 기능이 바로 계산 처리의 신속성이다. 컴퓨터는 산술적인 계산 뿐만 아니라 대수적 문자식의 변환도 신속히 처리할 수 있다. 종래에는 수학 교육을 계산 기능의 숙달에 초점이 맞추어졌으나 지금은 컴퓨터로 대체할 수 있기에 수학 교육의 근본적 변화를 가져오는 계기가 되었다.

컴퓨터가 보급되면서 지식관에도 큰 변화가 생기게 되었다. 즉, 완전한 지식 체계는 존재할 수 없다는 것이다. 프로그래밍을 작성하는데는 대게 오류가 있게 마련이며, 오류가 존재하지 않더라도 수정할 것이 존재하지 않는 프로그래밍은 드물다. 이러한 오류 수정의 기회를 통해 보다 완벽한 프로그래밍으로 나아갈 수 있게 되고 또한 오류는 전혀 예상하지 못하는 곳에서 일어나기 때문에 학생들의 흥미를 끌 수 있으므로 이런 과정을 통해 수학 교육에서는 사고력 향상을 위한 기회로 사용할 수 있다.

2) 수학의 성격과 수학 교육 방법 측면의 변화

컴퓨터는 수학에서의 문제의 성격과 수학자가 수학을 탐구하기 위해 사용하는 방법을 변화시키고 있다. 컴퓨터의 빠른 계산 처리와 시각적 대상의 다양한 조작 능력은 수학자들이 수학적 대상을 탐구하며 시뮬레이션 할 수 있는 실험실 환경을 제공한다. 또 ,컴퓨터가 대량의 정보를 처리할 수 있게 됨에 따라 경영, 경제, 생물학, 의학, 및 사회학 등의 분야에서 정보의 양적·논리적 분석이 가능하게 되었으며, 이러한 분석에서 요구되는 수학적인 아이디어를 제공하는 새로운 분야의 수학, 예를 들면 이산 수학 등이 새롭게 각광을 받고 있다. 뿐만 아니라 종래와 같은 연역적 증명이 아닌 방대한 사례 처리를 바탕으로 하는 새로운 종류의 증명이 받아들여지고 있으며, 컴퓨터의 그래픽 처리 능력을 바탕으로 프랙탈(fractal)과 같은 새로운 학문 분야가 생겨나고 있다.

컴퓨터는 수학 교과에서의 교수 방법과 내용의 선택에도 영향을 미친다. 교수 방법으로 종래의 지필 환경에서 구축하기 힘들었던 활동적이고 구성적인 지도 방법이 보다 용이하게 실행될 수 있다. 학교 수학의 교수 내용으로 대수, 기하, 함수, 미적분으로 이어지는

연속 수학 이외에도 수치 해석이나 알고리즘의 구안을 강조하는 이산 수학이 새롭게 도입되고 있다.

3) 수학 교육에서 컴퓨터를 활용하기 위한 과제

우리 나라에서는 1980년 중반이래 개인용 컴퓨터가 대량으로 보급되어 있으며, 수학 교육에서도 컴퓨터를 도입하려는 체계적인 움직임이 있어 왔다. 이제부터는 양질의 다양한 소프트웨어의 개발과 함께 컴퓨터를 수학 학습에 어떻게 이용할 것인가에 대한 종합적인 대책을 시급하게 마련하여야 한다. 앞으로 개선되어야 할 분야는 다음과 같다.

① 하드웨어 환경의 개선 : 각 교실에 컴퓨터가 설치되어 교사나 학생이 사용하기가 수월하고 양질의 소프트웨어를 운용할 수 있는 고급 기종의 컴퓨터가 설치되도록 재정적 뒷받침이 마련되어야 한다.

② 좋은 소프트웨어의 개발 : 학생들이 수학 학습에 대한 동기 유발이 가능한 소프트웨어, 탐구력을 향상시킬 수 있는 도구적인 소프트웨어, 시각적인 직관력을 향상시킬 수 있는 소프트웨어 등으로 개발 방향이 바뀌어야 함은 물론이고 또한, 수학과의 특성을 최대한 고려하여 개발되어야 한다.

③ 위계성 : 계통성을 특징으로 하는 수학과의 소프트웨어 개발시 중요한 점은 내용의 위계성을 분명히 해야 한다.

④ 그래픽과 애니메이션 : 소재가 다양해야 하며, 학생들의 선택이나 판단에 의하여 작동될 수 있어야 하고, 실물 조작이나 실험실 활동의 대체물이 아닌 그 자체라야 한다.

⑤ 시뮬레이션 : 사용되는 자료나 소재는 학생들의 주변 실생활과 유사한 것이 선택되어야 한다.

⑥ 계산 능력 : 개념 학습이나 문제 해결을 위한 도구로서 계산 기능이 필요함을 인식하게 함으로써 계산 기능의 의미를 파악하게 하여 보다 효과적인 계산 학습을 기대할 수 있도록 한다.

⑦ 문제 해결 : 수학 교육의 궁극적인 목표인 문제 해결력을 신장시키기 위해서는 개념 학습이나 계산 기능의 연마가 동시에 병행되어야 하지만 문제 해결 자체를 신장시키기 위한 별도의 훈련이 필요하다.

⑧ 탐구 과정 : 수학과 소프트웨어의 개발시 강조되어야 할 점은 수학적 활동의 산물 그 자체보다는 주어진 내용이 유도되는 과정이나 주어진 문제의 풀이 과정 등 수학적 활동에 더 큰 비중을 두어야 한다

⑨ 태도와 흥미 : 수학과 소프트웨어의 개발에서는 학습에 대한 흥미를 유발시키고 수학에 대한 태도를 개선하는데 주안점을 두어야 한다.

⑩ 학습자 수준의 다양성 : 수학과 소프트웨어는 다양한 학습 수준을 고려하여 가야할 경로를 동시에 명확히 나타내기 위해서 다양한 수준의 학생들의 사고 과정에 대한 근원적인 분석이 요구된다.

⑪ 다양한 사고력의 개발 : 다양한 고차원의 수학적 사고를 촉진시킬 수 있는 소프트웨어 개발이 시급히 요청된다.

⑫ 다양한 표상의 제공 : 컴퓨터 환경이 지필 환경에 비해 수학 교육의 측면에서 효율적인 것은 컴퓨터가 다양한 표상을 제공할 수 있다는 점이다. 소프트웨어는 주어진 개념에 대한 다양한 표상을 제공하고 표상 사이를 조작 번역할 수 있는 환경이 제공되어야 한다.

⑬ 컴퓨터 통합 수학 교육과정의 개발 : 한국의 수학 교육 체제는 지필 환경에 충실하도록 조직된 교과 내용, 교과 지도 방법, 교실 환경을 가지고 있어 일부 교사의 역량에 따라 컴퓨터를 활용할 뿐 활용하지 않아도 그 자체로 운영될 수 있는 닫힌 체제이다. 따라서 어느 정도의 강제성을 띈 교육과정이 만들어질 필요가 있다.

⑭ 수학 교사 재교육 : 수학 교육에 이용될 수 있는 다양한 소프트웨어 소개 및 이미 개발된 소프트웨어의 평가, 프로그래밍 활동을 통한 수학 수업, 수학 교육과정에서의 컴퓨터의 영향 등 컴퓨터가 수학 시간에 활용될 수 있다고 교사들의 의식을 변화시키는 연수가 이루어져야 한다.

4) 수학적 시각화

그 동안 시각화는 수학 교육에서 소홀히 다루어져 왔다. 그 이유는 적절한 시각화의 수단이 없었음을 들 수 있다. 지필이나 구체물은 학생들로 하여금 다양한 장면에서 역동적으로 활동할 기회를 제공하기 힘들다. 컴퓨터의 출현은 이러한 방법론상의 한계를 없앨

수 있게 해준다. 수학적 시각화에서 우리가 흥미를 가지는 것은 설명을 위한 보조적인 위치로서의 시각화가 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 도형을 그릴 수 있는 학생들의 능력이다. 수학적 시각화는 발견과 이해를 위해, 수학적 이미지를 형성하고 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다.

수학적 시각화는 모호한 종류의 직관이나 이해에 대한 표면적인 대응이 아니라, 이해에 깊이와 의미를 주고 문제 해결에 믿음직한 안내자를 제공하며 창조적 발견을 고취시키는, 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이다. 사람들은 보이지 않거나 전혀 보지 않았던 것들을 마음속에 떠올릴 수 있다. 따라서, 시각화는 이미 마음속에 있는 생각들을 응시함으로써 지식을 창출하거나 획득하는 과정이다. 시각화는 단순한 정적인 그림을 통한 이해의 차원을 넘어선다. 정적인 시각화는 교과서에서 나오는 도형과 같이 이해를 위한 보조물에 지나지 않는다. 우리는 학생들에게 증명을 이해시키기 위해 도형을 오른쪽에 두고 설명한다. 그러나 그러한 종류의 시각화는 새로운 기하 문제를 푸는데 거의 도움이 되지 못한다. 예를 들어, 보조선을 주지 않고 문제를 풀라고 하면 많은 경우 실패하는 경험을 한다. 문제는 보조선을 준 상태에서 이해시키는 것이 아니라 보조선을 그어 문제를 풀 수 있는 능력이다. 그림을 통해 탐구하고 그 결과를 정리하는 활동이 그림을 통한 이해만큼이나 강조되어야 한다.

시각화는 수학적 행동의 모든 측면에 걸쳐 도움을 줄 수 있다. 지식의 이해, 적용, 종합, 문제 해결, 심미적 정의적인 측면 등에 결정적인 영향을 준다. 이것을 세분해 보면 다음과 같다.

첫째, 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있다.

둘째, 컴퓨터 그래픽을 사용하면 학생들에게 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있다.

셋째, 보다 발전된 학습이 가능하다. 교과서에 나오는 정적인 시각화 이외에 역동적인 시각화를 사용하면 학생들에게 보다 발전된 학습을 시킬 수 있다.

넷째, 지식의 생성 배경을 이해시킬 수 있음으로써 훨씬 설득력 있는 수업이 가능하다. 컴퓨터의 그래픽 기능을 잘 활용하면 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다.(Schwartz & Yerushalmy, 1985). 현재 기하 교육은 공리나 정의로부터 주어진 기하학적 원리나 정리를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있다. 적질한 정리를 발

견하고 형성화하며 가설을 설정하는 능력은 증명하는 능력만큼 중요하다. 도형을 마음대로 조작할 수 있는 컴퓨터의 그래픽 기능은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공한다. 지금까지 수학 교육에서 이러한 탐구 환경이 마련되지 못한 것은 도형을 자유롭고 정확하게 그릴 수 있는 도구가 마련되지 못했기 때문이다.

다섯째, 시각적인 자료는 전체적이며 경우에 따라서는 많은 내용을 한번에 연결된 상태로 담을 수 있고, 따라서 보다 의미 있는 형태로 여러 지식을 한번에 파악하기 쉽다. 낱낱으로 떨어진 지식을 외우기보다는 시각적인 정보 형태로 기억하는 경우 학습 효과를 높일 수 있다.

여섯째, 문제 해결이나 증명에 도움이 된다.

일곱째, 공간 추론 능력을 신장시킬 수 있다. 컴퓨터의 기능을 활용하면 기하 개념을 지도하는데 좀더 직관적인 방법을 택할 수 있으며, 도형과 도형의 변환과 관련된 학습 내용을 전체적인 시각을 통해 파악하도록 하는데 도움이 된다. 도형을 마음대로 조작할 수 있기 때문에 학생들의 시각적 직관력이나 공간 추론 능력을 키우는데 도움이 된다.

여덟째, 만약 학생들에게 동적인 시각화를 제시했다면 수학에 대해 훨씬 좋은 태도를 갖게 될 것이다. 학생들에게 수학이 지루하고 의미 없는 수학식의 학문이라는 느낌 대신 수학의 아름다움을 실감시킬 수 있다. 수학이 지니는 미적인 측면을 느끼게 하는 것은 그 동안 소홀히 다루어진 수학 교육의 중요한 목표 중의 하나이다. 수학의 아름다움은 모델링과 시각화에 있다. 복잡한 사회적·자연적 현상을 우리는 간단한 방정식이나 기하학적 모델로 나타내고 이것을 탐구함으로써 그 현상을 해석하고 예측할 수 있다. 모델링은 시각화와도 깊은 관련이 있다. 많은 모델링 과정은 시각적으로 표현이 된다. 이 때, 학생들은 눈에 보이지 않는 자연과 사회의 내적 질서를 한눈에 볼 수 있게 되고, 수학이 이러한 질서의 패턴과 규칙을 찾아내는데 도움이 됨을 느끼게 된다.

2. 수학 교과 학습 부진의 원인

학생이 학습 부진을 초래하는 요인으로 학교 환경상의 요인과 수학의 특성에서 기인한다고 본다.

1) 학교 환경상의 요인

① 학교 시설 환경의 부직절합

교실의 크기, 위치, 조명, 실내 온도, 책상, 의자 및 기타 시설의 부적절함은 학습 부진의 계기가 되며, 주의 집중력이나 학습 동기에 큰 영향을 미친다.

② 교구 및 교육 자료의 부족함

주로 교과서에 의존하는 우리의 교육 현실은 학생의 흥미나 동기 유발에 영향을 주고, 효율적인 학습을 이끌어 갈 시청각 교재 및 교구가 부족하다.

③ 다인 수 학급으로 인한 획일적 수업

개별 학습이 어렵고 획일적인 학습 방법으로 인하여 상·하 집단의 우수아, 열등아는 의욕이 상실되고, 또한 학생의 직접적인 학습 활동 참여의 기회가 부족함으로 부진아 발생의 원인이 된다.

④ 부정적인 교사-학생의 인간관계

교육에서 교사의 태도, 교수 기능, 학생에 대한 기대 등은 학생의 학업 성취에 큰 영향을 준다.

2) 수학의 특성에서 오는 요인

① 위계성이 매우 엄격한 계통성을 지닌 선수 학습 결손에서 오는 학습 부진

② 직관보다 논리의 중요시에서 오는 학습 부진

③ 추상화, 일반화, 특수화, 기호화, 형식화하는 습관의 결여에서 오는 학습 부진

④ 학교에서 배운 내용을 실생활에 직접적으로 활용하지 못하는 것에서 오는 학습 부진

⑤ 수학의 추상직인 언어와 용어에 대한 엄격한 정의에 대한 저항감에서 오는 학습 부진

3. 함수에 관하여

1) 함수 개념의 역사적 변천[1]

고등학교 교과서에 나와 있는 함수의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때, 이 대응 f를 X에서 Y로의 함수라 하고 기호로 $f: X \to Y$와 같이 나타낸다. 이 때 집합 X를 함수 f의 정의역, Y를 공역이라고 한다.

이 함수의 정의는 추상적이라서 제대로 이해하기는 어렵다. 단지 많은 예를 통하여 이 정의가 무엇을 뜻하는지를 유추할 뿐이다. 그래서 이해를 돕기 위해서 이러한 함수의 정의가 나오기까지의 과정을 알아보자.

참고로 함수는 function을 중국어로 음을 다서 옮긴 것인데, function은 라틴어의 functio에서 나온 용어로 '작용' 또는 '기능'을 의미한다.

고대의 수학을 보면, 아라비아에서는 운동에 관한 수학적 연구가 없었으며, 그리스에서는 속도의 개념조차 없었다. 그 뒤 갈릴레이 등에 의한 운동학의 연구에서 비롯된 두 변량 사이의 관계를 추구하는 것이 함수 개념을 낳게 한 계기가 되었다.

데카르트의 해석기하학(1637)에서는 평면곡선 위의 한 점의 x좌표와 y좌표를 변수로 보고 곡선은 한 변수가 다른 변수에 종속됨을 보여준 것이 된다. 이리하여 운동을 표현하는 식과 곡선이 연구 대상이 됨에 따라 식으로 표현되는 관계나 그 그래프가 수학의 대상이 된 것이다.

