

碩士學位論文

가속도가 없을 때의 쌍둥이 역설 고찰

指導教授 康 禎 友



濟州大學校 教育大學院

物理教育專攻

姜 昌 完

1999年 8月

가속도가 없을 때의 쌍둥이 역설 고찰

指導教授 康 禎 友

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함.

1999年 6月 日

濟州大學校 教育大學院 物理教育專攻



提出者 姜昌完

姜昌完의 教育學 碩士學位 論文을 認准함.

1999年 7月 日

審査委員長 _____ 印

審査委員 _____ 印

審査委員 _____ 印

가속도가 없을 때의 쌍둥이 역설 고찰

姜 昌 完

濟州大學校 教育大學院 物理教育專攻

指導教授 康 禎 友

특수 상대성이론에서 쌍둥이 역설을 학습하는 학생들은 일반적으로 쌍둥이들이 나이차가 생기는 직접적인 원인은 가속도 때문이라는 생각을 갖는다.

가속도를 고려치 않았을 때, 한 계에서 동시에 태어난 세 사람의 경우를 이용하여 하나의 상황을 설정한 뒤, 이로부터 특수 상대성이론의 세 개념을 이끌어냄으로써 쌍둥이들의 나이차가 생기는 원인을 새로운 방법으로 설명하였다.

S'계에서 L_0 만큼 떨어진 거리에서 동시에 태어난 을과 병이 어떠한 가속도도 경험하지 않은 상태에서 같은 시간동안 여행하고 있을 때, S계에의 관측자에 의해 관측되는 을과 병의 나이와 위치는 을이 병보다 $\gamma v L_0 / c^2$ 만큼 나이가 많고, 그들은 서로 γL_0 의 거리만큼 떨어진 것으로 나타낼 수 있음을 보였다.

가속도가 전혀 없이 단순히 정지해 있는 관측자가 자신의 계에 대해서 등속 운동하고 있는 한 계에 속한 두 사람의 어느 한 순간의 좌표를 로렌츠 변환식에 의하여 단순 비교하는 것만으로도 두 사람의 나이차가 발생한다는 것을 보여줌으로써 가속도만이 나이차를 발생시키는 유일한 원인은 아니라는 것을 알 수 있으므로 일반 상대성이론을 적용치 않고서도 쌍둥이 역설을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

※ 본 논문은 1999년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

차 례

초록	i
I. 서론	1
II. 상대론에 관한 기본 이론	5
1. 시공간에 대한 인식의 변화	5
2. 특수 상대성이론의 가정	6
3. 로렌쯔 변환	7
4. 길이 수축	11
5. 시간 팽창	12
6. 동시성	15
III. 쌍둥이 역설	17
1. 쌍둥이 역설의 문제	17
2. 쌍둥이 역설에 대한 선행연구	19
IV. 동시에 태어난 세 사람의 나이 비교	23
1. 갑의 생애	25
2. 을의 생애	26
3. 병의 생애	26
4. 임의의 순간에서 나이차 비교	28
V. 결 론	31
참고문헌	33
Abstract	36
감사의 글	38

I. 서론

상대성이론(Theory of relativity)은 아인슈타인에 의하여 제창된 현대물리학의 중요한 이론으로 특수 상대성이론과 일반 상대성이론으로 이루어져 있다. 이들 중 특수 상대성이론은, 운동에 관한 갈릴레이-뉴턴의 상대성원리를 근본적으로 개혁하여, 서로 등속도로 운동하는 관측자에 대하여, 전자파의 이론을 포함한 모든 물리법칙이 같은 형식으로 기술되도록 정식화(定式化)되어 있다. 또 일반 상대성이론은, 중력을 관성력과 동등한 것으로 간주하는 입장에서, 일정한 가속도를 가진 관측자들에게도 상대성 원리가 성립하고, 물리법칙이 좌표계의 변환에 대하여 불변인 형식을 가지도록 체계화한 이론이다.¹⁾

이들 이론의 가장 근본적인 특징은, 관측자의 운동 상태에 관계없이 절대성을 가지고 있다고 생각해 온 지금까지의 시간·공간의 개념을 부정하고, 시간·공간이 각각 관측자에 대하여 상대적으로만 의미를 가진다고 생각한다는 점이다.

상대성이론은 양자론과 함께 20세기에서의 물리학의 혁명적 발견이라고 할 수 있다. 그러나 상대성이론을 학생들이 학습할 때는 많은 어려움을 겪는다. 상대성이론 개념의 학습이 일상적인 실험이나 경험, 또는 직관적인 사고에 의해 쉽게 이루어지지 않기 때문이다.

상대성이론 기초 개념에 대해 학생들은 일반적으로 길이나 시간을 절대적인 개념으로 믿고 있고, 상식에서 벗어난 상대론적 현상을 지각의 문제로 해석하려 하거나 기계론적으로 해석하려 하며, 빛의 속도는 관찰자나 광원의 운동에 따라 일정하지 않으나 속도가 매우 빠르므로 일정하게 보이는 것이며 또한, 빛의 속도는 다른 속도(예를 들면, 비행기 등의 물체의 속도)와는 다르므로 항상 일정하다²⁾는 생각을 갖고 있다.

커리쉬(Y. Kirish)는 학생들이 상대성이론을 학습하는 데 어려움을 가지는 이유³⁾에 대해 ① 상대성이론과 일상적인 경험과는 너무 다르고, ② 상대성이론

내용이 물리학 책의 뒷부분에 있으므로 상대성이론을 배우기에는 이미 지쳐있으며, ③ 상대론적 관점은 세계관에 대한 중요한 변화를 요구하므로 어려울 뿐 아니라, ④ 상대론적 사고를 충분히 적용할 기회가 적기 때문이라고 하였다.

이러한 어려움을 줄이기 위한 방안으로서 커리쉬는 기존의 물리학 교재의 순서나 내용을 바꾸기보다는 가르칠 내용을 줄이고, 중요한 몇가지 방법을 중점적으로 사용하도록 하는 방법을 제안하였는데 예를 들면, 정역학이나 동역학에 있어서 반드시 로렌츠 변환을 사용토록 하였다. 그리고 상대성이론 내용이 역사적인 순서로 전개되는 데에 대한 장점을 다음과 같이 강조하였다.

첫째, 상대성이론을 다른 물리학 내용과 연관지어 준다. 둘째, 새로운 개념에 대한 인지적인 동화를 할 수 있게 도와준다. 셋째, 간단한 실험을 통해 원리를 쉽게 설명할 수 있다. 넷째, 물리 개념이 어떻게 발전하여 왔는지, 옛 이론이 실험에 의해 반박되었을 때, 어떻게 새로운 이론이 등장하는지를 알 수 있다.

이와 같이 상대성이론 학습은 학생들의 사전개념 분석에 기초한 교수·학습 방법의 심층적 연구 뿐만 아니라 상대론적 시간, 공간, 질량 등의 개념을 연계해서 현실에 적용해 보고 학습할 수 있는 기회가 많이 제공되어야만 한다.

단순 이론 전개가 아니라 가상 현실에 상대성이론을 적용해서 상대론 효과를 알아보는 쌍둥이 역설(twin paradox)이란 상대성이론의 문제도 학생들은 이해하기 어려워한다. 이 문제를 간단하게 이해할 수 있으면 상대성이론 개념 정립에 많은 도움이 될 것이다. 그러므로 보다 쉽게 학습할 수 있는 새로운 방법이 요구된다고 하겠다.

쌍둥이 역설이라 불리우는 상대성이론의 유명한 문제는 2개의 완전히 똑같이 만든 시계에 관한 것이다. 시계의 하나는 지구에 남겨놓고, 다른 하나는 속도 v 로 달리는 우주선에 실어 여행을 시킨 후 시간 t 후에 지구에 되돌아왔다고 하였을 때의 문제이다. 보통은 시계 대신 일란성 쌍둥이 A, B로 대치시켜서 생각하기 때문에 쌍둥이 역설이라 부르게 된다. 시계 대신 쌍둥이로 대치시켜도 좋은 이유는 삶의 과정이란 심장이 고동, 호흡, 맥박 등 일종의 생물학적 시계를 대표하기 때문이다.

쌍둥이 B는 태양계 밖의 행성에까지 고속으로 갔다왔고, 쌍둥이 A는 집에 있었다. 그들이 다시 만났을 때 누가 더 늙었을까? 아니면 둘다 나이가 같을까? 이 정답은 집에 머문 쌍둥이인 A가 더 나이가 들었다는 것이다. 이 문제는 비록 이 답에 동의하지 않는 사람은 극소수였으나 수십 년 동안 극렬한 논쟁의 주제가 되어왔다.

이 문제는 역설이다. 왜냐하면 비슷한 구실을 한 쌍둥이가 나이가 같지 않는 결과를 낳게 되었기 때문이다. 즉, 집에 머문 쌍둥이 A가 나이들고 우주 여행한 쌍둥이 B가 젊어진 것은 특수 상대성이론에서의 시간팽창, 즉 쌍둥이 A가 보았을 때, 쌍둥이 B의 시계가 느리게 가는 것으로 보기 때문이다. 만일 어떤 사람이 쌍둥이 B의 입장에서 쌍둥이 A를 보았을 때, 쌍둥이 A의 시계가 느리게 가는 것으로도 볼 수 있어 쌍둥이 A가 더 어리다고 결론을 내릴 수 있다. 즉, 쌍둥이 B의 시각에서 시간팽창 요인에 의한 쌍둥이 역설이 나타난다.⁴⁾

지금까지의 연구 결과에 의하면, 가속도가 쌍둥이들로 하여금 나이차가 생기도록 하는 원인인 것은 분명하다고 하겠다. 그러나 보근(S. P. Boughn)은 1989년에 동일한 가속도를 경험하는 쌍둥이들도 나이차가 발생한다는 연구결과⁵⁾를 보고하였다. 따라서 쌍둥이 역설에서 가속도가 쌍둥이들로 하여금 나이차를 생기게 하는 원인들 중 하나는 될 수 있을지 몰라도 직접적인 원인이라고 할 수는 없다고 하겠다.

그러므로 가속도만이 쌍둥이들로 하여금 나이차를 생기게 하는 직접적인 원인이라는 생각을 불식시키기 위해서 새로운 설명 방법을 도입해 보려고 한다. 새로 도입하려고 하는 설명 방법은 특수 상대성이론의 시간팽창과 길이수축 그리고 동시성의 개념을 각기 다른 상황에서 하나씩 설명하기보다는 단 하나의 상황을 설정하여 이로부터 특수 상대성이론의 세 개념을 유도하는 방식이다.

따라서 본 연구의 목적은 모든 가속도를 배제한 다음 위와 같은 단 하나의 상황을 설정한 뒤, 어느 한 계에서 동시에 태어난 세 사람이 시공간 도형을 사용하지 않고 단지 간단한 로렌츠 변환식만을 이용하여도 결국 그들이 나이차가

발생한다는 것을 보여줌으로써 쌍둥이 역설에서 나이차가 발생하는 주원인이 가속도가 아님을 증명하려는 것이다. 그럼으로써 “나이를 먹는 것에서의 비대칭은 실제로 어디에서 일어날까?” 그리고 “무엇 때문에 나이 차가 생기는가?”라는 질문에 답하려고 한다.

본 논문의 구성은 II장에서 상대론의 기본 이론을 간략히 알아본 후, III장에서 쌍둥이 역설에 관한 기존의 설명 방법과 선행 연구에 대해 알아보겠다. IV장에서는 본 연구자가 모든 가속도를 배제한 어느 한 계에서 동시에 태어난 세 사람의 생애를 간단한 로렌츠 변환식만을 이용하여 비교하는 새로운 방식으로 쌍둥이 역설을 설명해 보려고 한다. 그런 다음, V장에서 결론을 내리겠다.



II. 상대론에 관한 기본 이론

상대론 이론들 중에서 여기서는 본 연구와 관련된 시간과 공간에 대한 인식 변화 과정과 특수 상대성이론의 가정, 로렌츠 변환 그리고 길이수축과 시간팽창 및 동시성에 대해^{6~14)} 서만 알아보겠다.

1. 시공간에 대한 인식의 변화

갈릴레이와 뉴턴은 역학계의 운동법칙이 갈릴레이 불변성(Galilei invariance ; 일정한 상대속도를 보이는 두 기준틀에서 표현된 역학 운동법칙이 같은 형태로 표현되는 성질)에 따라 모든 관성기준틀(inertial frame of reference)에서 똑같은 원리로 기술되는 성질이 사실은 모든 물리현상들에 적용되는 보편적 원리라고 믿었다. 이 원리를 갈릴레이의 상대성원리(principle of relativity)라고 일컫는데, 이는 뉴턴의 운동법칙이 정립된 이후 모든 물리학의 기초를 이루는 중요한 원리로 받아들여졌다.

그러나 19세기 중반 맥스웰(J. C. Maxwell)이 완성한 전자기 방정식은 갈릴레이의 상대성원리와 맞지 않는다는 사실이 밝혀져 상대성원리에 대한 모순이 강력히 대두되었다. 이러한 모순점은 1905년 아인슈타인(Albert Einstein)이 발표한 특수 상대성이론(special theory of relativity)에 의하여 완전히 해결되었으며, 상대성원리가 다시 물리학의 기저를 이루는 중요한 법칙으로 받아들여지는 계기를 마련하였다.

따라서 특수 상대성이론을 통하여 상대성과 상대성원리 자체의 개념은 보편적 원리로 모든 물리현상에 적용되며, 단지 관성기준틀 사이의 변환은 아인슈타인이 구사한 로렌츠(Lorentz)의 변환이 정확한 표현이고 갈릴레이의 변환은 상대속도가 작은 경우의 근사 방법임이 밝혀지게 되었다.

맥스웰의 전자기 이론은 그 이전까지 무한하다고 믿어왔던 빛 속도가 사실은

유한한 값 $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ 을 가짐을 밝혀주었다. 바로 이 유한한 빛 속도가 특수 상대성이론의 가장 중요한 논리적 출발점을 제공하여 준다. 아인슈타인은 특수 상대성이론에서 상대성원리를 맥스웰의 전자기 현상과 부합하도록 하기 위하여 갈릴레이의 상대성이론의 특성인 시간의 공간에 대한 절대성을 포기하고 공간과 마찬가지로 상대성을 가지도록 허용하였으며 대신 빛 속도에 절대성을 부여하였다.

빛 속도가 유한하며 절대성을 가진다는 가정으로부터 시간과 공간에 관한 놀라운 사실이 밝혀지게 되었다. 즉, 시간과 공간은 서로 섞여서 바뀔 수 있는 4차원의 민코브스키(Minkowski)시공간을 형성하며, 이 시공간 안에서 측정되는 모든 정보는 빛 속도 이상의 속도로 전달될 수 없다는 것이 발견되었다.

이렇듯 시간과 공간에 관한 인간의 인식은 특수 상대성이론이 대두되면서 엄청나게 다른 새로운 방향으로 이해할 것을 요구받았다. 이로 하여 특수 상대성이론은 물리학의 원리뿐 아니라 철학의 기본 체계를 뿌리째 흔들어 놓는 중요한 사건으로 받아들여졌다.

아인슈타인은 관성기준틀에서 성립하는 특수 상대성이론을 가속기준틀로 확장하여 일반 상대성이론(general theory of relativity)을 1914년 완성하였다. 이 이론은 가속에 따른 중력을 관성력과 같이 취급할 있는 근거인 등가원리(equivalence principle)를 설명하는 중요한 이론이다. 바로 이 등가원리를 사용하여 뉴턴의 만유인력 이론에서 수수께끼로 남아있던 관성질량과 중력질량이 동일하다는 사실을 완벽하게 설명할 수 있었다. 더군다나 일반 상대성이론은 만유인력을 중력장에 의한 힘으로 다루는 대신 4차원 시공간의 휘어짐에 따른 결과로 해석하여 중력을 기하학적으로 설명하는 새로운 방법론을 제시하였다.¹⁵⁾

2. 특수 상대성이론의 가정

아인슈타인의 특수 상대성이론은 상대성원리를 뉴턴 역학과 맥스웰 전자기역학 모두에 모순 없이 부합하도록 적용시킨 유일한 이론으로 다음의 두 가지

가정에 바탕을 두고 정립되었다.

첫번째 가정은 상대성원리로, 모든 물리법칙은 어떠한 관성기준틀에서 관찰하여도 똑같은 형태로 표현된다. 따라서 절대적인 관성기준틀은 절대 존재하지 않는다. 이 첫번째 가정을 이해하는데 조심해야 할 사실은 측정된 물리량들이 모든 관성기준틀에서 같은 값이어야 함을 뜻하지는 않는다는 것이다. 각각의 관성기준틀에서 측정된 물리량들은 일반적으로 다른 값을 보이겠지만 측정된 물리량들 사이의 관계, 즉 물리법칙은 모든 관성기준틀에서 같은 형태라는 것이 상대성의 원리이다. 이 가정을 달리 표현하자면, 새로 발견될 현상의 어떠한 물리법칙도 항상 상대성원리의 가정을 만족해야 함을 뜻한다.

두번째 가정은 광속의 절대성으로, 빛(전자기파)은 어떤 관성기준계에서, 어떤 방향으로 측정하여도 언제나 같은 속도 $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ 로 진행한다. 그런데, 빛의 절대성은 빛의 속도에만 국한되는 점을 주의해야 한다. 즉, 빛의 주파수와 파장은 절대성을 가지지 않으며 관측자가 설정한 기준틀에 따라 다른 값을 가지게 된다.

아인슈타인은 위의 두 가정으로부터 출발하여 이와 부합되는 유일한 관성기준틀 사이의 좌표변환이 바로 로렌츠의 좌표변환임을 증명하였다. 로렌츠 좌표변환이 특수 상대성이론과 부합하는 유일한 좌표변환이라면 두번째 가정은 동시에 빛 속도 c 가 자연에 존재할 수 있는 최대 속도임을 뜻한다. 또한 아무리 가속을 시켜도 질량을 가진 물체의 속도는 빛 속도에 도달할 수 없다. 빛 이외에 빛 속도로 움직일 수 있는 물체는 질량이 없는 물체 뿐이다. 현재까지 알려진 유일한 질량 없는 물체는 중성미자(neutrino)라는 소립자이다.