함수라는 용어를 처음으로 사용한 사람은 독일의 라이프니츠(Leibniz)이다. 이 때의 함수의 개념은 지금의 함수 개념과는 판이한 것이다. 함수를 명확하게 정의하지는 않았지만 막연히 0과 1 같은 상수에 대하여 변동하는 양(변량 또는 변수) x를 생각하고 이와 함께 변동하는 변수(예 : x^2, $\sin x$, $\log x$ 등)를 x의 함수라고 하였다.

그 후 오일러(Euler)는 그의 저서 『무한소 해석서설(無限小 解析序說)』에서 '한 변수의 함수란, 그 변수와 몇 개인가의 상수로 된 해석적인 식(expressio analytica)을 말

---

1) 박세희(1987), "수학의 세계" ,서울대학교 출판부

한다.' 고 하였다. 또한 여기서 '해석적인 식'에 관해서는 아무런 설명을 하고 있지 않지만 그가 보기로 든 $az+b$, $\sqrt{a^2-4z}$, c^z 이라던가, 함수의 분류 등으로 미루어 짐작하면 그가 생각하는 함수는 대수적 함수(무리함수, 유리정함수, 분수함수)와 초월함수(삼각함수, 지수함수, 로그함수)로 나누어지는 것을 가리킨다. 그리고 x의 함수를 나타내는 기호 $f(x)$를 쓰기 시작하였다.

이 오일러의 정의는 푸리에(Fourier)가 열전도와 관련된 연구에서 함수의 뜻을 넓힐 필요가 생기기 전까지는 계속 통용되었다.

19세기는 비판 정신이 왕성하게 일어난 시기로, 이전까지 쓰이던 함수의 정의를 명확히 하려는 노력이 나타났다.

코오시(Cauchy)는 변수 사이의 관계(현대적인 표현을 쓰면 '대응')로서 간결하게 규정하였다. 즉, '여러 개의 변수 사이에 어떤 관계가 있어 그 중 한 개의 값에 따라 다른 것의 값이 정해질 때 뒤의 것을 앞의 것의 함수'라 불렀다. 이 정의는 함수를 낱낱이 x값에 대하여 y값을 정하는 일종의 규칙으로서 파악하는 계기를 열었으며, 그 결과 종래 암암리에 받아들여졌던 기하학적 이미지나 구체적인 식에 의한 표현 등은 함수 개념과는 본질적인 연관이 없는 것으로 간주하게 되었다.

이어서 디리클레(Dirichlet)는 한 함수의 푸리에급수가 수렴하기 위한 조건을 연구하는 가운데, 1837년의 한 논문에서, 연속성과 함수의 정의를 오늘날과 거의 같은 의미로 논하였다. 즉, 그는 ' a와 b가 고정된 실수이고, x가 a에서 b까지 서서히 변하면서 모든 값을 취한다 하자. 만약 x가 a에서 b까지 연속적으로 변할 때 각 x에 대응하는 유일한 값 y가 서서히 변한다면 y는 이 구간에서 x의 연속함수라 불리 운다.

이 때 y는 그 구간에서 x에 관하여 같은 규칙으로 종속될 필요도 없고 또 수학적 연산에 의하여 관계가 설정되지 않아도 무방하다. 서로 다른 부분에서는 각기 다른 규칙에 의하여 주어지든 또는 완전히 무규칙하게 주어지든 문제가 되지 않는다.' 고 하였다. 이것은 함수란 하나의 대응관계에 불과한 것이라고 본 것으로, x와 y의 대응만이 있으면 수식 등의 법칙은 없어도 된다는 점함수(點函數) (즉, 함수를 점 대 점의 대응으로 보는)의 개념을 확립한 것이다.

그 뒤에 칸토르(Cantor)의 집합론이 나타나고, 적분론이 전개됨에 따라 함수 개념에 대한 반성이 일어났다.

20세기에 들어오면서 디리클레의 정의가 강화되어 함수는 정의역, 공변역의 구조와도 관계가 있음을 밝혀 내었는데, 이는 거리 공간이나 위상 수학의 발전에 따른 것이다.

디리클레의 정의의 최초의 주요한 일반화는 프레셰 (Frechet)로서, 그는 '함수 U는 임의의 성질을 가지는 집합 E에서 정의되는데, E에 속하는 각 원소 A에 대하여 수치로 결정되는 U(A)를 대응시키는 것이다.' 라고 하였다. 여기에서 집합 E는 실수의 집합이거나 곡선, 점들의 집합일 수도 있다. 이 정의는 집합론에 입각한 함수의 일반화된 정의를 암시한다.

또, 카라테오도리(Caratheodory)도 1917년에 함수란 한 집합에서 실수의 집합으로의 대응 관계라 불렀다.

2) 함수의 현대적인 정의[2)]

함수의 현대적인 정의를 하기 위해서는 우선 곱집합과 관계의 정의를 명백히 하여야겠다.

두 집합 A, B의 곱집합을 $A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$라 정의한다. 곱집합을 카테이션곱(Cartesian Product) 이라고도 부른다. 어떤 곱집합 $A \times B$의 한 부분집합을 관계라 부른다.

즉, 관계 R이란, 어떤 두 집합 A, B가 있어서 $R \subset A \times B$인 것이다.

$(a,\ b) \in R$일 때 aRb 또는 $b = R(a)$라 나타내어, a와 b는 R이라는 관계를 가진다고 말한다.

이 때 R의 정의역은 $\{a \in A \mid (a,\ b) \in R\}$이고, 치역은 $\{b \in B \mid (a,\ b) \in R\}$이라 정의한다.

한 관계 R이 전사라고 하는 것은 '임의의 $b \in B$에 대하여 $(a,\ b) \in R$이 되는 $a \in A$가 존재할 때'로 정의하고, 단사(1대1)라고 하는 것은 '치역에 포함되어 있는 임의의 $b \in B$에 대하여 $(a,\ b) \in R$, $(a',\ b) \in R$일 때, $a = a'$이어야 함'을 의미한

---

2) 박세희(1987), "수학의 세계" ,서울대학교 출판부

다. 또 전단사라고 하는 것은 전사이면서 단사인 것을 말한다. 관계 R에서는 정의역이 A전체일 필요는 없다.

이제 함수를 정의하여 보자.

함수 $f: A \rightarrow B$라고 하는 것은

① f가 한 관계, 즉 $f \subset A \times B$이고,

② A가 정의역, 즉 $A = \{a \mid (a, b) \in f\}$이며,

③ $(a, b) \in f$, $(a', b') \in f$, $a = a'$일 때 반드시 $b = b'$ 이어야 한다.

는 세 가지 조건을 만족시키는 것을 말한다. $(a, b) \in f$ 인 것을 $b = f(a)$라 나타낸다. 그리고 함수도 한 관계이므로 전사, 단사, 전단사를 생각할 수 있다.

함수 f : A→ B에서 A는 정의역이고, B는 공변역이며 치역은 공변역의 부분집합이다. 치역과 공변역이 같을 때 전사라고 한다.

3) 초등함수의 분류

변수 x와 상수 a에 대하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 세 연산을 유한 번 시행한 꼴로 나타내는 대응 규칙

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ (a_o, a_1, \cdots a_{n-1}, a_n \text{ 은 상수}, a_o \neq 0)$$

으로 정해지는 함수를 유리정함수 또는 다항함수라 부른다. 위에서 $n = 1, 2, 3 \cdots$일 때 차례로 1차함수, 2차함수, 3차함수,…라 부른다.

다시 나눗셈까지 허용한 네 가지 연산을 유한 번 허용하여 얻어지는 함수를 유리함수라고 한다. 유리정함수가 아닌 유리함수를 특히 유리분수함수 또는 분수함수라고 한다.

사칙연산 외에 거듭제곱근 연산까지 허용하는 대수식으로 나타나는 함수를 대수함수라고 하고, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$과 같이 유리함수가 아닌 대수함수를 무리함수라고 한다.

$f(x)$가 x에 관한 대수식으로 주어져 있지 않을 때 초월함수라고 한다. 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 역삼각함수 등이 모두 초월함수이다. 이들을 특히 초등초월함수라고 한다.

4. MAPLE의 개관

1) Maple이란?

Maple V는 1980년대에 캐나다의 University of Waterloo의 K.Geddes와 G.Gonnet 교수에 의하여 처음으로 개발된 Symbolic computation system으로 기호를 포함하는 수식이나 방정식 등을 대수적으로 처리하는 능력을 갖는 획기적인 프로그램이다.

그 이후 많은 발전을 거듭한 후 Waterloo Maple Software로부터 1990년에 3D 컬러 그래픽스를 지원하는 Maple V가 출시되었고, 현재 최신판인 Maple Ⅵ가 사용되고 있다. Maple Ⅵ는 미적분, 미분방정식, 정수론, 조합론, 선형대수학, 통계학, 2D, 3D그래픽스, 애니메이션등 각 종 수학 계산을 위한 명령어 또는 패키지를 제공하고, 계산식 일부 또는 전부를 C, Fortran언어, LaTex등으로 변환이 가능하고, Maple Ⅵ 작업 창에서 직접 수학 문서 작성도 가능하며 Excel의 작업환경에서 작업도 가능하게 한다.

본문에서는 공통 수학 교과과정을 학생들에게 지도할 때, 교재에 나타나 있는 평면적이고 단순한 표현과 기계적인 풀이 과정을 통해 해답을 구하는 비 시각적인 방법 대신에 Maple을 이용하여 시각적으로 직접 보여줌으로써 교육적 효과를 높일 수 있다는 것을 제시하여 준다.

2) Maple의 특징과 기대 효과[3)]

컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종인 Maple은 현행 수학 교육에서 일반적으로 사용하고 있는 언어는 아니지만, 사용이 편리한 교육용 언어로서, 특히 수학 교육용 언어로서 손색이 없다고 생각한다. Maple은 수학의 개념 이해와 계산 능력과 관련된 문제 해결 등에 적용될 수 있다. 예를 들어, 삼차원적인 입체도형을 Maple을 이용하여 표현한다면 학생들의 입체적인 사고의 발달에 도움을 줄 수 있고, 특히 Maple은 원하는 위치에서 삼차원적인 그래프를 관찰할 수 있으므로 한층 더 효과적으로 학생들의 개념 습득을 도울 수 있다.

Maple은 여러 분야에 광범위하게 사용되고 있기 때문에 그 특징을 다 알 수는 없지만, 수학과 관련된 특징들을 중심으로 살펴보고자 한다.

---

3) 최재룡 · 추인선(1997), MapleV의 길잡이

① Maple은 바로 수식 그 자체이기 때문에 배우고 사용하기가 쉽다.

Maple은 수학에서 사용하는 대부분의 함수를 정의할 수 있으므로 표현이 매우 용이하다. 예를 들면, 학교 수학에서 많이 다루는 함수의 표현에 있어서 $f(x)=x^2+1$과 같이 표현하는데 Maple에서도 옵션을 사용하여 $f(x)=x^2+1$과 같은 수식 그 자체를 입출력에 사용할 수 있다.

```
> f(x) = x^2 + 1;
```

$$f(x)=x^2+1$$

② Maple은 정확한 값을 계산하는 계산기이다.

일반적으로 컴퓨터를 통한 수치 연산의 결과는 절단 오차, 마무리 오차 등에 의해 정확한 값을 출력하지 않는다. 그러나 Maple은 수학 및 응용 분야에서 이론식을 얻기 위한 시뮬레이션을 시행하고, 고정도(umlimited precision)의 수치 계산이 가능하며, 일반적인 계산기에서 할 수 있는 사칙 연산과 제곱근의 계산 뿐 아니라, 100!이나 π의 근사값 계산 등 복잡한 계산을 할 수 있다. 보통 계산기에서는 숫자만을 계산해 주는데 반하여 Maple은 문자의 계산까지도 완벽하게 처리함으로써 일반화를 가능하게 해 준다. 예를 들어 $\int x^2dx$를 입력하고 enter키를 치면, $\frac{1}{3}x^3$이라는 결과가 나온다.

Maple에서는 무리수나 순환소수 등을 연산하더라도 특별한 요구가 없는 한 근사값이 아닌 참값을 출력한다. 예를 들어 $\sqrt{\pi}$ 나 1/3을 Maple에서 계산하면 근사값이 아닌 $\sqrt{\pi}$나 1/3이 그대로 출력된다.

③ Maple은 기호 연산(symbolic computation)이 가능하다.

일반적으로 이전의 고급 언어로 된 프로그램에서 가장 큰 문제가 수치들의 계산만이 가능하다는 것이다. 그러나 Maple에서는 수식의 전개, 인수분해, 통분, 부분 분수로

분해하기, 약분하기, 주어진 식을 간단히 하기를 수행할 뿐만 아니라 극한, 미분, 적분, 미분방정식, 멱급수, 벡터 해석, 라플라스 변환 등에서도 기호 연산이 가능하다.

④ 다양한 그래픽의 기능이 있으며 애니메이션(animation)구현이 가능하다.

Maple은 여러 가지로 주어진 식을 그림으로 나타낼 뿐만 아니라 그림을 나타내는 형태도 자른다던가 명암을 구별하고 시점을 이동하는 등의 조작이 쉬워서 복잡한 그림도 매우 정확하게 그려볼 수 있고, 점, 선, 다각형 및 원과 같은 기본 도형과, y=f(x)형태, 매개함수, 음함수, 극좌표 함수 등고선 등의 이차원 그래프, 다면체, 삼차원 곡면, 회전체 등 삼차원 그래프를 그릴 수 있다.

그래픽을 할 때 색상, 선의 두께, 점선 등의 속성을 지정해 줄 수 있고, 그래프에 글씨를 써넣거나 몇 개의 그래프를 합쳐서 한꺼번에 나타나게 할 수도 있다. 또한, window상에서 복사하기 기능으로 한글 파일에 옮겨올 수도 있어서 수학에서 사용되는 그래프를 보다 쉽게 그릴 수 있다. 그래픽을 할 때 Maple 내부에 내장된 함수에서 원하는 결과를 얻을 수 없을 때가 종종 있는데, 이 때에는 패키지 불러오기를 하여 그래픽을 실행할 수 있다.

Maple은 다양한 애니메이션 기능이 있어 움직이는 그래프의 표현을 흥미롭게 만들 수 있다. Maple에서 애니메이션을 plot하기 위해서는 plots패키지 안에 들어있는 animate와 animate3d명령어를 사용한다.

이러한 애니메이션 기능을 수학적 개념의 설명에도 응용할 수 있다.

⑤ 고수준(high-level)의 프로그래밍 언어이다.

Maple에서는 수백 개가 넘는 내장 함수(built-functions)가 있다. 이 내장함수들을 이용하면 고수준의 프로그래밍이 가능하다. 일반 프로그래밍 언어(C, FORTRAN, COBOL 등) 와 달리 Maple의 큰 장점 중의 하나는 계산하려는 식을 입력하고 바로 계산의 결과를 얻어 볼 수 있으므로, 자신의 생각의 결과를 바로 다음 생각에 연결시킬 수 있다. 그러나 고급 언어와 비교할 때 컴파일러를 사용하여 실행 파일을 따로 만들 수 없다는 단점은 있다.

⑥ Notebook의 기능을 갖는다.

Maple은 한 화면에 명령어와 계산 결과를 보여주고, 메모가 가능하며, 크기, 색, 서체의 지정도 가능하다. 개체 삽입에 의해 다른 프로그램에서 작업을 한 것을 끼워 넣을 수 있고, 노트북을 파일로 저장하여 필요할 때 다시 쓸 수 있다. 잘 구성하면 강의 내용이 순서대로 하나 또는 여러 file에 저장되고, 다시 실행하면서 한 단계씩 재현해 볼 수 있고, 하이퍼링크의 기능을 사용해서 노트북간의 연결이 가능하다.

⑦ Maple의 구조적 특성에 의하여 학교 수학 교육의 CAI(Computer Aided Instruction) 프로그램 개발에 최적인 도구로 쓸 수 있다. 그래서 수학을 전공하는 연구진에 의하여 거의 매년 프로그램 향상을 위한 새로운 Release를 User에게 제공하고 있다.