3. 로렌쯔 변환

상대속도가 v 인 두 관성계 S, S' 이 그림 1과 같이 있다. 이 두 좌표계에서 시간, 공간 좌표를 각각 $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ 라 하고, 좌표축들은 서로 평행하며, 좌표계 S 에서 볼 때 좌표계 S' 은 x 축 방향으로 속도 v 로 움직인다

고 한다. 또 $t=t'=0$ 일 때 두 좌표계의 원점은 서로 일치했다고 한다. 지금 S계의 원점에 정지하여 있는 광원에서 $t=t'=0$ 일 때 광파를 발생했다고 하였을 때, 두 기준계에서의 시간을 두 계의 원점이 일치하는 순간부터 재기로 한다면 S계에서의 좌표 x 는 S'계에서의 좌표 x' 보다 $+vt$ 만큼 클 것이다. 왜냐하면, 시간 t 사이에 S'계는 S계에 대하여 vt 만큼 x 축 방향으로 이동했기 때문이다. 즉

$$x' = x - vt \text{ -----(II-1)}$$

이다. y 와 z 방향으로는 상대운동이 없기 때문에

$$y' = y \text{ -----(II-2)}$$

$$z' = z \text{ -----(II-3)}$$

이다. 그리고 일상생활에서와 같이

$$t' = t \text{ -----(II-4)}$$

라고 가정하면, 식(II-1)에서 식(II-4)까지를 Galilean 변환이라고 한다.

S계에서는 x 방향으로 진행하는 빛의 속도를 c 라 하면 S'계에서의 빛의 속도는 식(II-1)의 속도 변환에 의해 $c' = c - v$ 가 된다. 이것은 특수 상대성이론의 광속의 절대성 가정에 위배된다. 또한, Galilean변환을 전자기학의 기본방

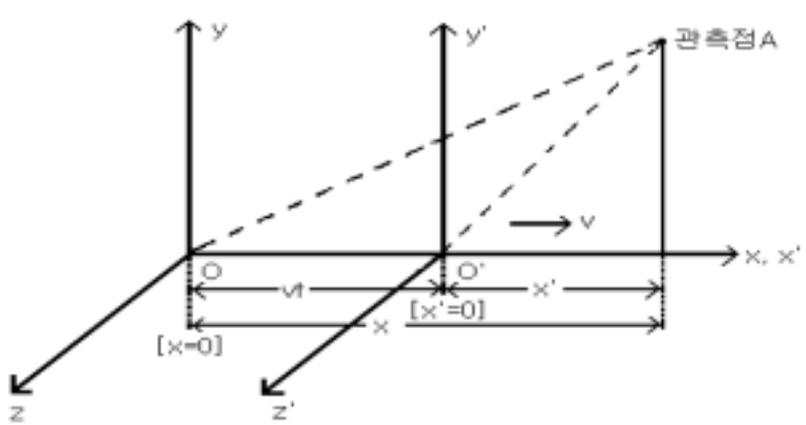


그림 1. Lorentz 변환

정식에 적용하면 한 기준계에서 측정된 양을 다른 기준계로 전환할 때 다른 형태가 되어 특수 상대성이론의 상대성원리 가정에 위배된다. 따라서 특수 상대성이론의 기본가정들을 만족시키려면 다른 좌표변환이 필요하다.

빛이 공간의 어느 점 A에 있을 때, 좌표계 S와 S'에 있어서 x 와 x' 사이와 다음과 같은 관계가 성립된다고 가정할 수 있다. 여기서 k 는 x 와 t 에 무관하고 속도 v 의 함수로 표시되는 비례상수이다.

$$x' = k(x - vt) \text{-----} (\text{II}-5)$$

물리적 방정식들은 S와 S'좌표계에서 동일한 형을 가져야 되기 때문에, x 를 x' 와 t' 로 나타내는 대응식을 얻기 위해서는 다음과 같이 v 의 부호만을 바꾸면 된다. 즉 상대운동에 있어서 방향의 차이만을 고려하면 된다.

$$x = k(x' + vt') \text{-----} (\text{II}-6)$$

Galilean변환에서와 같이 y, y', z 와 z' 은 v 의 방향에 수직이므로 좌표 y, y' 및 z, z' 사이와 차이가 없다. 따라서

$$y' = y \text{-----} (\text{II}-7)$$

$$z' = z \text{-----} (\text{II}-8)$$

가 성립된다.

그러나, 시간좌표 t 와 t' 은 같지 않다. 왜냐하면, 식(II-5)를 식(II-6)에 대입하면

$$x = k^2(x - vt) + kv t'$$

를 얻으며, 이 식으로부터

$$t' = kt + (1 - k^2)x/kv \text{-----} (\text{II}-9)$$

가 되기 때문이다. 그러므로 식(II-5)와 식(II-6)에서 식(II-9)까지의 식들은 특수 상대성이론의 제 1가정을 만족시키는 좌표변환이다.

k 값은 특수 상대성이론의 제 2가정으로부터 구할 수 있다.

$t=0$ 인 순간 S계와 S'계인 원점이 일치한다고 가정했으므로 t' 도 0이다.

$t = t' = 0$ 일 때 S와 S'의 원점에서 신호를 보냈다고 하면 각 계에 있는 관측자는 제 2가정에 의해 동일한 빛의 속도 c 를 관측할 것이다. 즉 S계에서는

$$x = ct \text{ -----(II-10)}$$

이고, S'계에서는

$$x' = ct' \text{ -----(II-11)}$$

임을 나타낸다.

식(II-11)의 x' 와 t' 에 식(II-5)와 식(II-9)를 대입하고 x 에 대해 풀면,

$$x = ct[1 + v/c] / [1 - (1/k^2 - 1)c/v]$$

가 된다. 위식은 괄호안의 양이 1이 될 때 $x = ct$ 가 되므로

$$k = 1 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 1 / \sqrt{1 - \beta^2} \text{ -----(II-12)}$$

를 얻게 된다. 여기서 $\beta = v/c$ 이며 속력변수라고 부른다.

이 k 를 식(II-5) 및 식(II-9)에 대입하면 다음과 같은 로렌츠 좌표변환을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) / \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= [t - (vx/c^2)] / \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \text{ -----(II-13)}$$

여기서, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$ 로 로렌츠 계수라고 부른다.

이 식들을 Lorentz변환이라 한다. 이 식들은 네덜란드의 물리학자 로렌츠(H. A. Lorentz)가 제일 먼저 구하였는데, 그는 전자기학의 기본 방정식은 이 변환식을 쓸 때에만 모든 기준계에서 동일한 형태가 된다는 것을 증명하였다. 그러나 Einstein의 상대론이 제창되기 전까지는 이 식들의 참된 뜻을 알지 못했다. 상대속도 v 가 c 에 비해 적을 때에는 Lorentz변환이 Galilean변환과 같아진다. 로렌츠의 역변환을 얻기 위해서는 (x, y, z, t) 와 (x', y', z', t') 를 서로 교환하고, v 를 $-v$ 로 대치하면 다음의 식들이 된다.

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma(x' + vt') \\
 y &= y' \\
 z &= z' \\
 t &= \gamma(t' + vx' / c^2)
 \end{aligned}
 \tag{II-14}$$

4. 길이 수축

한 막대의 길이는 그 양단의 좌표에 의해서 주어지고, 양단의 좌표는 관측 좌표계에 따라서 다르게 나타난다. 그림 2.에서와 같이 좌표계 S'는 S에 대해서 $x-x'$ 방향으로 일정한 속도로 운동하고, 막대는 좌표계 S'에 대해서 정지해 있다고 하면, 막대는 좌표계 S에 대해서는 $x-x'$ 방향으로 일정속도 v 로 운동하고 있는 셈이 된다.

막대의 양단을 A, B로 표시하였을 때, S'좌표계로 관측한 막대의 길이는

$$L_0 = x_B' - x_A'$$

가 되고 이때 L_0 를 고유길이(proper length)라고 한다. 로렌즈 변환으로부터 L_0 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

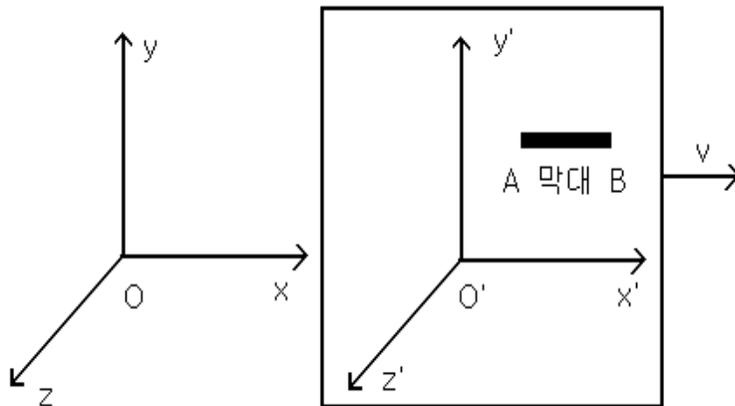


그림 2. 길이의 수축

$$L_0 = \gamma(x_B - x_A) - v(t_B - t_A) \text{ -----(II-15)}$$

여기서 x_A 와 x_B 는 관측자 O에 의해서 동시에 측정되므로 $t_A = t_B = t$ 가 된다. 따라서 식 (II-15)는,

$$L_0 = \gamma(x_B - x_A) = \gamma L \text{ -----(II-16)}$$

가 된다. 여기서, $L = x_B - x_A$ 는 S좌표계로 측정한 막대의 길이이다.