Maple은 학생들이 문제와 관련된 원리, 관계 등을 발견하고 문제를 해결하는 능력을 함양하는데 사용되어져야 할 것이다. 학습자는 수학 학습에 Maple을 이용함으로써 까다로운 계산 때문에 어려움을 겪지 않게 되므로, 보다 많은 실생활의 문제를 다룰 수 있다. 또한 Maple이 제공하는 그래픽 기능은 중요한 시각 기능을 발달시킬 수 있을 뿐만 아니라 보다 발달된 수학 학습의 방향을 제시할 수 있게 되리라 기대된다. 그리고 여러 가지 특징을 가진 Maple 프로그램을 수학 교과 과정에 적용하기 위해 교사는 먼저 학생들에게 Maple 프로그램을 소개하고 이에 대한 학생들의 이해를 도모하고 활용 기술을 함양시켜야 할 것이다.

III. 수학 교육에서 Maple의 실제적 활용 사례

바람직한 수학 교육은 산술적인 계산에 의존하기보다는 정확한 수학적 이미지를 직관적으로 전달하는 것이라고 할 수 있다.

Mandlbrot(1983)는 수학 교육에 대해 다음과 같은 의견을 보이고 있다. "현재의 기하학은 공리를 이용해 답을 구할 수 있으면 그것으로 좋은 성적을 받을 수 있게 되어 있다. 그러나 그렇게 해서는 본질적으로 아무 것도 알지 못하는 것과 다를 것이 없고, 중요한 '기하학적 직관'은 결코 형성되지 않게 될 것이다. 오히려 도형으로 사고하고 시각적으로 문제를 파악하는 것을 중요하게 생각하여야 한다. 오늘날의 젊은이들은 TV나 비디오 게임의 발달로 시각적으로 생각하는 습관이 있다. 이제 새삼 멋도 없는 연역적인 기하의 해법 같은 것으로 되돌아가지 않고 그 '눈'을 써서 생각하는 훈련을 하면 좋을 것이다." 4)

현행 중등학교 수학 교과 과정에서의 지도는 대부분이 해석학적 풀이 방법에 의존하여 해답을 구하는 방식이다. 주어진 문제에 대한 연역적이고 비직관적인 수업 방법은 간단하고 빠른 속도로 해답을 구하는데는 효과가 있을지는 모르나, 내용 자체를 의미 있게 이해할 때에는 많은 도움이 되지 않으리라 생각한다.

Maple은 중 · 고등학교 수학의 지도와 관련해서도 다양하게 활용될 수 있는 프로그램으로 수학의 체계적인 논리성과 기호의 함축성을 따르고 있기 때문에 수학에 익숙한 교사들이 그 저작 논리를 이해하고 활용하는데 결코 어렵지 않을 것으로 생각되고, 학습 활동에 도입함으로써 학습 시간의 단조로움과 지루함에서 벗어나 학생들이 수학을 활동적이고 공간적이며, 변화하는 자연적인 현상의 중요한 부분으로 인식할 수 있다. 또한 프로그래밍 언어로서의 기능을 활용하여 나름대로의 정리 자료를 만들고, 서로 교환하였을 때 더 좋은 효과를 얻을 것이다.

Maple은 수학 교수 학습을 목적으로 사용할 수 있는 프로그램 중 하나이며, 운용 방법

---

4) 성시영 · 윤복식(1995),수학 교육에서의 Mathematica의 활용,대한수학교육학회 논문집, 제5권, 제 1호

에 따라 수학적 사실이나 원리를 실연하거나 탐구를 위한 도구로 사용될 수 있고, 계산 기능이 뛰어나고 표현 방식이 다양하기 때문에 지필 환경에서는 설명하기 어려운 개념들을 쉽게 설명해 낼 수 있기 때문에 수학적 개념의 이해를 위해 사용될 수 있고, 시각화의 장점을 활용하여 문제 해결이나 수학적 사고의 확장을 돕는 데 사용되어 질 수 있다.

학생들의 기초학력 부족, 학습 결손의 누적으로 인하여 학습의 자율성, 흥미, 의욕 등 학습 태도가 저하되고, 부진 학생의 개별 지도가 제한된 획일화된 수업 시간으로는 학습 목표 달성이 곤란한 바 수학 학습의 효과를 높이기 위해서는 교과서에 나오는 언어나 기호의 암기보다는 개념 형성에 도움되는 현실적인 경험의 장으로 조직적으로 구성하여 학생에게 제공하는 것이 필요하다고 할 수 있다. 여기서는 공통수학 교과 중 Maple V를 이용하여 함수의 개념 이해와 그래프와 관련된 기본 문제 해결 등에 적용될 수 있도록 학습 자료를 개발하고, 그 개발된 자료를 수학 교육에 활용하고자 한다.

1.교수-학습 과정안

1) 단원명 : 함 수

2) 단원의 개관

① 단원 설정 이유

우리 주위에서 볼 수 있는 여러 가지 현상을 이해하기 위해서는 그 사이의 관계를 알아야만 하는 경우가 많다. 옛날에는 수학이나 천문학에서 운동, 변화 등의 관계를 생각하였고, 중세에는 시간의 함수에 대한 양의 변화를 그래프로 나타내기 시작하였다.

이러한 상호관계를 분석하는 데에 함수는 중요한 역할을 한다.

함수란 용어는 독일의 라이프니츠(Leibniz : 1646~1716)가 사용하기 시작하였고, 함수의 기호 $f(x)$ 는 스위스의 오일러(Euler : 1707~1783)가 두 변수 사이의 관계를 함수라고 정의하였으며, 프랑스의 디리클레는 두 집합 사이의 관계로서 함수의 정의를 명백히

하였다.

그 후 함수의 개념은 집합론의 영향으로 더욱 형식화되고, 일반화되어 수학에서 필수적인 기초 개념이 되었다.

본 두 단원은 중학교에서 배운 함수를 바탕으로 여러 함수의 연산에 대한 성질과 유리 함수 와 무리함수의 그래프와 성질을 학습하여 앞으로 전개되는 함수들에 활용하고자 설정하였다.

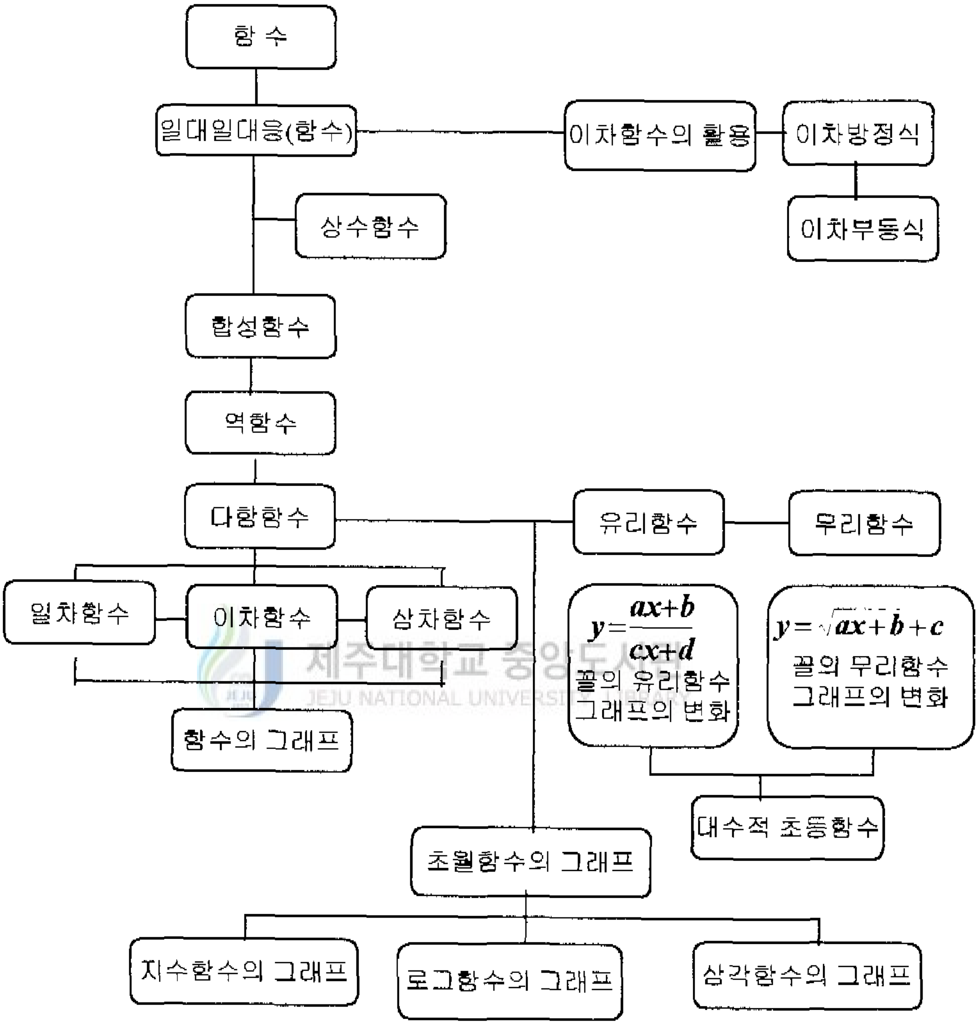
② 단원의 학습 문제

o 함수의 개념을 확립하고, 변화의 상태를 그래프로 알아본다.

o 일·이차함수의 성질과 간단한 삼차함수, 유리함수, 무리함수의 뜻과 유리함수와 무리함수의 그래프, 그리고 그 성질에 대하여 알아본다.

o. 초월함수 중 삼각함수의 다양한 그래프의 모양을 살펴본다.

③ 단원의 구조



<표 1> 단원의 구조

④ 관련단원과 구성

o. 선수 학습

	관련 단원	주요 개념 및 학습 내용	비 고
중학교 1학년	함수	대응, 함수, 정의역, 공역, 변역, 함수값, 변수, 상수, 순서쌍, 정비례, 비례상수, 반비례	
중학교 2학년	일차함수	일차함수, 일차함수의 그래프, 일차함수의 변환	
중학교 3학년	이차함수	이차함수, 이차함수의 그래프, 이차함수의 변환	

o. 후속 학습

	관련 단원	주요 개념 및 학습 내용	비 고
공통 수학	지수함수와 로그함수, 삼각함수	지수함수, 지수함수의 역함수로서의 로그함수, 삼각함수	
수학 I	행렬, 수열, 미분법, 적분법	행렬, 수열, 다항함수의 미분,적분	수열의 극한
수학 II	일차변환, 미분법, 적분법	초월함수의 미분,적분	수열의 극한

<표2> 관련단원과 구성

3) 단원의 지도 목표

① 단원의 목표

함수의 기본적인 성질을 알고, 이차함수와 그 활용에 대하여 이해한다. 또, 유리함수와 무리함수의 뜻을 이해하고, 그 그래프와 성질을 이해한다.

가) 일반적인 함수의 개념과 정의역, 공역, 치역 등의 뜻을 이해할 수 있게 한다.

나) 일대일 대응의 뜻을 이해하고, 특별한 함수인 항등함수의 정의를 이해할 수 있게 한다.

다) 합성함수의 뜻을 이해하고, 간단한 합성함수를 구할 수 있게 한다.

라) 역함수의 뜻과 그 성질을 이해하고, 역함수를 가지는 간단한 함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

마) 일반적인 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프를 이용하여 이차함수의 최대값, 최소값을 구할 수 있게 한다.

바) 이차함수의 그래프를 활용하여 이차방정식의 근이나 이차 부등식의 해의 의미를 이해할 수 있게 한다.

사) 삼차함수 $y=ax^3$ 에 대한 이해와 그 그래프의 특징을 알 수 있도록 한다.

아) $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 바탕으로 평행이동에 의하여 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

자) $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 바탕으로 평행이동에 의하여
무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

② 지도상의 유의점

가) 합성 함수 $g\circ f$가 정의되는 것은 f의 치역이 g의 정의역의 부분집합일 경우임을 유의하여야 한다.

나) 함수 $f: X\rightarrow Y$가 일대일 대응일 때, 역함수가 존재하며 f의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 로 나타낼 경우 $x\in Y$이고 $y\in X$임에 유의하여야 한다.

다) 유리함수의 정의역에 유의하고, 함수에서 x에 관한 분수식에서 분자의 차수가 분모의 차수보다 높거나 같을 경우에는 분자를 분모로 나누어서 함수의 그래프를 그리게 한다.

라) 무리함수의 정의역에 유의하고, 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 기초로 하여 그릴 수 있게 한다.

마) 유리함수, 무리함수는 일반적인 함수를 모두 취급할 수 없으므로, 간단한 것을 통하여 기초적인 것을 이해할 수 있게 한다.

4) 단원 학습 지도 계획

① 단원 지도 계획

중·소단원		차시	지도 내용	학습 자료	지도상의 유의점	용어 및 기호	비고
준비 학습			진단 평가 및 선수학습 교정	진단 평가지	· 개별학습을 위한 분석 활용		
1. 함수	①함수	84 ~ 85	함수의 뜻 일대일 대응 항등함수 상수함수	멀티미디어	· 선수학습을 통한 점진적인 이해	함수, 정의역, 공역,상, 독립변수, 종속변수,치역, 상등, 일대일 대응, 항등함수 상수함수	
	②합성함수	86	합성함수	Maple 이용	· 합성함수의 뜻	합성함수 $g \circ f$	
	③역함수	87 ~ 89	역함수	"	· 역함수의 뜻 · 효과적인 발문을 통한 발견 학습	역함수 f^{-1}	
	연습문제	90	복습 및 정리		· 개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력		

중 · 소단원		차시	지도 내용	학습 자료	지도의 중점	용어 및 기호	비고
2. 유리함수와 무리함수	1다항함수	91	이차함수의 변화 다항함수의 배경	멀티미디어	· 중학교 과정 보강 · 그래프를 이용하여 이해할 수 있도록 한다.	다항함수, 상수함수,최소값,최대값, 삼차함수	
	2이차함수의 활용	92~93	이차함수의 최대,최소 판별식과 이차함수의 그래프 이차방정식에의 응용 이차부등식에의 응용	Maple 이용	· 효과적인 발문과 그래프를 제시하여 스스로 발견하는 학습	이차 방정식의 근과 그래프, 이차함수의 그래프와 x축과의 관계	
	3유리함수	94	유리함수의 뜻 유리함수의 그래프와 그 성질	"	· 효과적인 발문과 그래프를 제시하여 스스로 발견하는 학습	유리함수, 쌍곡선, 점근선	본시 학습
	4무리함수	95~96	무리함수의 뜻 무리함수의 그래프와 그 성질	"	· 효과적인 발문과 그래프를 제시하여 스스로 발견하는 학습	무리함수	
	연습문제	97	복습 및 정리		· 개념을 정리하고 문제를 파악하는 이해력		
중 · 소단원		차시	지도 내용	학습 자료	지도의 중점	용어 및 기호	비고
기초확인학습		98	기본 사항 확인		단원의 총정리		
종합문제		98	핵심사항 정리		단원의 종합 정리		
심화학습문제		99	심화문제		문제 해결의 종합적 능력을 개발		

<표3> 단원 지도 계획

② 단원 평가 계획

o. 함수의 뜻과 기호에 의한 표현 방법을 알고 있는가?

o. 독립변수와 종속변수 및 함수의 서로 같음 관계를 알고 있는가?

o. 함수의 그래프의 특징을 알고 있는가?

o. 합성함수의 뜻을 알고 있는가?

o. 역함수의 뜻과 역함수를 구할 수 있는가?

o. 이차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

o 이차함수의 최대값, 최소값을 구할 수 있는가?

o. 삼차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

o. 이차방정식과 이차함수의 관계를 알고 있는가?

o. 판별식과 그래프 및 x축과의 관계를 알고 있는가?

o. 이차 부등식의 해와 이차함수의 그래프 사이의 관계를 알고 있는가?

o. 유리함수의 정의구역에 대하여 알고 있는가?

o. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 인 꼴의 유리함수의 변화 상태를 알고 있는가?

o. 유리함수의 그래프의 특징을 알고 있는가?

o. 무리함수의 뜻을 알고 있는가?

o. $y=\sqrt{a(x-p)}+q$인 꼴의 변화 상태를 알고 있는가?

o. 무리함수 그래프의 특징을 알고 있는가?

5) 차시별 학습지도 계획 : 교수-학습 과정안

중 단 원	3.유리함수	본시 제재	§3. 유리함수 3유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프	차시	94/136
학습목표	유리함수의 그래프에 대하여 설명할 수 있다.				

단계	학습내용	교수-학습 활동		시간	비고
		교사	학생		
도입	· 선수 학습 내용 확인 · 학습 목표 제시	· 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프 · 학습 목표 제시	· 전시간 학습내용을 상기한다.	5분	Maple을 이용하여 그래프를 제시
전개	① 유리함수 $y=\frac{1}{x-p}$의 그래프의 성질	$y=\frac{1}{x-p}$에서 p의 값을 변화시키면서 움직이는 그래프를 화면으로 제시	화면을 보이면서 p의 성질을 발견한다.	37분	Maple을 이용하여 그래프를 제시(예제 14)
	② 유리함수 $y=\frac{1}{x}+q$의 그래프의 성질	$y=\frac{1}{x}+q$에서 q의 값을 변화시키면서 움직이는 그래프를 화면으로 제시	화면을 보이면서 q의 성질을 발견한다.		Maple을 이용하여 그래프를 제시(예제 15)

단계	학습 내용	교수-학습 내용		시간	비 고
		교사	학생		
전개	③ 유리 함수 $y=\frac{k}{x-p}+$ 의 그래프	①, ②의 사실로부터 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 성질을 발표시킨다.	· 지명된 사람은 발표한다		①, ②의 내용을 종합하여 말할 수 있도록 한다. Maple을 이용(예제 16)
	④ 유리 함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ 의 그래프의 성질	$y=\frac{cx+d}{ax+b}$의 형태는 의 형태로 변형할 수 있음을 설명한다.	· 설명을 듣고 식을 변형하여 본다.		개개인이 직접 식을 변형시키도록 한다
	⑤종합	①, ②, ③, ④의 내용을 종합하여 유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$의 그래프 그리는 방법을 질문한다.	· 위 내용을 종합하여 답한다.		
정리 및 평가	· 정리 및 형성 평가 · 차시 예고	· 종합 정리 · 형성 평가 문항 제시 · 무리함수	· 평가 문항을 해결 한다.	8분	실물화상기로 제시

<표4> 차시별 학습 지도 계획 : 교수-학습 과정안

2. 함수 단원에서의 Maple의 활용방안

고등학교 공통수학의 함수의 그래프 단원에 나오는 일차함수, 이차함수, 쌍곡선 함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수의 그래프를 Maple을 활용해서 쉽게 그릴 수 있고, 계수를 변화시킬 때 그래프의 개형이 어떻게 변하는 지도 알아볼 수 있다. 여기서는 Plot라는 명령어를 사용하는데 함수를 일일이 열거하는 방법, 그리고 애니메이션 기능을 사용하여 동적 움직임을 살펴보는 방법 등을 생각할 수 있다. 첫 번째 방법은 Maple에 익숙하지 않는 학생들이 쉽게 이해하고 실행할 수 있는 것으로 생각되고, 두 번째 방법은 애니메이션의 움직임을 통해 학생들의 주의 집중과 흥미를 유발시킬 수 있다.

1) 함수의 표현

Maple에서 화살표 기호를 사용하여 필요한 함수를 정의할 수 있다. 기호(:=)는 그 왼쪽에 함수의 이름을 , 오른쪽에는 화살표를 사용하여 함수의 정의를 각각 할당한다.

예를 들어 $f(x)=2x^3-x+1$ 은 $f := x \rightarrow 2x^3-x+1$ 로 나타낼 수 있다. 또 $f(x)=2x^3-x+1$ 에서 $x=a$일 때 $f(a)=2a^3-a+1$ 이 되는 것처럼

$f := x \rightarrow 2x^3-x+1$ 에서 $f := a \rightarrow 2a^3-a+1$ 을 얻는다.

다음은 실행한 결과를 나타낸다.

```
> f := x ->2* x^3 -x +1;
```

$$f := x \rightarrow 2x^3-x+1$$

```
> f(a);
```

$$2a^3-a+1$$

2) 합성함수

두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$가 주어졌을 때, X의 각 원소 x에 대하여 f에 의한 함수값은 Y의 원소 $f(x)$이고 Y의 원소 $f(x)$에 대하여 g에 의한 함수값은 Z의 원소 $g(f(x))$이다.

이 때, X의 각 원소 x에 대하여 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시킴으로써 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있는데 이 함수를 f와 g의 합성함수라 하고, 이것을 기호로 $g\circ f: X \rightarrow Z$와 같이 나타낸다.

Maple를 이용하여 합성함수를 구하는 방법은 연산자 @를 사용할 수도 있고, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ 이므로 $g(f(x))$를 이용하여 구할 수도 있다. 예제를 통하여 이를 알아보자.

<예제1> 두 함수 $f(x)=2x+1$ 과 $g(x)=x^2-2$ 에서 $g\circ f$, $f\circ g$를 구하여라.

다음은 실행한 결과를 보여준다.

```
> f:= x -> 2*x +1;  g:= x -> x^2 -2;
```

f := x -> 2 x + 1

g:= x -> x^2-2

```
> g(f(x)); f(g(x));
```

$(2x+1)^2-2$

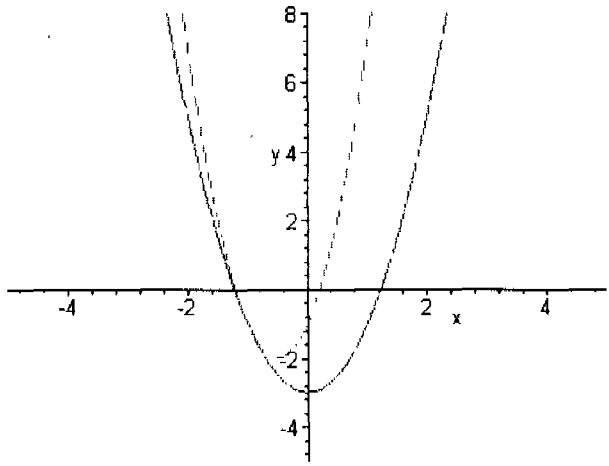
$2x^2-3$

식을 전개하기 전의 형태를 보여줌으로써 $f(g(x))$는 $f(x)$의 x대신에 $g(x)$를 대입한 후에 전개하면 된다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 또, 위에서 $g(f(x))$와 $f(g(x))$의 결과를 비교하여 $g\circ f\neq f\circ g$임을 알 수 있다. 그리고 $g\circ f$ 와 $f\circ g$의 그래프를 그려보면 다음과 같고,

$g\circ f\neq f\circ g$임을 알 수 있다.

```
> plot({g(f(x)), f(g(x))}, x= -5..5,y= -5..8);
```

< $y=(2x+1)^2-2$ 와 $y=2x^2-3$ 의 그래프 >



3) 역함수

함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$가 되는 X의 원소 x가 단 하나 정해진다. 따라서 Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시킴으로써 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있는데 이 함수를 f의 역함수라 하고, 이것을 기호로 $f^{-1}: Y \to X$와 같이 나타낸다.

Maple를 통하여 역함수를 구하는 과정을 알아보면 다음과 같다.

<예제 2> 함수 $f: R \to R$, $y=2x+3$ 의 역함수를 구하여라.

```
> f:=x -> 2*x +3;
                f := x -> 2 x + 3
> solve(2*x+3=y, x);
               -3/2 + 1/2 y
> subs(y=x,%);
               -3/2 + 1/2 x
```

위 실행은 우선 식 $y=2x+3$을 x에 관하여 풀었다. 그래서 $x=\frac{1}{2}(-3+y)$을 얻고, 여기서 x와 y를 바꾸어 역함수 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-3+x)$을 구하였다.

<예제3> $f(x)=x-2$, $g(x)=-2x+1$ 일 때, $g\circ f$의 역함수 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$임을 밝혀라.

우선 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$을 구해 보면 다음과 같다.

```
> f:=x->x-2 ; g:= x-> -2*x +1;
                    f := x -> x - 2
                    g := x -> -2 x + 1
> expand(g(f(x)));
                      -2 x + 5
> solve(-2*x+5=y, x);
                     5/2 - 1/2 y
> subs(y=x,%);
                     5/2 - 1/2 x
```


위 내용에서 $(g\circ f)^{-1}(x)=-\frac{1}{2}(-x+5)$을 얻었다.

또한 다음 내용을 보면, $f^{-1}(x)=2+x$, $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(1-x)$ 임을 알 수 있다.

```
> solve (x-2=y,x);
                       2 + y
> subs(y=x,%);
                       2 + x
> solve(-2*x+1=y,x);
                     1/2 - y/2
> subs(y=x,%);
                     1/2 -  x/2
```

° 마지막으로 아래의 내용을 보면, $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \dfrac{5-x}{2}$ 이다.

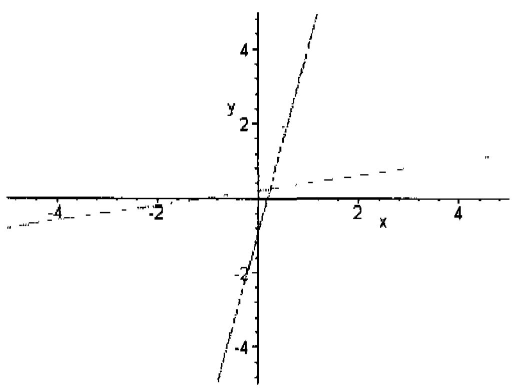
```
> p:= x->2+x; q := x->(1-x)/2;
> p(q(x));
                    5/2 - x/2
```

따라서, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$임을 알 수 있다.

<예제 4> 함수 $f(x) = 5x-1$ 에서 $f(x)$의 역함수를 구하고, $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 그래프를 그려서 비교하여라.

```
> f:=x->5*x-1: solve(5*x-1 = y,x);
                    1/5 + 1/5 y
> subs(y=x,%);
                    1/5 + 1/5 x
> plot({f(x), 1/5 + x/5},x=-5..5, y=-5..5);
```


< $f(x) = 5x-1$ 과 $f^{-1}(x)$ 의 그래프>



위의 그래프를 비교해 보면 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수가 있다. 즉, 본래의 함수와 그 역함수는 $y=x$에 대하여 대칭임을 이렇게 그래프를 그려서 비교하여 알 수가 있다.

4) 다항함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 관한 다항식일 때 $y=f(x)$를 다항함수라고 한다. 본 논문에서는 Maple에서 animation기능을 이용하여 일·이차함수의 그래프를 제시함으로써 학습자가 일·이차함수의 개념을 이해하고 그래프의 성질을 파악하는데 도움이 되도록 하겠다.

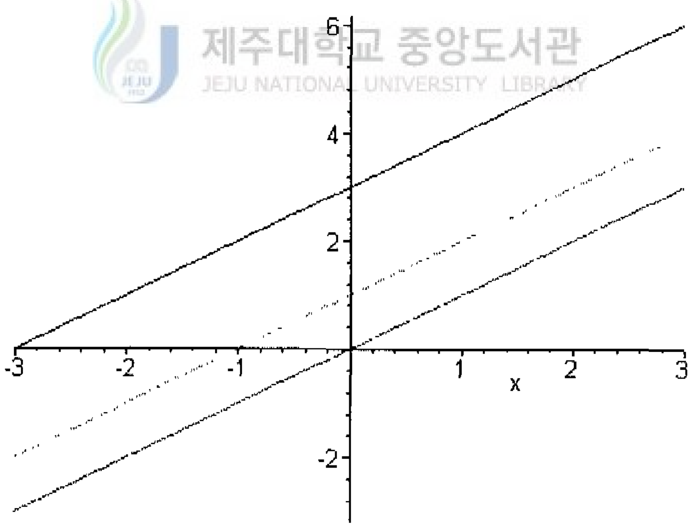
① 일차함수

o. $y=ax+b$ 의 그래프

<예제5> $y=x$, $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$ 의 그래프를 그려보자.

```
>plot({x,x+1,x+2,x+3},x=-3..3);
```

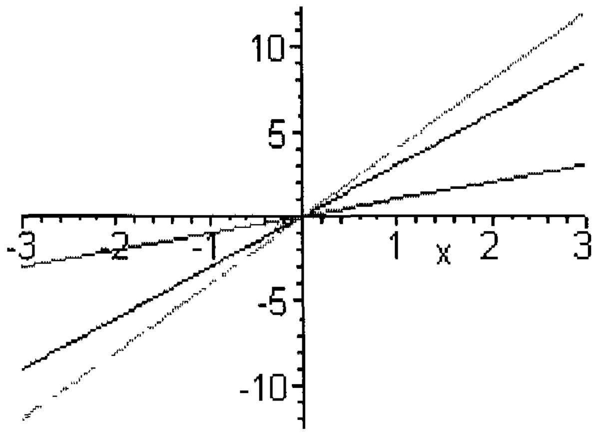
< $y=x$, $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$의 그래프 >



<예제6> $y=x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=4x$ 의 그래프를 그려보자

```
> plot({x,2*x,3*x,4*x},x=-3..3);
```

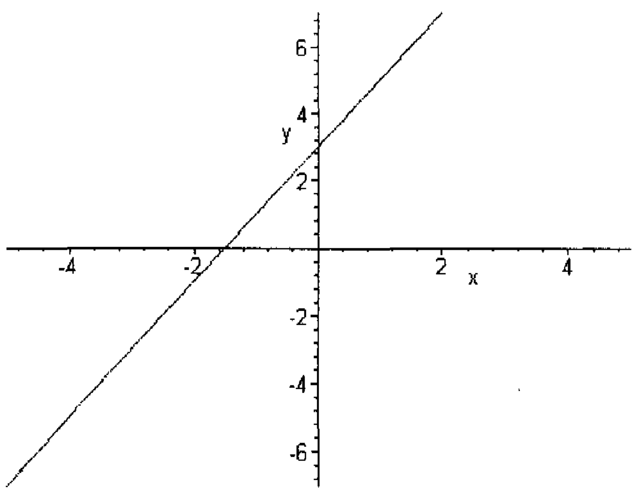
< $y=x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=4x$ 의 그래프 >



<예제7> $y=2x+3$ 의 그래프를 그려보자

```
> with(plots):
> a:=implicitplot(2*x-y+3=0,x=-5..5,y=-7..7,color=blue):
> b:=plot(2*x+3,x=-5..5,y=-7..7,color=red):
> display([a,b]);
```


< $y=2x+3$ 의 그래프>



② 이차함수

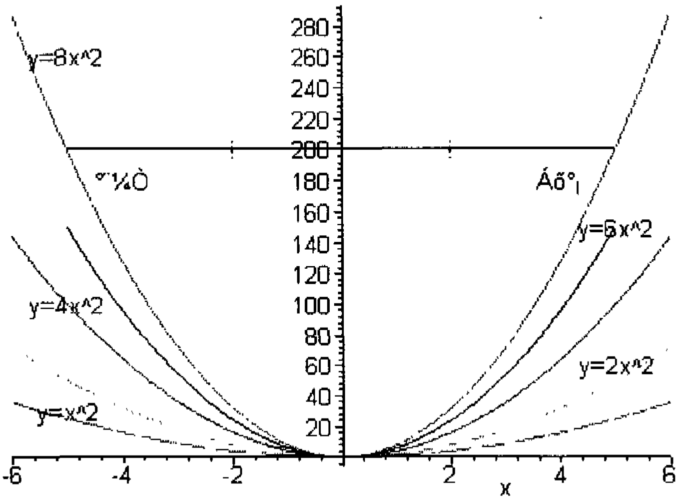
모든 이차함수는 $y=a(x-p)^2+q$ 의 형태로 표현되는데, 이 그래프의 성질을 알기 위해서는 우선 $y=ax^2$의 그래프에 대해서 알아본 후 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프를 알아본다.