식 (II-16)은 다음과 같이 표시될 수 있는데,

$$L = L_0 / \gamma \text{ -----(II-17)}$$

여기서 $\gamma > 1$ 이므로 $L < L_0$ 이 된다.

즉 운동하고 있는 막대의 길이 L (좌표계 S에 의해서 측정된)은 정지해 있는 막대의 길이 L_0 (좌표계 S'에 의해서 측정된) 보다 짧게 관측된다. 이것을 길이수축(contraction of length) 또는 Lorentz-Fitzgerald 수축이라 부른다.



5. 시간 팽창

그림 3의 시계는 양 끝에 거울이 부착된 길이 L_0 인 막대자가 있고 섬광이 두 거울 사이를 위아래로 반사하여, 아래 거울면에 섬광이 도달할 때마다 그 시간간격을 측정할 수 있는 기구다. 섬광이 아래 거울면에 도착하면 광검지 박막이 전기적 신호를 발생시키고 이 신호를 기록계로 보내도록 설계되어 있다.

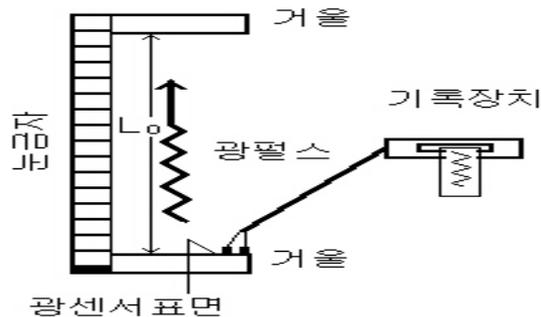


그림 3. 섬광시계

이 같은 시계 두 개 중 한 시계는 S계에 고정시키고 또 다른 시계는 S계에 대하여 속력 v 로 운동하는 S'계 내에 설치한다.

그림 4.는 S계에 있는 시계의 동작을 보여준다. 이 경우 시계의 시간간격은 고유시간 t_0 이고 빛이 광속 c 로 한 거울면에서 다른 거울면까지 진행하는데 소요된 시간은 $t_0/2$ 이다. 따라서

$$t_0 = 2L_0/c \text{ ----- (II-18)}$$

이 된다.

그림 5.는 S계에 대한 상대적 운동방향에 나란히 설치된 거울을 갖는 운동중인 시계다. 이 경우 시계의 시간간격은 t 다. 시계가 운동중이므로, S계에서 보았을 때 그 시계의 섬광은 지그재그 경로를 따른다. S계 관측자의 시간 $t/2$ 동안에 섬광이 아래쪽 거울에서 위쪽 거울로 진행하는데, 이 섬광은 수평 방향으로 운동중인 시계와 같은 속력 (v)으로 이동하므로 거리 $v(t/2)$ 만큼 이동하고, 한편 이 섬광의 이동경로의 총거리는 $c(t/2)$ 가 된다. L_0 는 두 거울사이의 직선거리이므로

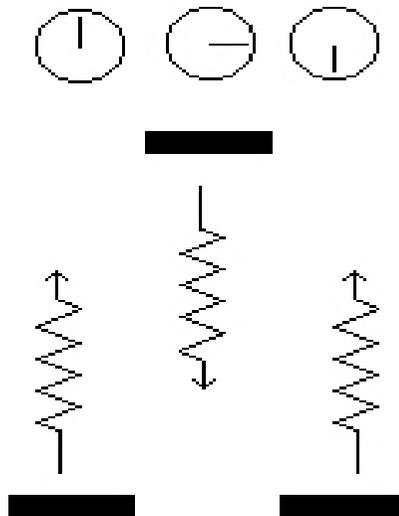


그림 4. S계의 관측자가 본 S계의 섬광시계

$$(ct/2)^2 = L_0^2 + (vt/2)^2 \text{ ----- (II-19)}$$

이 되어 이것을 t 에 관해서 풀면

$$t = (2L_0/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ ----- (II-20)}$$

가 되지만, 식(II-18)에 의해 $2L_0/c$ 는 S계에 있는 시계의 시간간격 t_0 이므로

$$t = \gamma t_0 \text{ ----- (II-21)}$$

이 된다. 여기서 $\gamma = t_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v/c$ 이다.

$\sqrt{1 - \beta^2}$ 은 속력 v 로 운동하는 물체의 경우에는 항상 1보다 작기 때문에 $\gamma > 1$ 이므로 t 는 t_0 보다 항상 크다. 정지한 좌표계에서 측정된 시간간격 t_0 를 고유시간(proper time)이라 부르며, 이러한 관계를 시간팽창(또는 시간지연, time dilation)이라 부른다.

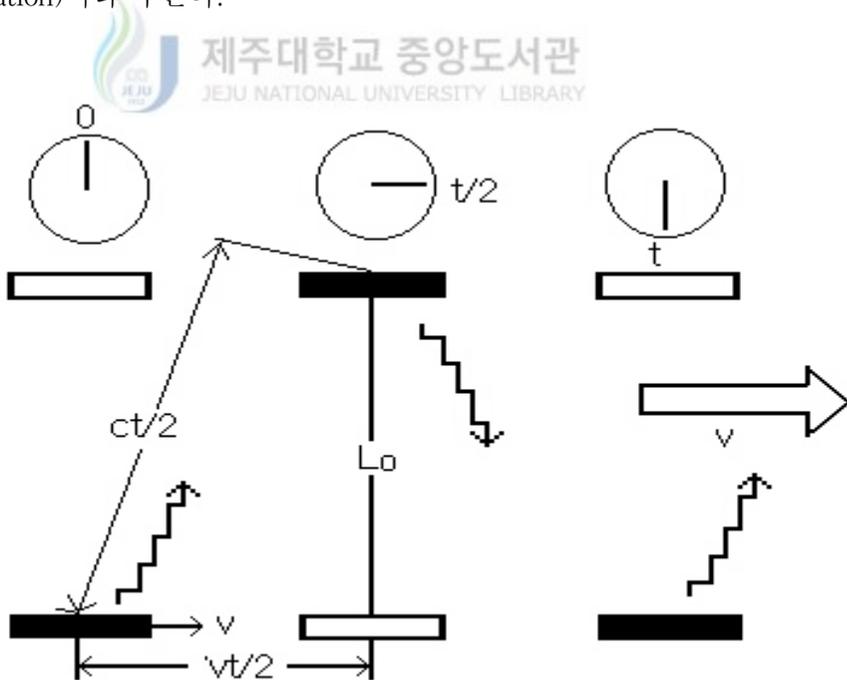


그림 5. S계의 관측자가 본 S'계의 섬광시계.

위쪽 다이얼은 S계에 고정된 보통 시계를 나타낸다.

6. 동시성

서로 틀리는 사상(물리현상)이 일어나는 시각이 같고 두 개의 사상이 공간적으로 다른 장소에서 일어날 경우에 동시성(simultaneity)이 문제가 된다.

고전역학에서 관성계 사이의 변환 법칙은 갈릴레이 변환이며, 동시란 관측자에 의하지 않는다는 뜻을 가지고, 관측자에 무관계한 시간의 척도를 정할 수가 있다. 특수 상대성이론에서는 로렌츠 변환이므로 하나의 좌표계에서 동시에 일어나는 두 개의 사상이 이에 대해 운동하고 있는 좌표계에서 보면 대체로 동시로 되지 않는다.

S'계에서 관측할 때, 위치 x_A' 에서 시각 t_A' 에 일어난 사건 A와 위치 x_B' 에서 시각 t_B' 에 일어난 사건 B가 일어났다고 할 때, S'계에서 두 사건이 동시에 일어났다면

$$t_B' = t_A' \quad \text{또는} \quad t_B' - t_A' = 0 \quad \text{-----} \quad (\text{II}-22)$$

가 되는 것이다.

고전역학에서는 갈릴레이 변환식이 어느 곳에서나 $t = t'$ 이 되므로

$$t_B - t_A = t_B' - t_A' \quad \text{-----} \quad (\text{II}-23)$$

이 된다.

S'계에서 두 사건이 동시에 일어났다는 것은 식(II-23)이 되는 것이어서, 식(II-23)식에 의하여

$$t_B = t_A \quad \text{또는} \quad t_B - t_A = 0 \quad \text{-----} \quad (\text{II}-24)$$

가 되므로 S계에서도 동시에 일어난 것으로 된다.

그러나 특수 상대성이론에서는 로렌츠 역변환식(II-14)에서 시간 t 가 위치 x' 에 따라

$$t = \gamma(t' + vx' / c^2) \quad \text{-----} \quad (\text{II}-25)$$

와 같이 되므로 x_A' 와 x_B' 에서

$$t_A = \gamma(t_A' + vx_A' / c^2), \quad t_B = \gamma(t_B' + vx_B' / c^2) \quad \text{-----} \quad (\text{II}-26)$$

이 된다. 따라서 이들의 차는

$$t_B - t_A = \gamma [(t_B' - t_A') + v(x_B' - x_A') / c^2] \text{-----}(\text{II}-27)$$

이 된다. S'계에서 동시에 두 사건이 일어났다면, 식(II-22)가 성립되므로

$$t_B - t_A = \gamma v(x_B' - x_A') / c^2 \text{-----}(\text{II}-28)$$

가 된다. 여기서

$$x_B' = x_A' \text{이면, } t_B = t_A$$

이지만,

$$x_B' \neq x_A' \text{ 이면, } t_B \neq t_A$$

가 된다. 따라서 “같은 위치에서의 두 사건이 어떤 관측자에게 동시인 것은 이 관측자에 대하여 일정한 속도로 운동하고 있는 다른 모든 관측자에게도 동시이지만, 다른 위치에서의 두 사건이 어떤 관측자에게 동시인 것은 이 관측자에 대하여 일정한 속도로 운동하고 있는 다른 모든 관측자에게는 동시가 아니다.” 라고 하는 것과 같이 상대론에서는 동시성에 대한 개념이 고전역학에서와는 달라진다.