0. $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질

이차함수 $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=4x^2$, $y=6x^2$, $y=8x^2$ 의 그래프를 그려서 그 성질을 알아보자.

```
> with(plots):
> a:= plot(x^2,x=-6..6,color=red):
> b:=textplot([-5,30,"y=x^2"]):
> c:= plot(2*x^2,x=-6..6,color=green):
> d:=textplot([5,60,"y=2x^2"]):
> e:= plot(4*x^2,x=-6..6,color=blue):
> f:=textplot([-5,100,"y=4x^2"]):
> g:= plot(6*x^2,x=-5..5,color=black):
> h:=textplot([5,150,"y=6x^2"]):
> i:= plot(8*x^2,x=-6..6,color=red,labels=['x','y']):
> j:=textplot([-5,260,"y=8x^2"]):
> k:=implicitplot(x=-2,x=-5..5,y=195..205,color=black):
> l:=implicitplot(x=2,x=-5..5,y=195..205,color=black):
> m:=textplot([-4,180,"감소"],color=black):
> n:=textplot([4,180,"증가"],color=black):
> o:=implicitplot(y=200,x=-5..5,y=0..200,color=blue):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o]);
```

< $y=ax^2(a>0)$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

(가) x가 증가할 때, $x<0$ 의 범위에서 y는 감소하고, $x>0$의 범위에서 y는 증가한다.

(나) y축에 대하여 대칭이다.

(다) $a>0$일 때는 아래로 볼록하다.

(라) 원점 (0,0)을 꼭지점, y축 ($x=0$)을 축으로 하는 포물선이다.

(마) a의 절대값이 크면 클수록 y축에 가까워지고, 작으면 작을수록 x축에 가까워진다.

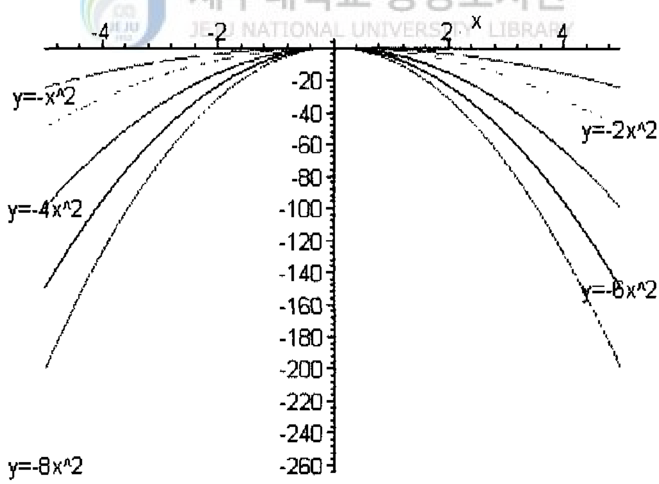
0. $a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질

이차함수 $y=-x^2$, $y=-2x^2$, $y=-4x^2$, $y=-6x^2$, $y=-8x^2$의 그래프를 그려서 그 성질을 알아보자.

```
> with(plots):
> a:=plot(-x^2,x=-5..5,color=red):
> b:=textplot([-5,-30,"y=-x^2"]):
> c:=plot(-2*x^2,x=-5..5,color=green):
> d:=textplot([5,-50,"y=-2x^2"]):
```

```
> e:=plot(-4*x^2,x=-5..5,color=blue):
> f:=textplot([-5,-100,"y=-4x^2"]):
> g:=plot(-6*x^2,x=-5..5,color=black):
> h:=textplot([5,-150,"y=-6x^2"]):
> i:=plot(-8*x^2,x=-5..5,color=red,labels=['x','y']):
> j:=textplot([-5,-260,"y=-8x^2"]):
> k:=implicitplot(x=-2,x=-5..5,y=-205..-195,color=black):
> l:=implicitplot(x=2,x=-5..5,y=-205..-195,color=black):
> m:=textplot([4,-180,"감소"],color=black):
> n:=textplot([4,-180,"증가"],color=black):
> o:=implicitplot(y=-200,x=-5..5,y=-250..0,color=blue):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j]);
```

< $y = ax^2(a<0)$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

(가) x가 증가할 때, $x<0$ 의 범위에서 y는 증가하고, $x>0$ 의 범위에서 y는 감소한다.

(나) y축에 대하여 대칭이다.

(다) $a<0$일 때는 위로 볼록하다.

(라) 원점 (0,0)을 꼭지점, y축 ($x=0$)을 축으로 하는 포물선이다.

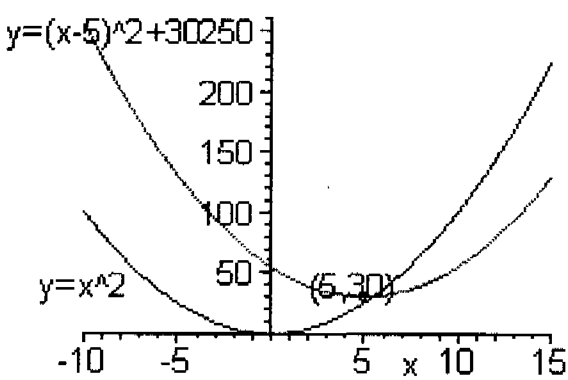
(마) a의 절대값이 크면 클수록 y축에 가까워지고, 작으면 작을수록 x축에 가까워진다.

0. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질

이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-5)^2+30$의 그래프를 그려서 그 성질을 알아본다.

```
> with(plots):
> a:=plot(x^2,x=-10..10):
> b:=plot((x-5)^2+30,x=-10..15,color=red):
> c:=textplot([-10,40,"y=x^2"]):
> d:=textplot([-9,250,"y=(x-5)^2+30"]):
> e:=animate((x-3/2*t)^2+t*x,x=-10..15,t=0..5,color=blue):
> f:=pointplot([5,30],color=black):
> g:=textplot([9/2,40,"(5,30)"]):
> display([a,b,c,d,e,f,g]);
```


< $y=x^2$과 $y=(x-5)^2+30$의 그래프 >



위 그래프로부터 이차함수 $y=(x-5)^2+30$ 의 그래프는 직선 $x=5$ 를 축으로 하고, 점 (5,30)을 꼭지점으로 하는 포물선이다.

0. 이차함수의 최대값과 최소값

<예제8> 이차함수 $y=x^2-4x+1$ 의 최대값과 최소값을 구하여 보자.

```
> y:=x->x^2-4*x+1;
```

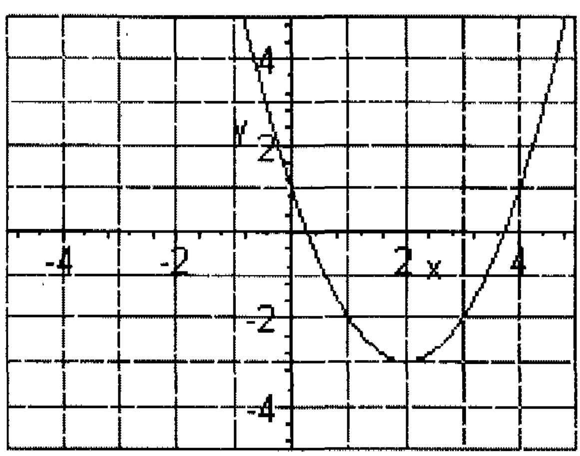
$$y:=x \rightarrow -x^2+4x+1$$

```
> y:=x->(x-2)^2-3;
```

$$y:=x \rightarrow -(x-2)^2+3$$

```
> with(plots):
>a:=implicitplot({x=-6,x=-5,x=-4,x=-3,x=-2,x=-1,x=0,x=1,x=2,x=3,x=4,x=5,x=6,y
  =-6,y=-5,y=-4,y=-3,y=-2,y=-1,y=0,y=1,y=2,y=3,y=4,y=5,y=6},x=-6..6,y=-6..6):
> b:=plot((x-2)^2-3,x=-5..5,y=-5..5,color=blue):
> display([a,b]);
```


< $y=(x-2)^2-3$ 의 그래프 >



③ 삼차함수

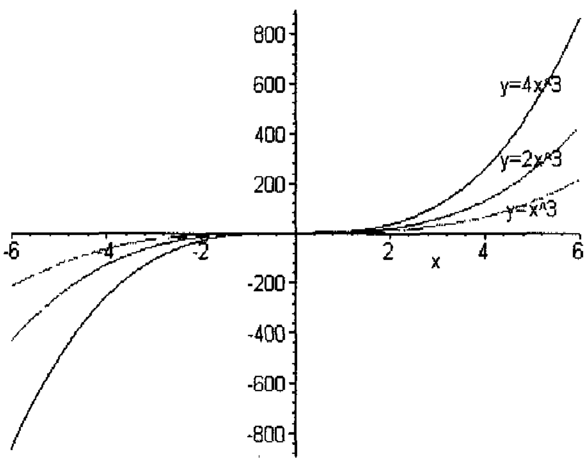
삼차함수 $y=ax^3$의 그래프에 대해서 알아본다.

ο. $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^3$의 그래프의 성질

삼차함수 $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=4x^3$의 그래프를 그려서 그 성질을 알아보자.

```
>with(plots):
> a:= plot(x^3,x=-6..6,color=red):
> b:=textplot([5,100,"y=x^3"]):
> c:= plot(2*x^3,x=-6..6,color=blue):
> d:=textplot([5,300,"y=2x^3"]):
> e:= plot(4*x^3,x=-6..6,color=black):
> f:=textplot([5,600,"y=4x^3"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```


< $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=3x^3$, $y=4x^3$의 그래프 >



위 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

(가) x의 값이 증가함에 따라 y의 값도 증가한다.

(나) 원점을 경계로 볼록한 방향이 바뀐다.

(다) 원점에 대하여 대칭이다.

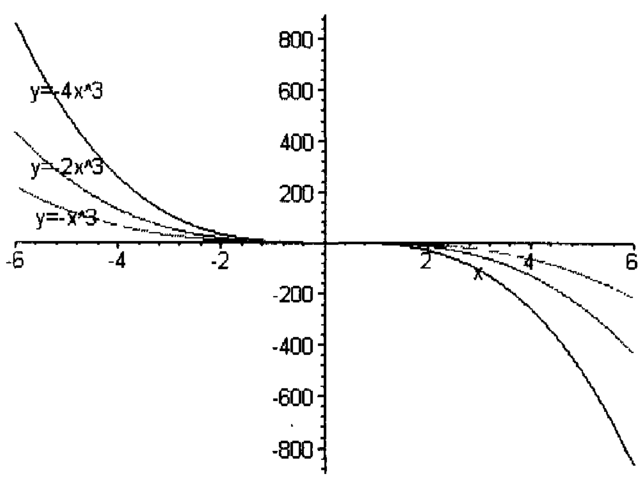
(라) a의 값이 크면 클수록 y축에 가까워지고, 작으면 작을수록 x축에 가까워진다.

o. $a<0$ 일 때, 삼차함수 $y=ax^3$의 그래프의 성질

삼차함수 $y=-x^3$, $y=-2x^3$, $y=-4x^3$의 그래프를 그려서 그 성질을 알아보자.

```
> with(plots):
> a:= plot(-x^3,x=-6..6,color=red):
> b:=textplot([-5,100,"y=-x^3"]):
> c:= plot(-2*x^3,x=-6..6,color=blue):
> d:=textplot([-5,300,"y=-2x^3"]):
> e:= plot(-4*x^3,x=-6..6,color=black):
> f:=textplot([-5,600,"y=-4x^3"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```


< $y=-x^3$, $y=-2x^3$, $y=-4x^3$의 그래프 >



위 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

(가) x의 값이 증가함에 따라 y의 값은 감소한다.

(나) 원점에 대하여 대칭이다.

(다) 원점을 경계로 볼록한 방향이 바뀐다.

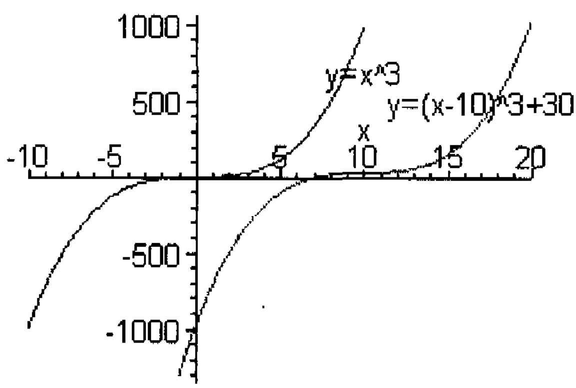
(라) a의 절대값이 크면 클수록 y축에 가까워지고, 작으면 작을수록 x축에 가까워진다.

ㅇ. 삼차함수 $y=a(x-p)^3+q$의 그래프의 성질

삼차함수 $y=x^3$ 과 $y=(x-5)^3+30$ 의 그래프를 그려서 그 성질을 알아본다.

```
> with(plots):
> a:=plot(x^3,x=-6..6,color=blue):
> b:=plot((x-10)^3+30,x=-1..20,color=red):
> c:=textplot([10,700,"y=x^3"]):
> d:=textplot([17,500,"y=(x-10)^3+30"]):
> display([a,b,c,d]);
```


< $y=x^3$과 $y=(x-5)^3+30$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 이차함수 $y=a(x-p)^3+q$의 그래프는 $y=ax^3$의 그래프를 x축의 양의방향으로 p만큼, y축의 양의 방향으로 q 만큼 평행 이동한 것이다.

5) 이차함수의 활용

① 이차함수와 이차방정식의 관계

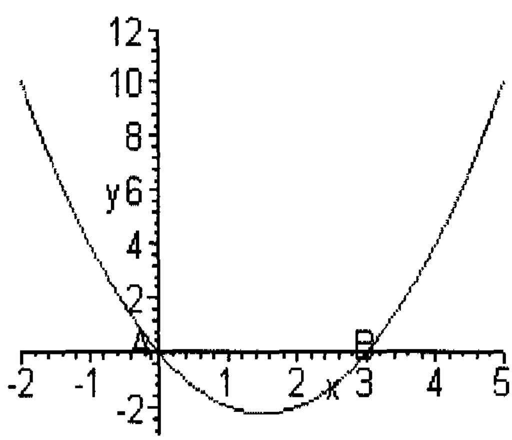
실수 a, b, c에 대하여, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프와 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근 사이의 관계를 알아보자

0. 두 근을 갖는 경우

<예제9> 이차함수 $y=x^2-3x$ 의 그래프를 그려보자

```
> with(plots):
> a:=textplot([-1/4,1/3,'A']):
> b:=textplot([3, 1/3,'B']):
> c:=plot(x^2-3*x,x=-2..5,y=-3..12):
> display([a,b,c]);
```


< $y=x^2-3$ 의 그래프 >



이차함수 $y=x^2-3x$ 을 살펴보면 $x=\frac{3}{2}$ 일 때, 최소값은 음수를 갖는다. 따라서 이차함수 $y=x^2-3x$ 의 그래프가 x축과 두 점에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 의 y좌표는 0이므로, x좌표는 $x^2-3x=0$ 의 두 근은 0, 3이다. 두 근을 구하여보자

```
>solve({x^2-3*x=0},{x});
                    {x = 0}, {x = 3}
```

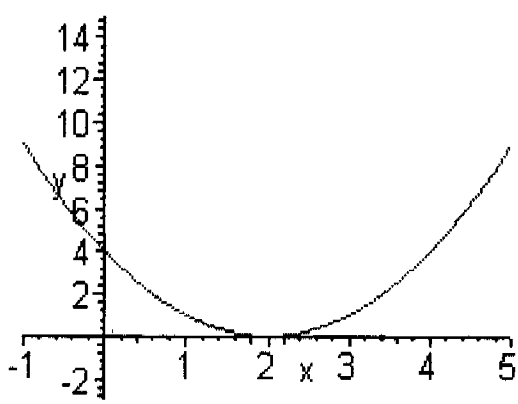
이상에서 이차함수 $y=x^2-3x$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $x^2-3x=0$ 의 두 근임을 알 수 있다.