III. 쌍둥이 역설

쌍둥이 역설은 도대체 어떤 것이기에 학생들이 어려워하며, 1905년 아인슈타인이 특수 상대성이론에서 소개한 이후 관심과 논의에 대상이 되어왔는지를 알아보겠다. 여기서는 쌍둥이 역설의 문제와 이에 관한 선행 연구에 대해서만 알아보려고 한다.

1. 쌍둥이 역설의 문제

일반적으로 널리 알려져 있는 쌍둥이 역설, 또는 시계 역설은 다음과 같다. 한 우주비행사가 갑과 을이란 이름을 가진 쌍둥이를 갖고 있다. 그는 갑을 집에 머물게 하고, 을을 광속도와 거의 가까운 속도 v 로 운행하는 우주선에 타게 하여 행성 A까지 우주여행을 시킨 후 지구에 돌아오게 명령하였다. 을은 우주의 행성 A로 출발하여 오랜 세월 끝에 지구로 돌아왔다. 그러나 그를 맞이한 갑은 백발노인의 되어 허리가 구부러져 있었지만 우주여행을 갔다온 을은 그대로의 청년다운 모습을 하고 있었다. 동일한 년, 월, 일에 같이 태어난 쌍둥이인데 이렇게 나이 차이가 날 수 있을까? 하는 문제이다.

오랜 세월 동안(x 년)에 갑은 T_M 만큼 나이를 먹고, 을은 T_K 만큼 나이를 먹었다고 하면, 특수 상대성이론의 시간팽창에 관한 식(II-21)에 의해

$$T_K = T_M \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

이 되고, 다시

$$T_M = T_K / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad T_K < T_M$$

과 같이 된다.

특수 상대성이론에 의하면, 우주선내의 을의 운동은 상대적인 것이어서 그 효과도 상대적이어야 한다. 즉, 운동하는 계의 시간은 정지한 계의 시간보다 천천히 흐른다. 갑과 을이 동시에 태어난 쌍둥이일지라도 갑의 입장에서 보면 을

이 운동하는 계이므로 을이 더 젊은 상태일 것이고, 을의 입장에서 보면 갑이 운동하는 계이므로 갑이 더 젊은 상태이어야 한다. 그런데, 두 결론은 모순된다. 이것을 쌍둥이 역설이라고 한다.

이 역설을 해결하는 길은 두 쌍둥이의 삶 사이의 비대칭성을 파악하는데 있다. 갑은 항상 동일한 관성계에 있다. 그러므로 갑은 을이 우주여행하는 전 기간동안 을에 대해 시간팽창 공식을 적용할 수 있다. 그러나 을은 우주여행 중 일정한 상대속도로만 운동할 수는 없었을 것이다. 을은 여러 순간에 가속, 감속을 하여야 했을 것이다. 방향도 바뀌어야 하고 지구에 접근하여야 할 때 등도 감속해야 한다. 그러므로 을은 우주여행 중 계속해서 동일한 관성계에 머물러 있는 것이 아니다. 이 때문에 시간팽창공식을 적용할 수 있는 것은 지구에서부터 밖으로 여행하는 동안뿐이다. 따라서 을이 나이를 덜 먹는다는 것은 틀림없다.

“쌍둥이 역설”은 1905년 아인슈타인의 특수 상대성이론에서 소개된 후 많은 관심과 논의가 있어 왔다. 그렇지만, 지금까지도 쌍둥이 역설은 학생들로 하여금 왜 가속을 받은 쌍둥이가 나이를 적게 먹는가? 그리고 “언제”, “어디서” 나이차가 발생하는가? “언제” 집에 남아 있는 쌍둥이가 그 여분의 나이를 더 먹게 되는가에 대한 의문을 갖고, 개념 정립에 혼란을 겪고 있다.

그런데 위와 같은 쌍둥이 역설에 대해 특수 상대성이론을 학습한 학생들은 쌍둥이 B는 쌍둥이 A가 경험하지 못하는 우주선으로 지구를 출발할 때의 가속도와 지구로 되돌아오기 위해 방향을 전환할 때의 가속도, 그리고 지구에 도착할 때의 가속도 등 세가지의 가속도를 갖기 때문에 쌍둥이들이 비대칭적으로 나이를 먹는 원인은 가속도 때문이라는 생각을 가질 수 있다. 즉, 가속도가 나이 차를 생기게 하는 직접적인 원인이라고 생각한다.¹⁶⁾ 여기에는 중요한 모순점이 존재한다. 왜냐하면 서로 등속도직선운동을 할 때에만 성립하는 특수 상대성이론의 공식은 가속도를 받는 쌍둥이 역설의 경우에는 적용할 수 없다. 따라서 일반 상대성이론을 써야 한다. 그런데 일반 상대성이론의 제2가정인 등가 원리에 의하면 계가 큰 가속도를 받을 때와 큰 중력장의 힘을 받을 때와는 모든 물리효과가 동일하도록 되어 있다. 그런데 큰 중력장에서는 시계는 천천히

진행하였었다(지구의 중력장은 우주선의 속도를 정지상태에서 광속 가까이까지 가속시키는데 필요한 중력장에 비하면 완전히 무시할 수 있을 정도로 작다). 따라서 우주 여행을 하고 돌아온 A쪽이 더 젊게 된다. 이와 같이 일반 상대성이론을 적용하면 쌍둥이 역설은 설명되어진다.

그럼에도 불구하고 문제가 되는 이유는 학생들이 일반 상대성이론을 접하기 전에 특수 상대성이론만을 학습한 상태에서 쌍둥이 역설을 배운다. 그리고 대부분의 일반물리학과 현대물리학 교재가 특수 상대성이론을 소개하는 도중에 쌍둥이 역설을 설명하고 있으며, 특수 상대성이론의 시간팽창 개념으로만 쌍둥이 역설을 설명하는 전통적인 방법을 사용하고 있기 때문이다.^{17~21)}

2. 쌍둥이 역설에 대한 선행연구

아인슈타인의 특수 상대성이론에서 소개한 후 많은 관심과 논의의 대상이 되어온 쌍둥이 역설에 대해 란게빈(P. Langevin)은 1911년에 공간과 시간에 관한 연구²²⁾에서, 우주 여행자와 지구에 머무르는 관측자간에는 공간과 시간을 통한 경로 사이의 대칭성이 결핍되었다고 주장했다. 란게빈이 주장한 쌍둥이 역설에 대한 두 가지 비대칭 중 첫 번째는 우주 여행자와 지구의 관측자가 무선 신호를 이용하여 각자의 여정을 추적하게 될 때 나타나는 그들의 경험 사이의 차이에 있으며, 두 번째는 우주 여행자가 지구로 귀환하기 위해서 반드시 견디어야 하는 가속의 문제이다.

1990년대까지 란게빈이 주장한 두 비대칭성에 의해 제안된 형태에 따라 많은 연구들이 진행되어 왔다. 이런 연구들은 동시성의 다양한 형태와 그 효과에 주목하는 그룹과 나이차가 발생하는 주요 원인으로 가속도를 지적하는 그룹으로 구분되어 진다.²³⁾

상대론적 동시성에 기초하여 쌍둥이의 나이차가 발생하는 원인을 설명하는 방법 중 대표적인 것은 란게빈에 의해 제안된 무선신호 접근법(ratio signal approach)이다. 무선신호 접근법은 우주 여행하는 쌍둥이가 우주여행 동안 지구로 신호를 보낸 후 방향을 전환한 이후에 첫번째 신호가 보내는 순간에서 지구

에 머무르는 관측자는 상대론적 도플러 효과에 의해 먼저 더 느린 일단의 펄스와 나중에 더 빠른 또 다른 일단의 펄스를 받게 된다. 만약 이때 우주선에 탄 관측자가 지구에 머무르는 관측자를 보게 된다면 그는 지구에 머무르는 사람의 나이가 처음에는 느려지다가 나중에 가서는 속도가 빨라지는 것을 보게 되리라는 결론을 내릴 수 있다. 이 무선신호 접근법은 모두 외재적 또는 내재적으로 가속의 역할을 고려치 않고 있다. 따라서 이 방법은 여행의 과정 동안, 지구의 고정된 시계와 여행하고 있는 시계로 측정된 고유시간이 서로에 대해서 어떻게 변화하는지를 말해준다.²⁴⁾

이러한 동시성에 기초하여 쌍둥이 역설을 설명하는 방법들은 대부분 그림 6과 같은 민코스키(Minkowsky)의 시간-공간 개념과 동시성의 관계 및 기하학적인 동시성의 개념을 사용하고 있다.