0. 중근을 갖는 경우

<예제10>이차함수 $y=x^2-4x+4$ 의 그래프를 그려보자

```
> plot(x^2-4*x+4,x=-1..5,y=-3..15);
```


< $y=x^2-4x+4$ 의 그래프 >



이차함수 $y=x^2-4x+4$ 의 그래프를 살펴보면 $x=2$ 에서 최소값 0을 갖는다.

따라서, 이차함수 $y=x^2-4x+4$ 의 그래프가 x축과 한 점 A에서 만난다. 이 때, 한 점 A의 y좌표는 0이므로, x의 좌표는 $x^2-4x+4=0$ 의 근 즉, $(x-2)^2=0$ 의

중근이다. 이 근을 구하여 보자.

```
> solve({x^2 -4*x+4=0},{x});
```

$$\{x = 2\}, \{x = 2\}$$

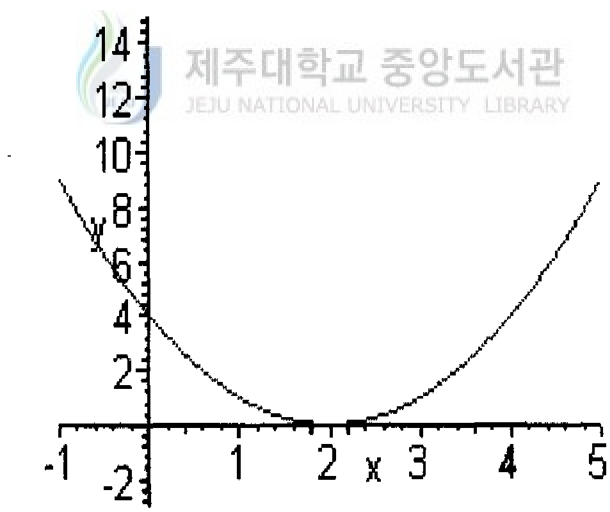
이상에서 이차함수 $y=x^2-4x+4$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $x^2-4x+4=0$ 의 근임을 알 수 있다.

0. 허근을 갖는 경우

<예제11> 이차함수 $y=x^2+4x+5$ 의 그래프를 그려보자

```
> plot(x^2+4*x+5,x=-6..4,y=-3..15);
```

< $y=x^2+4x+5$ 의 그래프 >



0. 함수의 그래프를 이용한 연립방정식의 해

여러 개의 함수의 그래프를 한꺼번에 그릴 수 있다는 것을 이용하여 연립방정식의 이해에 도움을 줄 수 있다.

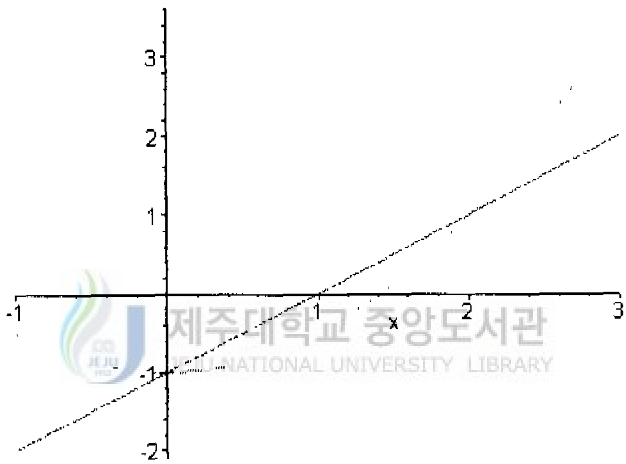
<예제12> 연립방정식 $x^2-2y=2$, $x-y=1$을 그래프를 이용하여 풀어 보면 그 해는 각각 그래프의 교점이다.

```
> solve( {x^2-2*y=2, x-y=1}, {x, y} );
```

$$\{x=2,\ y=1\},\ \{y=-1,\ x=0\}$$

```
> plot( {x^2/2 -1, x-1}, x=-1..3 );
```

< $y=x^2+4x+5$ 의 그래프 >



solve 명령어와 함께 부등식을 지정함으로써 해를 제한할 수 있다.

```
> solve( {x^2=y^2}, {x, y} );
```

$$\{y=y,\ x=y\},\ \{x=-y, y=y\}$$

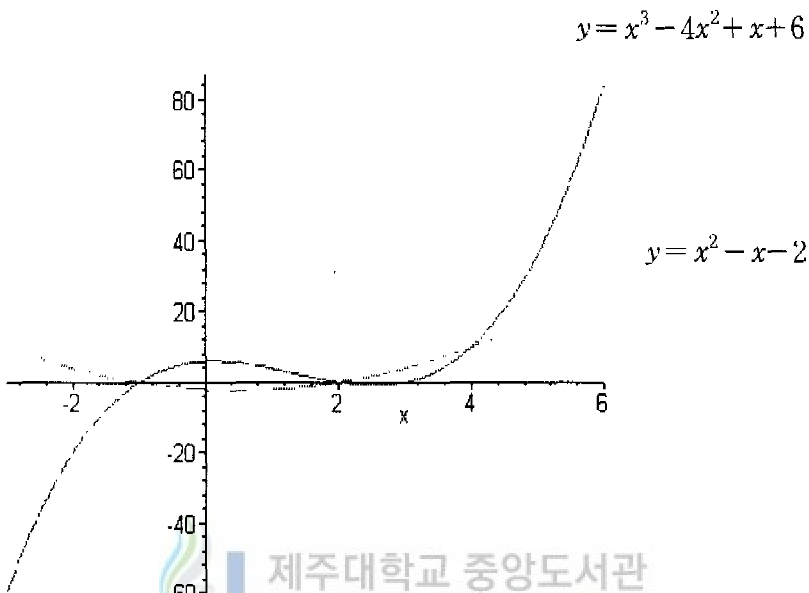
```
> solve(x^2=y^2,~x< >y}, {x, y} );
```

$$\{x=-y,\ y=y\}$$

여기서 x< >y 는 $x \neq y$의 Maple표현이다.

<예제13> $y=x^3-4x^2+x+6$, $y=x^2-x-2$ 을 풀어라.

```
> plot({x^3-4*x^2+x+6,x^2-x-2},x=-3..6);
```




```
>solve({y=x^3-4*x^2+x+6,y=x^2-x-2},{x,y});
```

$$\{y = 0,\ x = 2\},\ \{y = 10,\ x = 4\},\ \{y = 0,\ x = -1\}$$

두 번째 결과와 위의 그래프를 비교하여 보면, 두 그래프의 교점이 두 연립방정식의 해가 됨을 알수 있다.

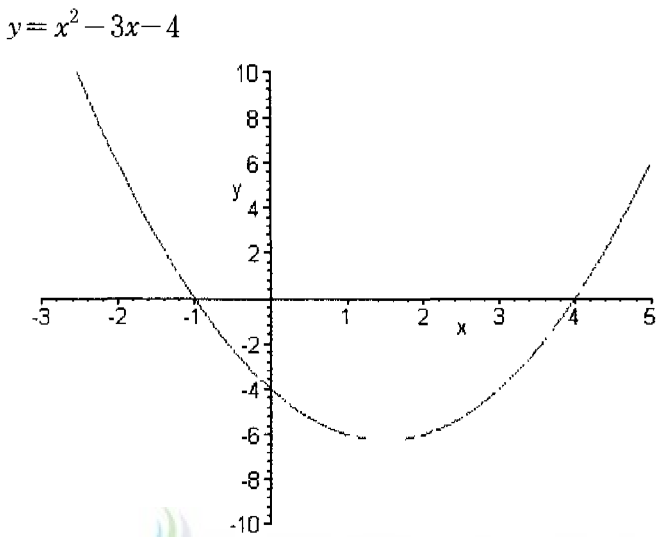
6) 이차함수의 그래프와 이차부등식

이차함수의 그래프를 이용하면 이차부등식의 해를 쉽게 구할 수 있다.

다음의 예제를 Maple을 이용하여 해를 구할 수 있다.

<예제14> $x^2-3x-4 < 0$

```
> plot(x^2 - 3*x -4, x=-3..5, y=-10..10);
```



위 화면은 $f(x)=x^2-3x-4$ 의 그래프를 그린 것이다. 그래프에서 해는 음수 부분이므로 x축 아래로 내려와 있는 부분이다. 즉, 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이가 해이다.

x축과의 교점의 좌표를 구하면 다음과 같다.

```
> solve(x^2 -3*x -4 =0, x);
                -1, 4
```

x축과 만나는 점이 -1과 4이므로 구하고자 하는 이차부등식의 해는 $-1 < x < 4$이다.

7) 유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 분수식일 때, 이 함수를 분수함수라 하고 또

$f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라고 한다. 유리함수에는 다항함수와 분수함수가 있다.

여기에서는 분수함수에 대하여 알아보자. 분수함수에서 정의역이 특별히 주어지지 않는 경우에는 분모를 0으로 하지 않는 x의 값 전체의 집합을 생각한다.

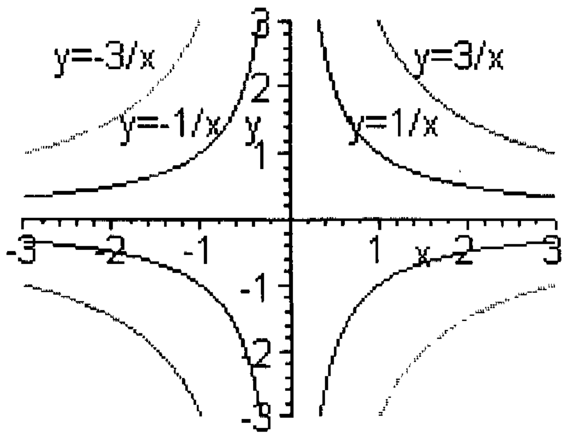
분수함수는 일반적으로 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 형태로 표현되는데 이 식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 의 형태로 바꿀 수가 있다. 우선, 기본이 되는 $y=\dfrac{k}{x}$ 에 대하여 살펴보고, 그 다음 $k=1$로 고정시킨 $y=\dfrac{1}{x-p}$, $y=\dfrac{1}{x}+q$, $y=\dfrac{1}{x-p}+q$의 순서로 살펴보겠다.

(1) $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$의 그래프의성질

수 전체의 집합에서 $y=-\dfrac{3}{x}$, $y=-\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.


```
> with(plots):a := plot(1/x, x=0..3, y=0..3, color=black):
> b := plot(1/x, x=-3..0, y=-3..0, color=black):
> c:=textplot([5/4 , 3/2 , "y=1/x "]):
> d := plot(-1/x, x=0..3, y=0..3, color=blue):
> e := plot(-1/x, x=-3..0, y=-3..0, color=blue):
> f:=textplot([-5/4 , 3/2 , "y=-1/x "]):
> g := plot(3/x, x=0..3, y=0..3, color=red):
> h:= plot(3/x, x=-3..0, y=-3..0, color=red):
> i:=textplot([2,5/2 , "y=3/x "]):
> j := plot(-3/x, x=0..3, y=0..3, color=green):
> k := plot(-3/x, x=-3..0, y=-3..0, color=green):
> l:=textplot([-2 , 5/2 , "y=-3/x "]):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l]);
```

< $y=-\frac{3}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

① $y=\frac{a}{x}(a\neq 0)$의 그래프는 쌍곡선이다.

② $a>0$ 일 때, 그래프는 제 1 , 제 3 사분면에 있고, x의 값이 증가함에 따라 y의 값은 감소한다.

③ $a<0$ 일 때, 그래프는 제 2, 제 4사분면에 있고, x의 값이 증가함에 따라 y의 값은 증가한다.

④ a의 절대값이 크면 클수록 원점에서 멀리 떨어진다.

⑤ $x=0$일 때는 정의되지 않는다.

(2) $y=\frac{k}{x-p}+q(x\neq p)$의 그래프의 성질

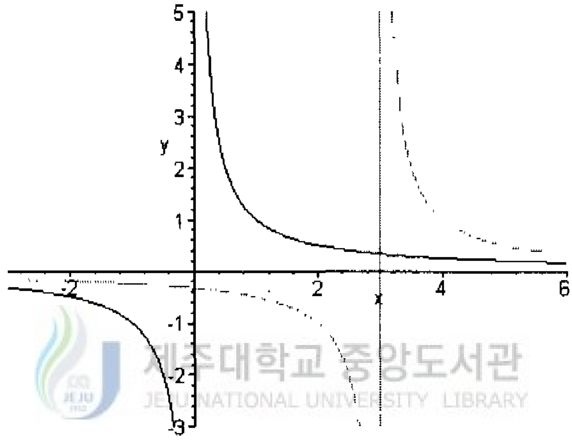
0. $y=\frac{1}{x-p}$ 의 그래프

<예제15> $y=\frac{1}{x-3}$ 의 그래프를 그려보자

with(plots):a:=plot(1/x,x=0..6, y=0..5, color=black):

```
> b:=plot(1/x,x=-3..0, y=-3..0, color=black):
> c:=plot(1/(x-3),x=0..6,y=0..5,color=green):
> d:=plot(1/(x-3),x=-3..0,y=-3..0,color=green):
> display([a,b,c,d]);
```

< $y=\dfrac{1}{x-3}$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 $y=\dfrac{1}{x-p}$ 의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축으로 p만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다.

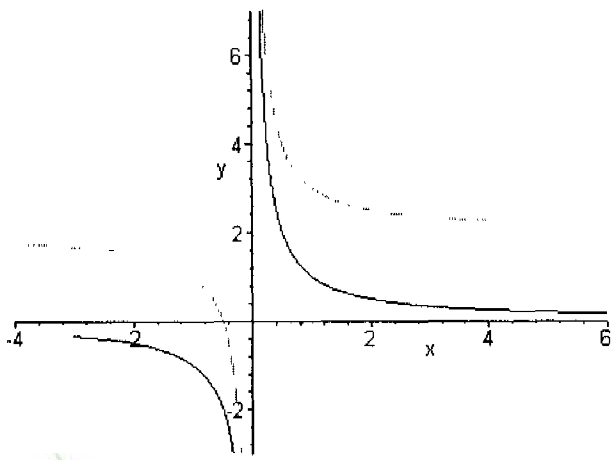
0. $y=\dfrac{1}{x}+q$ 의 그래프

<예제16> $y=\dfrac{1}{x}+2$ 의 그래프를 그려보자

```
> with(plots):
> a:=plot(1/x,x=0..4, y=2..6, color=black):
> b:=plot(1/x,x=-4..0, y=-3..5, color=black):
> c:=plot(1/(x)+2,x=0..4,y=2..6,color=green):
> d:=plot(1/(x)+2,x=-4..0,y=-3..5,color=green):
```

```
> display([a,b,c,d]);
```

< $y=\dfrac{1}{x}+2$ 의 그래프 >



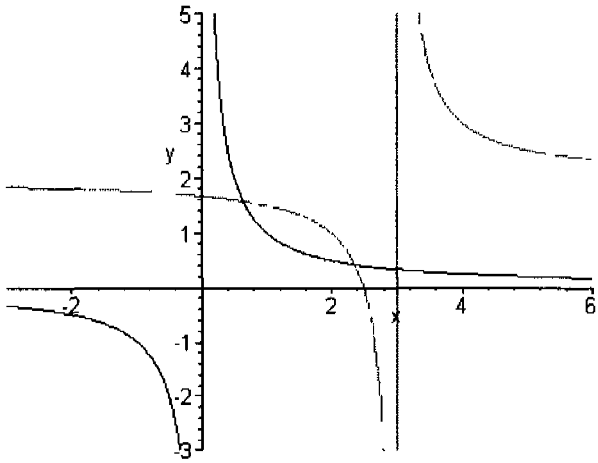
위 그래프로부터 $y=\dfrac{1}{x}+q$ 의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 y축으로 q만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다.

0. $y=\dfrac{1}{x-p}+q$ 의 그래프

<예제16> $y=\dfrac{1}{x-3}+2$ 의 그래프를 그려보자

```
> with(plots):
> a:=plot(1/x,x=0..6,y =0..5,color=black):
> b:=plot(1/x,x=-3..0,y =-3..0,color=black):
> c:=plot(1/(x-3)+2,x=0..6,y =0..5,color=red):
> d:=plot(1/(x-3)+2,x=-3..0,y =-3..0,color=red):
> display([a,b,c,d]);
```

< $y=\dfrac{1}{x-3}+2$ 의 그래프 >



위 그래프로부터 $y=\dfrac{1}{x-p}+q$ 의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축으로 p만큼, y축으로 q만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다.

8) 무리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다. 무리함수에서 정의역이 특별히 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안이 0이상이 되는 범위를 정의역으로 한다.

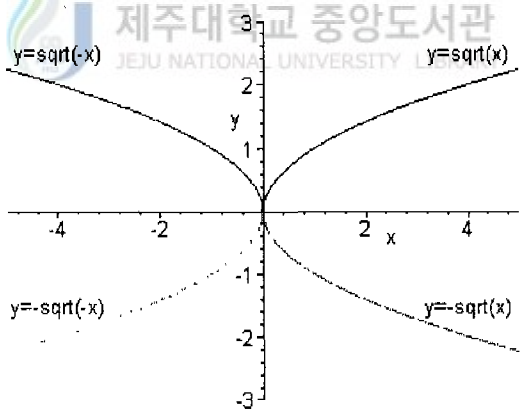
무리함수는 일반적으로 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a\neq0)$의 형태를 갖는데 이는 모두 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 형태로 바꾸어 나타낼 수 있다. 따라서, $y=\sqrt{ax}$부터 알아보고, 다음에 $y=\sqrt{a(x-p)}$, $y=\sqrt{ax}+q$의 순서로 알아보겠다.

① $y=\sqrt{ax}$

우선 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프의 형태를 알아본다.

```
> with(plots):
> a:=plot(sqrt(x),x=0..5,y=-3..3,color=black):
> b:=textplot([4,5/2,"y=sqrt(x)"]):
> c:=plot(-sqrt(x),x=0..5,y=-3..3,color=red):
> d:=textplot([4,-3/2,"y=-sqrt(x)"]):
> e:=plot(sqrt(-x),x=-5..0,y=-3..3,color=blue):
> f:=textplot([-4,5/2,"y=sqrt(-x)"]):
> g:=plot(-sqrt(-x),x=-5..0,y=-3..3,color=green):
> h:=textplot([-4,-3/2,"y=-sqrt(-x)"]):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h]);
> display([a,b,c,d]);
```

< $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프 >

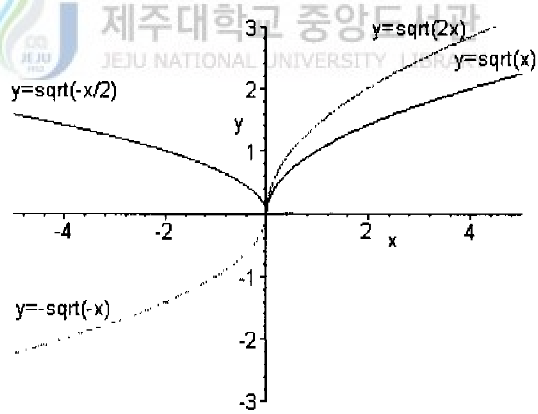


부호에 따라서 그래프가 몇 사분면에 그려지고 그 형태가 어떻게 되는지를 위 화면을 보면서 파악할 수 있다.

다음의 그래프에서 $y=\sqrt{ax}$ 에서 a의 값을 변화시키면서 그 변화를 알아보자.

```
> with(plots):
> a:=plot(sqrt(x),x=0..5,y=-3..3,color=black):
> b:=textplot([9/2,5/2,"y=sqrt(x)"]):
> c:=plot(sqrt(2*x),x=0..5,y=-3..3,color=red):
> d:=textplot([3,3,"y=sqrt(2x)"]):
> e:=plot(sqrt(-1/2 *x),x=-5..0,y=-3..3,color=blue):
> f:=textplot([-4,2,"y=sqrt(-x/2)"]):
> g:=plot(-sqrt(-x),x=-5..0,y=-3..3,color=green):
> h:=textplot([-4,-3/2,"y=-sqrt(-x)"]):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h]);
```

< $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프 >



위 그래프를 보면 a의 절대값이 커지면서 x축과 멀어짐을 알 수 있다.

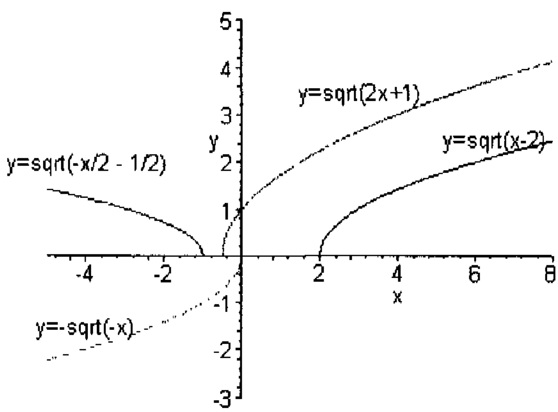
위의 사실을 종합하면 $y=\sqrt{ax}$는 부호에 따라서 그래프가 1사분면, 2사분면, 3사분면, 4사분면에 그려지고, a의 절대값이 커지면서 x축과의 거리가 멀어지는 그래프가 됨을 알 수 있다.

② $y=\sqrt{x-p}$

p의 값을 변화시키면서 그래프의 형태가 어떻게 변화하는지를 살펴보자.

```
> with(plots):
> a:=plot(sqrt(x-2),x=2..8,y=-3..3,color=black):
> b:=textplot([13/2,5/2,"y=sqrt(x-2)"]):
> c:=plot(sqrt(2*x+1),x=-1/2..8,y=-3..5,color=red):
> d:=textplot([3,7/2,"y=sqrt(2x+1)"]):
> e:=plot(sqrt(-1/2 *x -1/2),x=-5..-1,y=-3..3,color=blue):
> f:=textplot([-4,2,"y=sqrt(-x/2 - 1/2)"]):
> g:=plot(-sqrt(-x),x=-5..0,y=-3..3,color=green):
> h:=textplot([-4,-3/2,"y=-sqrt(-x)"]):
> display([a,b,c,d,e,f,g,h]);
> display([a,b,c,d]);
```


< $y=\sqrt{2x+1}$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프 >



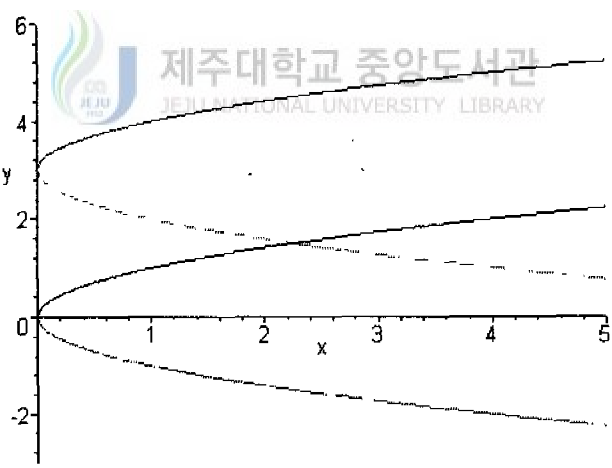
위 그래프를 보면 $y=\sqrt{x-p}$는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축을 따라서 p만큼 평행 이

동한 것임을 알 수 있다.

③ $y=\sqrt{x}+q$

```
> with(plots):
> a := plot(sqrt(x), x=0..5, y=-3..6, color=black):
> b := plot(-sqrt(x), x=0..5, y=-3..6, color=red):
> c := plot(sqrt(x)+3, x=0..5, y=-3..6, color=blue):
> d := plot(-sqrt(x)+3, x=0..5, y=-3..6, color=green):
> display([a,b,c,d]);
```

< $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+3$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+3$의 그래프 >



위 그래프를 보면 $y=\sqrt{x}+q$는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축을 따라서 q만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다.

9) 삼각함수

삼각함수 단원은 후속 학습으로 초월함수에서 다루어지지만 여기서 Maple을 이용하여 다양한 삼각함수의 그래프의 변화하는 모습을 살펴보겠다.

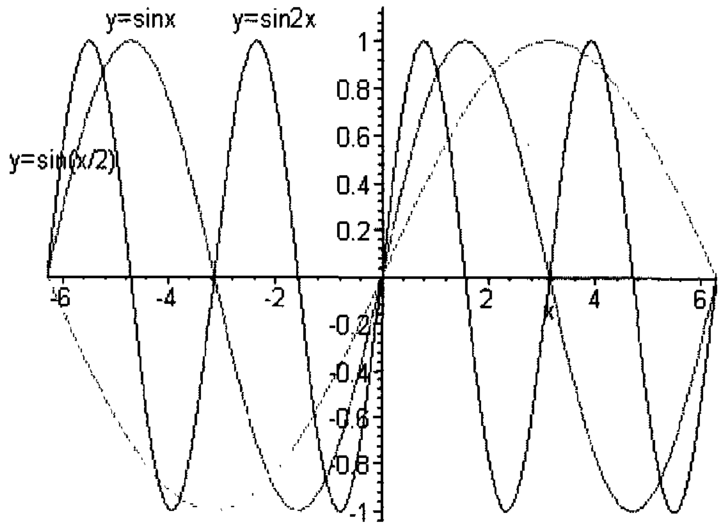
Maple은 삼각함수의 그래프를 탐구하는데 특별히 유용하다. 수업 현장에서 삼각함수의 그래프를 지도할 때, 몇 개의 그래프만을 그려서 설명하곤 한다. 이를 Maple을 이용하면 화면 위에 다양한 그래프를 그릴 수 있어 삼각함수의 관계와 그 그래프 모양과의 관계를 설명하기가 용이해지고, 학생들의 이해도를 높일 수 있다.

예를 들어 사인함수($y=\sin x$)의 그래프를 소개할 때, 종전에는 x값의 변화에 따른 y값을 표로 만들어서 직교 좌표에 이를 점으로 일일이 나타내고 그 점들을 연결시킴으로써 그래프의 개형을 그려보곤 했다. 그 방법과는 달리 Maple을 이용할 경우에는 일단 $y=\sin x$ 그래프의 정확한 개형을 plot라는 명령어를 사용해서 그려보고, 또 다른 형태로 변환한 그래프의 개형들을 그려, $y=\sin x$와 서로 비교함으로써 수학적 개념과 성질을 확인하게 된다. 다시 말하면, $y=\sin x$를 변환한 여러 형태의 그래프 $y=\sin ax$, $y=a\sin x$, $y=\sin(x+a)$, $y=\sin x+a$ 에서 a값이 그래프의 개형에 어떤 영향을 미치는 지 원래 그래프 y= sin x와 비교하면서 알아볼 수 있다.

① $y=\sin ax$

먼저, $y=\sin ax$형태의 그래프가 a값이 변화에 따라 어떻게 변화되는 지를 알아보기 위해서 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=\sin x/2$의 그래프를 화면상에 나타내어 비교해 보면 된다. 아래의 그림을 보면 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=\sin x/2$그래프의 주기가 모두 다름을 볼 수 있다. a의 값이 1, 2, 1/2일 때 각각의 주기는 2π, π, 4π이고, 원점에 대하여 대칭이다. 또 최대값과 최소값은 각각 1과 -1로써 변함이 없다. 즉, 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$임을 알 수 있다.

< $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin \frac{x}{2}$ 의 그래프>



Maple프로그램의 입력은 다음과 같다.

```
> with(plots):
> a:=plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi):
> b:=plot(sin(2*x),x=-2*Pi..2*Pi,color=blue):
> c:=plot(sin(x/2),x=-2*Pi..2*Pi,color=green):
> d:=textplot([-4.5,1.1,"y=sinx"]):
> e:=textplot([-2,1.1,"y=sin2x"]):
> f:=textplot([-6,0.5,"y=sin(x/2)"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```

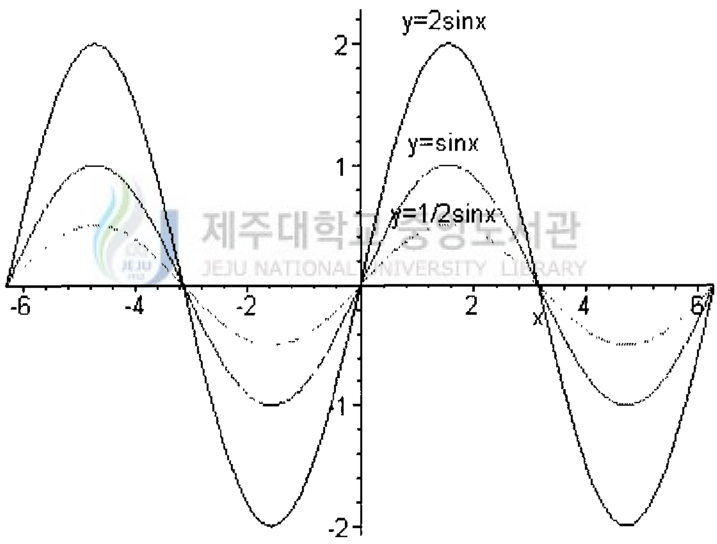
② $y = a\sin x$

$y = a\sin x$형태의 그래프가 a값이 변함에 따라 어떻게 변화되는 지를 알아보기 위해서 $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = 1/2\sin x$의 그래프를 화면상에 나타내어 비교 해보자.

아래 그림에서 $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=1/2\sin x$ 각각의 그래프를 살펴보자. 이 그래프들은 모두 주기가 2π로써 같음을 볼 수 있다. a의 값이 1, 2, 1/2로 변할 때 최대값과 최소값은 달라진다. 즉, a=1일 때 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다. 그러나 a를 2나 1/2로 변환했을 때 치역은 각각 $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$과 $\{y \mid -1/2 \le y \le 1/2\}$으로 변하게 된다.

그리고 $y=a\sin x$ 형태의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다.

< $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프 >



Maple프로그램의 입력은 다음과 같다.

```
> with(plots):
> plot({sin(x),sin(2*x),sin(x/2)},x=-2*Pi..2*Pi):
> plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi):
> a:=plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi):
> b:=plot(2*sin(x),x=-2*Pi..2*Pi,color=blue):
```

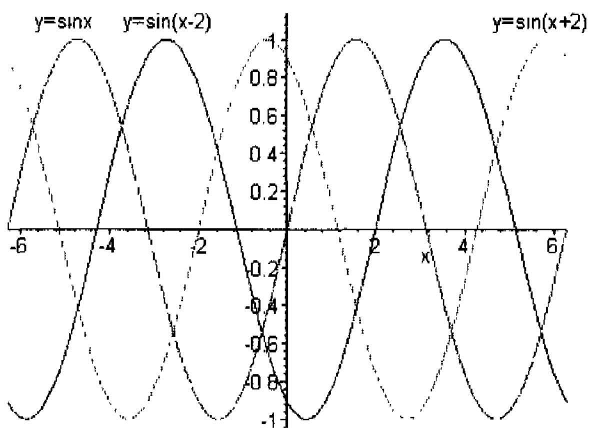
```
> c:=plot(1/2*sin(x),x=-2*Pi..2*Pi,color=green):
> d:=textplot([1.5,1.2,"y=sinx"]):
> e:=textplot([1.5,2.2,"y=2sinx"]):
> f:=textplot([1.5,0.6,"y=1/2sinx"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```

③ $y = \sin(x+a)$

$y = \sin(x+a)$ 형태의 그래프가 a값이 변함에 따라 어떻게 변화되는 지를 알아보기 위해서 a대신에 0, -2, 2를 대입하여 각각의 그래프를 화면상에 모두 나타내어 비교해 보자.