1996년에 뎀스(Talal A. Debs)와 레드헤드(Michael L. G. Redhead)의 연구²⁵⁾ 및 웨스(Michael Weiss)의 연구²⁶⁾, 그리고 1989년 이돈우의 연구²⁷⁾들은 이러한 설명 방법을 사용하고 있다.

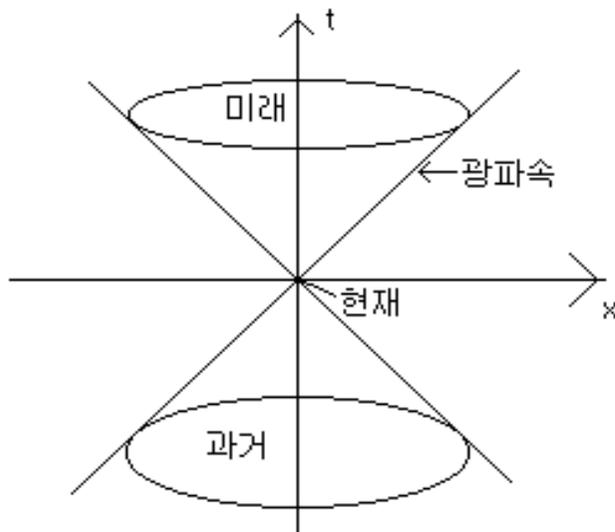


그림 6. Minkowsky의 시공간 도형

그림 7.은 이돈우의 연구 “시공간 도형을 이용한 특수 상대론 교재” 에서 쌍둥이 역설을 설명하면서 사용한 시공간 도형²⁸⁾이다. 그림에서 보는 바와 같이 ct축과 ct'축의 눈금 간격이 같지 않음에 착안하여 두 축을 물리적으로 연관시켜주는 눈금보정계수²⁸⁾ $\lambda(= \sqrt{1+ u^2/c^2} / \sqrt{1- u^2/c^2}$; ct 축에서의 단위시간을 나타내는 길이를 e, ct'축에서 단위시간을 나타내는 길이를 e'라 할 때, $e'/e=\lambda$)을 이용하여 쌍둥이 역설을 설명하였다.

그림7.에서 쌍둥이 A, B가 지상에 있을 때, A는 계속 지상에 있고, B는 u의 빠른 속도로 지상에서 S만큼 떨어진 곳을 갔다 왔을 때, 지상의 A의 시공간 경로는 $O \rightarrow A \rightarrow R$ 이고, 여행자인 B의 시공간에서의 경로는 $O \rightarrow B \rightarrow R$ 이다. 이때, 지상에서 경과한 시간을 T_A , 우주선에서 경과한 시간을 T_B 라 할 때, \overline{OA} 경로 동안 경과시간은 $T_A/2$ 이고 \overline{OB} 경로 동안 경과한 시간은 $T_B/2$ 이다. 눈금보정계수 λ 를 이용했을 때,

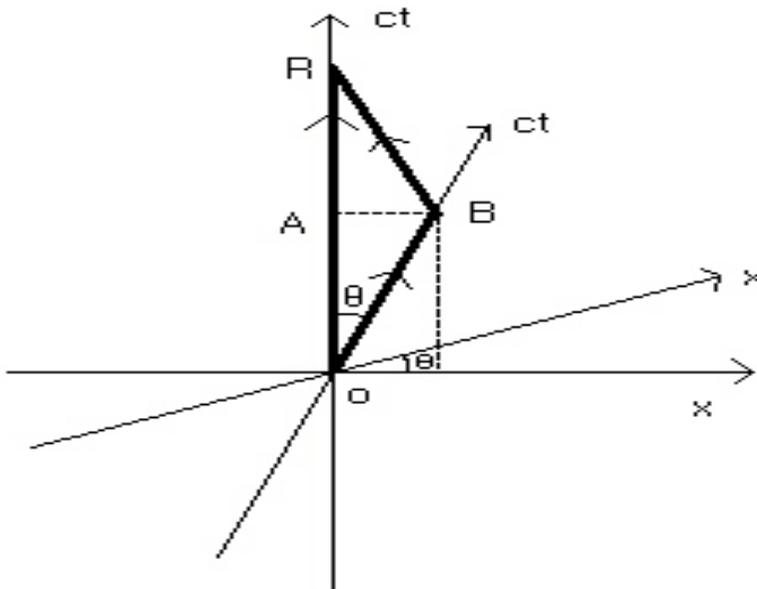


그림 7. 쌍둥이 역설을 설명하는 시공간 도형²⁸⁾

$\overline{OA} = T_A/2$ 이면, $\overline{OB} = T_B \cdot \lambda/2$ 이 되어,

$$\overline{OB} / \overline{OA} = (T_B \cdot \lambda/2) / (T_A/2) = 1 / \cos \theta$$

따라서, $T_B = T_A / \lambda \cdot 1 / \cos \theta = T_A \sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ 로 된다. 즉, $T_B < T_A$ 이다. 여기서 도형상 거리는 $O \rightarrow A \rightarrow R$ 이 최단거리로 보이지만 실제 경과 시간은 $O \rightarrow B \rightarrow R$ 이 더 짧음을 알 수 있다. 즉, 여행을 갔다온 B가 실제로 나이를 덜 먹게 되는 것이므로 쌍둥이 역설이 없음을 설명하고 있다.

가속도를 이용하여 쌍둥이 역설을 설명하는 연구들은 가속도가 쌍둥이들의 차별적 노화의 원인이 아님을 설명하고 있다. 즉, 1997년에 그루버(Ronald P. Gruber)와 프리스(Richard H. Price)²⁹⁾는 주기운동을 하는 우주선을 이용하여 시간팽창과 가속도가 독립적으로 선택되어질 수 있음을 보여주었다. 또한 1996년의 프리스(Richard H. Price)와 그루버(Ronald P. Gruber)의 연구³⁰⁾와 1989년 보근(S. P. Boughn)의 연구³¹⁾는 동일한 가속도를 경험한 쌍둥이 Jane와 Dick이 차별적 노화를 경험하는 것을 설명함으로써, 나이차가 생기는 원인은 가속도 때문이 아님을 보여주었다.

다시 말해, 보근의 연구결과에 의하면 Jane가 Dick의 우주선보다 x_0 의 거리만큼 오른쪽으로 떨어진 동일한 우주선을 타고 같은 양의 연료를 공급받아 동일하게 오른쪽으로 가속을 받은 후 새로운 관성계에 도착했을 때, Jane와 Dick의 나이는 $t'_D = \gamma(t_D - vx_D/c^2)$, $t'_J = \gamma(t_J - vx_J/c^2)$ 이 된다. 여기서 밑의 첨자 D, J는 각각 Dick과 Jane의 생일을 의미한다. 즉, t_D , t_J 는 Dick과 Jane의 생일로 처음 관성계에서 동시에 발생한 사건이다. 따라서 두 쌍둥이의 나이차를 계산하면 $t'_D - t'_J = \gamma[(t_D - t_J) - v(x_D - x_J)/c^2] = \gamma vx_0/c^2$ 이 되어 쌍둥이들이 여행을 끝냈을 경우 Jane가 Dick보다 $\gamma vx_0/c^2$ 만큼 더 나이가 많다는 것을 보여줌으로서 쌍둥이들이 차별적 노화의 원인은 가속도가 아님을 보여주고 있다.

IV. 동시에 태어난 세 사람의 나이 비교

일반적으로 쌍둥이는 같은 날, 같은 시각에 같은 부모 밑에서 태어난 사람을 말한다. 그런데 쌍둥이는 아니지만 세 사람이 같은 시각에 동시에 태어난 경우를 생각해 볼 수 있다. 그러므로 여기서는 좀 더 특별한 경우로 어떠한 가속도도 없는 어느 한 계에서 동시에 태어난 세 사람의 출생과 사망, 즉 세 사람의 생애와 임의의 시점에서 나이차를 비교하는 방법을 이용하여 쌍둥이 역설을 일반 상대성이론을 적용하지 않고 특수 상대성이론만을 적용하여 설명해 보겠다.

로렌츠 좌표변환식, 즉 식 (II-13)를 적용할 수 있도록 하기 위하여 관성계의 좌표축을 일치시킨 두 개의 관성계인 S와 S'을 그림 8.과 같이 설정하겠다.

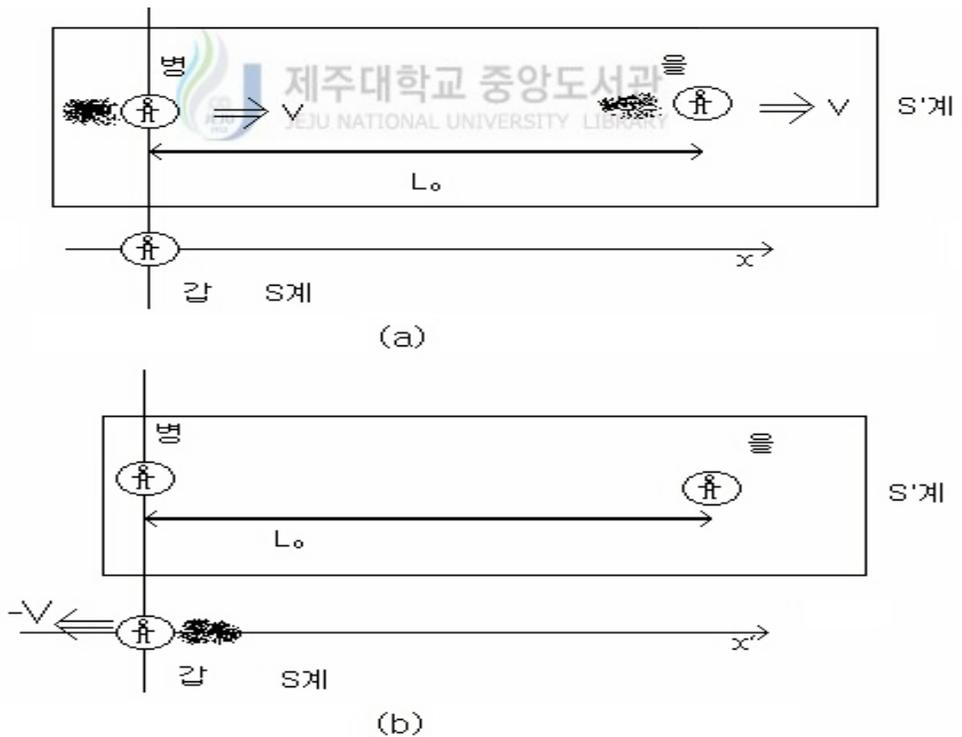


그림 8. 지구계(S계)에 대해서 일정한 속도 v 로 움직이는 우주선계(S'계)에서 동시에 태어난 갑, 을, 병. 그림(a)는 갑의 입장에서 본 을과 병의 운동, 그림(b)는 을과 병의 입장에서 본 갑의 운동

그림 8.에서와 같이 관성계 S'계는 S계에 대하여 x 축을 따라 일정한 속도 v 로 운동하고 있다. 그리고 두 계의 관성계 S와 S'을 각각 지구에 고정된 관성계와 움직이는 우주선에 고정된 관성계라고 가정한다.

S'계의 관측자(우주선)가 시간 $t=t'=0$ 에서 세 사람, 즉 지구에 고정된 관성계 S에서 갑, 우주선에 고정된 관성계 S'계에서 을과 병이 동시에 출생한 것을 관측했으며, 갑과 병은 원점에서 출생하고 을은 $x'=L_0$ 인 지점에서 출생했다고 가정해서 갑, 을, 병 세 사람은 자신의 계에서 τ_0 을 산다고 가정한다. 즉 갑은 평생 τ_0 동안을 S계에 대하여 정지 상태에 있다고 하고, 을과 병은 우주선에서 나서, 우주선에 계속 머물러 S'계에 대하여 정지 상태에 있다고 하면, S'계에 의하면 을과 병도 τ_0 년을 산다.

로렌츠 변환식(II-13)과 로렌츠 역변환식(II-14)은 어떤 사건의 시공간 좌표와 두 관성계 S와 S'에서 측정한 값들 사이의 관계를 나타내 준다. 이 식들을 이용하여 S와 S'계에서의 일어나는 세 사람의 출생과 사망, 그리고 어느 임의의 시점에서의 세 사람의 나이차를 계산해서 차별적 노화가 일어나고 있음을 증명해 보겠다.

그런데 만일 한 관성계에서 관측한 사건의 시공간 좌표를 알 수 있다면, 같은 사건에 대한 다른 관성계에서의 좌표를 식(II-13)과 식(II-14)로부터 얻을 수 있다. 따라서 세 사람의 출생과 사망의 장소와 시간을 표현하기 위하여 시공간좌표 $S(x,t)$ 와 $S'(x',t')$ 을 도입하기로 한다.

위의 주어진 조건에 의하여 갑은 S'계에서 출생과 S계에서의 사망좌표가 주어지고, 을과 병은 S'계에서의 출생과 사망좌표가 주어진다. 따라서 나머지 좌표들, 즉 갑의 S계에서의 출생좌표와 S'계에서의 사망 좌표, 을과 병의 S계에서의 출생과 사망 좌표만 산출해내면 될 것이다.

갑, 을, 병의 출생과 사망 좌표를 구해 그들의 생애를 고찰하면 다음과 같다.

1. 갑의 생애

우주선의 속한 계 S'에 정지한 관측자는 갑의 출생지와 출생시간을

$$x' = 0, \quad t' = 0 \quad \text{----- (IV-1)}$$

이라고 기록할 것이다. S계, 즉 지구에 정지한 관측자는 갑의 출생장소와 출생시간을 로렌쯔 역변환식 (II-13)에 식 (IV-1)을 대입하면 구할 수 있으므로 다음과 같이 기록할 것이다.

$$x = \gamma(x' + vt') = 0 \quad \text{----- (IV-2)}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = 0$$

이와 같은 결과는 연구자의 설명 방법의 가정에서 원점이 일치한다고 하였으므로 당연한 것이다.

S계의 관측자에 의하면, 갑은 자신의 계에서 τ_0 년을 산다고 하였으므로 S계에서의 갑의 사망은

$$x = 0, \quad t = \tau_0 \quad \text{----- (IV-3)}$$

에 일어난다. 따라서 S'계의 관측자에게 갑의 사망은 로렌쯔 변환식 (II-13)에 의하여,

$$x' = \gamma(x - vt) = -\gamma v \tau_0 \quad \text{----- (IV-4)}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma \tau_0$$

에서 일어난다. 여기서 γ 는 로렌쯔 계수로 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$ 이다.

그러므로 S계에서 갑은 $x=0$, $t=0$ 에서 태어나 $x=0$, $t=\tau_0$ 에서 사망하므로 자신의 계에서는 τ_0 년을 살게 된다. 그러나 S'계, 즉 을과 병이 바라보는 갑의 생애는 $x'=0$, $t'=0$ 에서 태어나서 $x' = -\gamma v \tau_0$, $t' = \gamma \tau_0$ 에서 사망하게 된다. 이와 같이 을과 병의 입장에서 보았을 때 갑의 생애는 $\gamma \tau_0$ 년을 사는 것으로 관측되어진다. 이것은 특수 상대성이론에서의 시간팽창 효과이다.

2. 을의 생애

S'계의 관측자에게 을의 출생은 $t' = 0, x' = L_0$ 에서 일어난다. 이것을 S계
 에의 관측자가 보았을 때, 을의 출생은 로렌츠 역변환식에 의하여

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \gamma L_0 \\ t &= \gamma(t' + vx' / c^2) = \gamma v L_0 / c^2 \end{aligned} \quad \text{----- (IV-5)}$$

에 일어난다. 또한, 을의 사망은 자신의 계, 즉 S'계에서 τ_0 년을 산다고 하였으
 므로 $t' = \tau_0, x' = L_0$ 에 사건이 발생한다.

그리고 S계의 관측자에게는 을의 사망이

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \gamma(L_0 + v\tau_0) \\ t &= \gamma(t' + vx' / c^2) = \gamma(\tau_0 + vL_0 / c^2) \end{aligned} \quad \text{----- (IV-6)}$$

에서 일어난다.

그러므로 S'계에서는 을은 $x' = L_0, t' = 0$ 에서 태어나 $x' = L_0, t' = \tau_0$ 에
 서 사망하므로 자신의 계에서는 τ_0 년을 살게 된다. 그러나 S계, 즉 같이 바라
 보는 을의 생애는 $x = \gamma L_0, t = \gamma v L_0 / c^2$ 에서 태어나서 $x = \gamma(L_0 + v\tau_0),$
 $t = \gamma(\tau_0 + vL_0 / c^2)$ 에서 사망하게 된다.

이와 같이 같이 갑의 입장에서 본 을의 생애는 $\gamma\tau_0$ 년을 사는 것으로 관측되어진
 다. 이것은 같이 갑의 생애에서 설명하였던 것과 마찬가지로 특수 상대성이론에서의
 시간팽창 효과이다.

3. 병의 생애

병의 출생은 S'계에서의 관측자에게는 $x' = 0, t' = 0$ 에서 일어난다. 이것을
 S계의 관측자(갑)가 보았을 때, 병의 출생은 로렌츠 역변환식(II-14)에 의하여

$$x = \gamma(x' + vt') = 0 \quad \text{----- (IV-7)}$$

$$t = \gamma(t' + vx' / c^2) = 0$$

에서 발생한다. 병은 자신의 계에서 τ_0 년을 산다고 하였으므로, S'계에서 병의 사망은 $x' = 0$, $t' = \tau_0$ 에서 발생한다. 그리고 S계의 관측자인 갑에게는 병의 사망이

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma v \tau_0 \quad \text{----- (IV-8)}$$

$$t = \gamma(t' + vx' / c^2) = \gamma \tau_0$$

에서 일어난다.

그러므로 S'계에서는 병은 $x' = 0$, $t' = 0$ 에서 태어나 $x' = 0$, $t' = \tau_0$ 에서 사망하므로 자신의 계에서는 τ_0 년을 살게 된다. 그러나 S계, 즉 갑이 볼 때 병의 생애는 $x = 0$, $t = 0$ 에서 태어나서 $x = \gamma v \tau_0$, $t = \gamma \tau_0$ 에서 죽음을 맞이한다.

이와같이 갑의 입장에서 병의 생애는 $\gamma \tau_0$ 년을 사는 것으로 관측되어진다. 이것도 마찬가지로 특수 상대성이론에서의 시간팽창 효과이다.

지금까지 고찰한 갑, 을, 병 세사람의 생애를 요약하면 표 1.과 같다.