아래 그림에서 $y = \sin x$, $y = \sin(x-2)$, $y = \sin(x+2)$의 그래프를 살펴보자. 이 그래프들은 모두 주기가 2π, 치역이 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$로써 같다. a의 값이 -2일 때 $\sin x$의 그래프 자체가 x축으로 -2만큼 이동한 것을 볼 수 있다.

< $y = \sin x$, $y = \sin(x+2)$, $y = \sin(x-2)$의 그래프 >

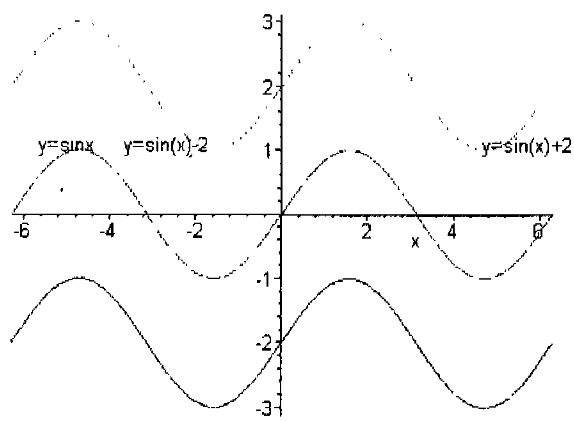


Maple프로그램의 입력은 다음과 같다.

```
>with(plots):
>a:=plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi):
> b:=plot(sin(x-2),x=-2*Pi..2*Pi,color=blue):
> c:=plot(sin(x+2),x=-2*Pi..2*Pi,color=green):
> d:=textplot([-5,1.1,"y=sinx"]):
> e:=textplot([-2.7,1.1,"y=sin(x-2)"]):
> f:=textplot([5.7,1.1,"y=sin(x+2)"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```

④ $y=\sin x+a$ 형태의 그래프가 a값이 변함에 따라 어떻게 변화되는 지를 알아보기 위해서 a대신에 0, -2, 2를 대입하여 각각의 그래프를 화면상에 모두 나타내어 비교해 보자.

< $y=\sin x$, $y=\sin x+2$, $y=\sin x-2$의 그래프 >



Maple프로그램의 입력은 다음과 같다.

```
> with(plots):
```

```
> a:=plot(sin(x),x=-2*Pi..2*Pi):
> b:=plot(sin(x)-2,x=-2*Pi..2*Pi,color=blue):
> c:=plot(sin(x)+2,x=-2*Pi..2*Pi,color=green):
> d:=textplot([-5,1.1,"y=sinx"]):
> e:=textplot([-2.7,1.1,"y=sin(x)-2"]):
> f:=textplot([5.7,1.1,"y=sin(x)+2"]):
> display([a,b,c,d,e,f]);
```

그림에서 $y=\sin x$, $y=\sin x-2$, $y=\sin x+2$ 각각의 그래프를 살펴보자. 이 그래프들은 모두 주기가 2π이다.

치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$, $\{y \mid -3 \le y \le -1\}$, $\{y \mid 1 \le y \le 3\}$로써 다르다.

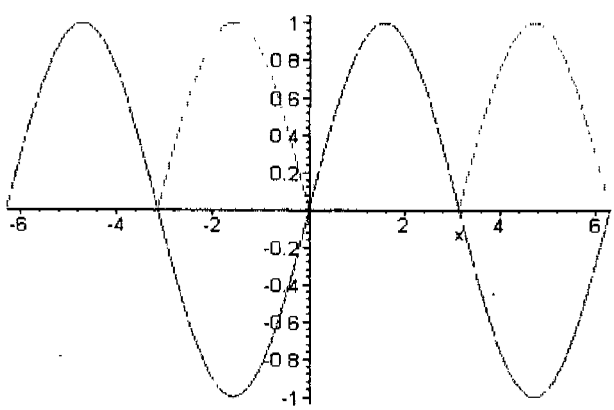
a의 값이 2일 때는 $\sin x$의 그래프가 y축으로 2만큼 이동한 것을 볼 수 있다.

⑤ $y=\sin x$의 여러 가지 형태의 절대값

ㅇ. $y=|\sin x|$


```
plot({sin(x),abs(sin(x))},x=-2*Pi..2*Pi);
```

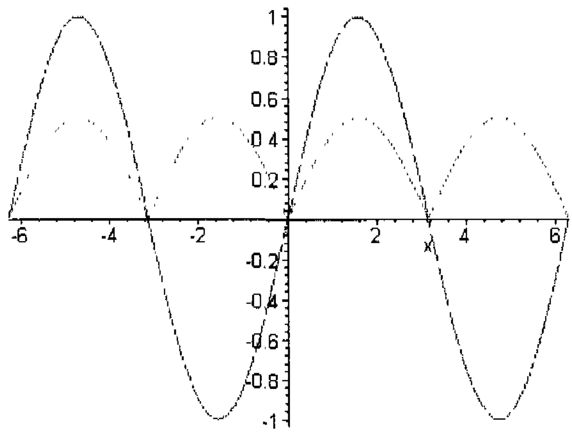
< $y=|\sin x|$의 그래프 >



o. $y=1/2|\sin x|$

>plot({sin(x),1/2 *abs(sin(x))},x=-2*Pi..2*Pi);

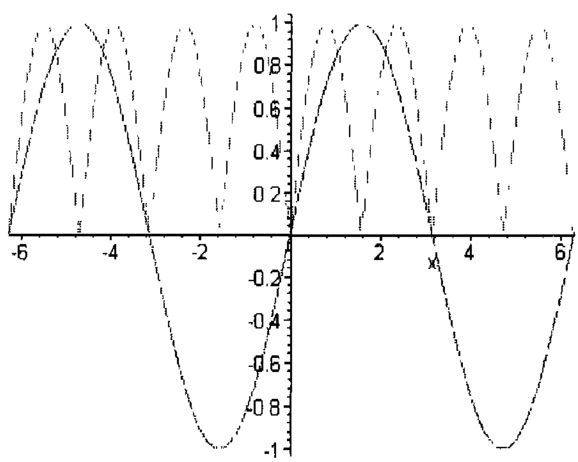
< $y=\frac{1}{2}|\sin x|$ 의 그래프 >



o. $y=|\sin 2x|$

plot({sin(x),abs(sin(2*x))},x=-2*Pi..2*Pi);

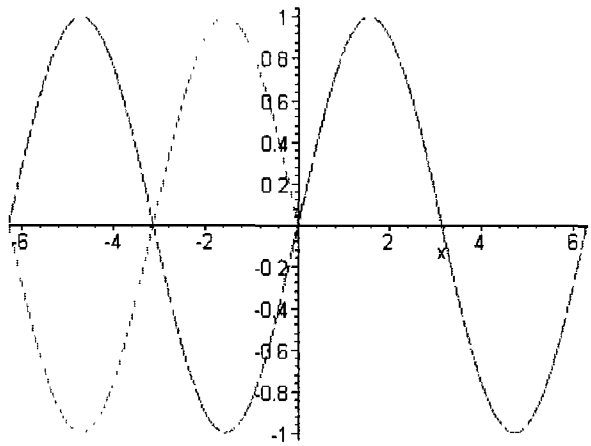
< $y=|\sin 2x|$ 의 그래프 >



o. $y = \sin|x|$

plot({sin(x),sin(abs(x))},x=-2*Pi..2*Pi);

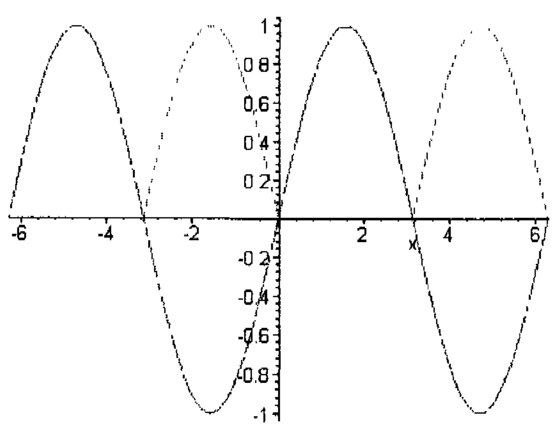
< $y=\sin|x|$ 의 그래프 >



o. $y=|\sin|x||$

plot({sin(x),abs(sin(abs(x)))},x=-2*Pi..2*Pi);

< $y=|\sin|x||$ 의 그래프 >



일단 $y=\sin x$그래프의 개형을 알면, 더 확장해서 $y=a\sin(x-b)+c$형태의 그래프에서 a, b, c값이 그래프의 개형에 어떤 영향을 미치는지 위의 방법과 같이 알아볼 수 있다.

VI. 결론 및 제언

시각화는 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위하여 적절한 도형을 그릴 수 있고, 이를 문제 해결에 효과적으로 이용하는 과정이다. 현행 학교 수학은 교수 방법에 있어서 기호적이고 분석적인 측면이 강조됨으로써, 그림이나 도표를 통한 시각적인 교수 방법은 상대적으로 소홀히 다루어지고 있다. 수학 교육에서 시각화가 소홀히 다루어지는 이유는 시각화에 대한 잘못된 인식과 수학자와 교사들의 무관심, 인간의 직관에 대한 불신과 학생들을 시각적으로 학습시키는 적절한 방법론에 대한 결여 때문이다.

이를 해결하기 위해서는 시각화에 대한 올바른 인식과 문제의 상황에 따라 적절한 시각화 도구를 사용하여 시각적인 방법과 분석적인 측면 어느 쪽에도 치우치지 않으면서 학생들에게 그림이나 그래프를 그리는 방법과 이것을 문제 해결에 이용하도록 가르쳐 주어야 하고 문제를 설명할 때 관련된 그림을 소개하여 지도하는 방법을 고려해야 한다.

현재 우리 나라의 교실에는 멀티미디어 시설이 설치되고 있는 중이다. 학생 개개인이 컴퓨터를 활용해서 프로그래밍을 하여 실습을 하려면 아직까지는 여건이 갖추어지지 않았다. 학교에서 컴퓨터를 활용하는 것도 제한될 수밖에 없다. 수학 수업 시간에 컴퓨터를 활용하는 것도 학생 개개인이 수학적인 내용을 프로그래밍하여 직접 실습을 하면서 배워가면 좋겠지만 아직은 여건이 되지 않고 있다. 본 논문에서는 학습 내용을 시각적으로 구성하여 제시함으로써 내용의 이해를 좀 더 쉽게 할 수 있도록 하는 데에 초점을 맞추었

다. 먼저 시각화의 도구로 수치 계산 능력, 기호 계산 및 그래픽 기능이 뛰어난 Maple을 소개하고, 수학 교육용 프로그램으로서의 적합성과 기대 효과에 대해 살펴보았고, 수학에서 기초가 되는 함수 단원에 대하여 몇 가지 실례를 통해 Maple이 어떻게 효과적으로 응용될 수 있는지 알아보았다.

Maple을 이용하여 수학 학습을 하는데 있어서 기대되는 효과는 다음과 같다.

첫째, 학습 자료를 시각화하여 제시함으로써 학습자가 개념을 직관적으로 쉽게 이해할 수 있고 학습자의 흥미를 유발할 수 있다.

둘째, 계산을 하거나 그래프를 그리는데 있어서 시간을 절약할 수 있다.

셋째, 교사 혼자서 수업을 하는 것이 아니라 학습자가 화면을 보고 계산을 하거나 그래프를 그리는 프로그램에 대하여 의견을 제시하면서 같이 참여하고, 그렇게 함으로써 창의력이나 문제 해결력의 신장에 도움이 될 수 있고, 집중력을 높일 수 있다.

Maple을 이용한 교수-학습에 관련하여 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, Maple을 이용하여 시각화를 향상시킬 수 있는 교수 자료의 개발을 위한 수업 환경이나 수업 내용 등에 대한 지속적인 연구가 이루어져야 한다.

둘째, Maple을 이용하여 개발한 교수-학습 보조 자료를 실제적인 교수 학습에 적용하였을 때 학생들의 개념 습득, 문제 해결력 등에 대한 구체적인 검증이 필요하다.

셋째, Maple을 이용하여 개발한 교수-학습 자료를 교사와 학생이 조작 기능을 익혀 어떤 방법으로 문제를 해결하고 있느냐에 대한 검증이 필요하다.

또한, 미래의 연구 과제로 함수 단원에 대한 Maple을 적용한 결과 학생들의 반응 및 학습 효과를 검증할 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. 박세희(1987), “수학의 세계” ,서울대학교 출판부

2. 김용태, 박한식,우정호(1997), 수학교육개론, 서울대학교 출판부

3. 구광조, 오병승, 전평국 공역(1998), 수학 학습 심리학, 교우사

4. 성시영 · 윤복식(1995),수학 교육에서의 Mathematica의 활용, 대한수학교육학회 논문집, 제5권, 제 1호

5. 박경수, 한동승(1999), Maple V-미분적분학을 중심으로, 경문사

6. 신동선, 류희찬(1998), 수학교육과 컴퓨터, 경문사

7. 장경윤(1996), 컴퓨터와 수학교육, 대한수학교육학회 논문집,6(1)

8. 허혜자(1998), Mathematica를 활용한 수학지도, 대한수학교육학회 논문집,8(2)

9. 추인선, 박용범, 하회영, 최재용(1998), Maple V와 미분적분학, 교우사

10. K.M.Heal, M.L.Hansen & K.M.Rickard(1996), Learning Guide, Springer

11. 최재룡, 한창우(1998) 예제 중심으로 풀어쓴 선형대수학, 교우사

12. 강옥기(1989), “Computer Programming이 수학 학습에 미치는 효과” ,수학 교육 논집 제7권 : 23-41.

13. 김용운 외 (1996), 「數學史大全」,서울 : 도서출판 祐成

14. 구광조, 오병승(1979), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울:경문사

15. 권오남, 박경미(1997), “그래픽 계산기를 이용한 함수 지도에 관한 연구” 「한국

수학교육학회지 시리즈 A 제36권 제1호」, 서울:한국수학교육학회

16. 김상기(1998), "고등학교에서 Mathematica를 이용한 함수의 지도에 관한 연구" 충북대학교 교육대학원 석사학위논문

17. 박을태(1998), "Maple을 이용한 함수의 그래프 지도에 관하여" 전북대학교 교육대학원 석사학위논문

18. 곽성은(1998), Maple을 통한 수학교육의 향상, 한국수학교육학회 시리즈 E, <수학교육 프로시딩>, 제7집

19. 홍선민(1998), Maple을 활용한 수학 교수법 연구,전주대학교 교육대학원 석사학위논문

20. 한국수학회논문집(1999), 한국학교수학회

21. 윤옥경외 4인(1996), 고등학교 공통수학, (주)중앙교육진흥연구소

<Abstract>

A Study of Teaching Function in Highschool by the Maple Program *
- In Highschool Common Mathematics -

Kim, Suk Man
Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea
Supervised by Professor Kim, Do hyun

The current Korean highschool education in mathematics needs changes. It is too stereotypical for the students to have interests in it and to think creatively. It is this study that tries to improve current situation of mathematics education. It is the process of making right answer that is more important than the correct answer itself in the highschool mathematics. But in the current situation, the process would be meaningless if the answer is wrong. Especially, reviewing the lessons by repeating is needed to the students who understand the lessons after learning.

---

* A thesis submitted to the committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2000

There are three aims in this essay. First, it would be discussed that the effects in mathematics education by using computer program. Second, by mentioning the Maple which is a kinds of computer program, excel in evaluating and graph, visualization of mathematics will be discussed for effective function teaching in 'Highschool Common Mathematics'. Last, it makes the most of the teaching materials by using the Maple program. For achieving these goals, first, it tries to make the process of graphic generation concretely for understanding the concept of functional graph by using the Maple program. Second, in the base of the text book, it is visualized and let the students increase the interests of it by the Maple program. Third, using the Maple program to solve the problems and show the process to get right answer, it could be increased that the poor students' interests and creativities of mathematics.

If these studies are more developed, it is assumed that the teachers can make the teaching materials by themselves. It puts emphasis on understanding the concepts of functional graph rather than the teaching materials which are presented in this essay. And the effects of understanding the functional concepts should be examined by the next investigators.