표 1.을 보는 바와 같이 S'계에 대해서 정지해 있는 관측자에게 갑의 생존기간은 $\gamma \tau_0$ 년을 사는 것처럼 보인다. 마찬가지로 S계에 대해서 정지해 있는 관측자에게 을과 병도 $\gamma \tau_0$ 년을 사는 것으로 관측되어 을과 병의 생존기간은 같다. 이것은 식(II-21)에서 나타낸 시간팽창 현상이다.

뿐만 아니라, S'계에서 동시에 갑, 을, 병 세사람이 태어났다고 가정하였지만, S계에서는 을과 병이 $\gamma v L_0 / c^2$ 의 시간 간격을 두고 출생한 것으로 관측되어졌다. 이것은 바로 특수 상대성 이론에서, 한 계에서 동시에 일어난 사건이 반드시 다른 계에서도 동시에 일어나는 것은 아니더라는 동시성의 상대성을 나타낸다.

표 1. 갑, 을, 병 세 사람의 출생 및 사망 좌표

사건	시공간 좌표	
	$S(x, t)$	$S'(x', t')$
갑의 출생	$(0, 0)$	$(0, 0)$
을의 출생	$(\gamma L_0, \gamma v L_0 / c^2)$	$(L_0, 0)$
병의 출생	$(0, 0)$	$(0, 0)$
갑의 사망	$(0, \tau_0)$	$(-\gamma v \tau_0, \gamma \tau_0)$
을의 사망	$(\gamma(L_0 + v\tau_0), \gamma(\tau_0 + vL_0/c^2))$	(L_0, τ_0)
병의 사망	$(\gamma v \tau_0, \gamma \tau_0)$	$(0, \tau_0)$

4. 임의의 순간에서 나이차 비교

을과 병이 우주선을 타고 여행하는 도중 임의의 순간에 병이 S계에 대해서 정지해 있는 관측자를 지나친다고 할 때, S계의 관측자는 을과 병의 나이와 위치를 어떻게 관측할까? 이점에 대해서 알아보겠다.

을과 병은 S'계에 대해서 정지해 있지만 임의의 순간에 S계의 관측자에게 측정되어지는 나이와 위치는 로렌즈 역변환식 (II-14)에 의하면 다음과 같다.

$$t_{\text{을}} = \gamma(t'_{\text{을}} + vx'_{\text{을}}/c^2) \text{ ----- (IV-9)}$$

$$x_{\text{을}} = \gamma(x'_{\text{을}} + vt'_{\text{을}}) \text{ ----- (IV-10)}$$

$$t_{\text{병}} = \gamma(t'_{\text{병}} + vx'_{\text{병}}/c^2) \text{ ----- (IV-11)}$$

$$x_{\text{병}} = \gamma(x'_{\text{병}} + vt'_{\text{병}}) \text{ ----- (IV-12)}$$

따라서 임의의 순간에 S계의 관측자에게 측정되어지는 을과 병의 나이차와 거리차는 다음과 같다.

$$t_{\text{을}} - t_{\text{병}} = \gamma[(t_{\text{을}}' - t_{\text{병}}') + v(x_{\text{을}}' - x_{\text{병}}')/c^2] \text{ ----- (IV-13)}$$

$$x_{\text{을}} - x_{\text{병}} = \gamma[(x_{\text{을}}' - x_{\text{병}}') + v(t_{\text{을}}' - t_{\text{병}}')] \text{ ----- (IV-14)}$$

여기서 $t_{\text{을}}'$, $t_{\text{병}}'$, $x_{\text{을}}'$, $x_{\text{병}}'$ 은 각각 S'계에서의 을과 병의 나이와 위치좌표이다. 그런데 우주선계 S'에서는 $t_{\text{을}}' - t_{\text{병}}' = 0$ 이고, $x_{\text{을}}' - x_{\text{병}}' = L_0$ 이므로 식(IV-13), (IV-14)는 다음과 같이 나타내어진다.

$$t_{\text{을}} - t_{\text{병}} = \gamma v L_0 / c^2, \quad x_{\text{을}} - x_{\text{병}} = \gamma L_0 \text{ ----- (IV-15)}$$

식 (IV-15)에 따르면 S계의 관측자에게는 을의 나이가 병의 나이보다 $\gamma v L_0 / c^2$ 만큼 많고, 을과 병의 거리차는 γL_0 라는 것을 보여준다.

이상의 결과들은 어쩌면 역설적으로 보일지도 모른다. 그러나 을과 병은 S계에 대해서 어떠한 가속도 없이 S'계에서 동일한 시간 동안 있었지만, 지구계(S계)에 대해서 정지해 있는 관측자에게는 나이가 다르게 관측되었다. 그러므로 여기에는 어떠한 역설도 없다. 왜냐하면, 을과 병의 상황이 정확히 동일한 것이 아니기 때문이다. S계에 대해서 일정한 속도 v 로 움직이고 있는 S'계에서, 그리고 을은 병보다 L_0 만큼 떨어진 곳에서 여행을 했기 때문이다. 또한 S'계에서 동시에 발생하는 사건이 S'계에서는 동시에 발생하지 않는다. 이러한 이유로 인해 S계의 관측자에게 을과 병의 나이가 다르게 관측되어지는 것이다.

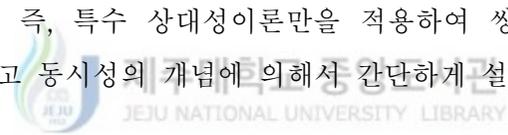
다시 말하면, 이것은 을과 병이 서로에 대해서 쌍둥이 역설의 전통적인 방법처럼 속도가 증가하거나 감소한다든지 또는 서로에 대해서 방향 전환 같은 어떠한 가속도를 경험하지도 않았지만, 그들은 서로에 대해서 나이차가 생기는 것을 경험할 수 있다는 것을 나타내고 있다. 이것은 가속도가 쌍둥이들에게서 나이차가 생기는 직접적인 원인이 아님을 보여준다고 하겠다.

이와 같은 결과는 프리스(Richard H. Price)와 그루버(Ronald P. Gruber)의 연구³⁰⁾ 및 보근(S. P. Boughn)의 연구³¹⁾에서, 동일한 가속도를 경험한 쌍둥이 Jane와 Dick에게 발생하는 나이차와 같은 것이다. 그러나 이들 연구와의 중요

한 차이점은, 동일한 가속도를 경험하게 한 보근의 설명 방법과는 달리 본 연구는 가속도가 없을 때의 쌍둥이 역설 설명이다.

즉, 본 연구자가 제안하는 방식은 가속도가 전혀 없고 단순히 정지해 있는 관측자의 시공간 좌표와 자신의 계에 대해서 등속운동하고 있는 한 계에 속한 두 사람의 시공간 좌표 중에서, 임의의 한 순간의 좌표를 로렌츠 변환식에 의하여 단순비교하는 것만으로도 두 사람의 나이차가 발생한다는 것을 보여줄 수 있는 설명 방법이다.

지금까지 고찰해 본 것과 같이 쌍둥이 역설을 학습함에 있어서 쌍둥이의 나이차가 생기는 원인은 전통적인 설명 방법에서 처럼 가속도가 직접적인 원인일 수도 있다. 그러나 이 방법은 일반 상대성이론까지 적용시켜야만 한다. 그렇지만, 로렌츠 변환식에 의해 좌표를 비교하는 본 연구 결과를 적용할 때는 가속도가 없더라도 즉, 특수 상대성이론만을 적용하여 쌍둥이 역설을 시간팽창과 길이수축 그리고 동시성의 개념에 의해서 간단하게 설명할 수 있다.



V. 결 론

일반적으로 소개되어지는 쌍둥이 역설에서 여행하는 쌍둥이는 가속이나 감속, 그리고 방향전환 같은 지구에 머물러 있는 쌍둥이가 경험하지 못하는 삶을 경험하게 된다. 이 것 때문에 쌍둥이 역설을 학습하는 학생들은 가속도가 쌍둥이들로 하여금 나이차를 발생시키는 직접적인 원인이라고 생각한다. 그러나 본 연구에서는 한 계에서 동시에 태어난 세 사람의 경우를 이용하여 하나의 상황을 설정한 뒤 이로부터 특수 상대성이론의 세 개념을 이끌어 내었다. 그리고 간단한 로렌츠 변환에 의하여 가속도가 없어도 세 사람이 나이차가 생기는 것을 보여줌으로서 가속도가 없어도 나이차가 발생함을 설명할 수 있었다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 지구에 고정된 계인 S계에 대해서 상대적으로 등속도 v 로 움직이고 있는 S'계에서 관찰했을 때 동시에 태어난 S계의 갑, S'계의 을과 병은 각각 자신의 속한 계에서 τ_0 년의 삶을 영위하나 상대방의 계에서 보았을 때는 각각 $\gamma\tau_0$ 년의 삶을 사는 것으로 관측된다. 이것은 특수 상대성이론의 시간팽창 현상으로 설명될 수 있다.

둘째, S'계에서 L_0 만큼 떨어진 거리에서 동시에 태어난 을과 병이 어떠한 가속도도 경험하지 않은 상태에서 같은 시간동안 여행하고 있을 때, S계에의 관측자에 의해 관측되는 을과 병의 나이와 위치는 을이 병보다 $\gamma v L_0 / c^2$ 보다 나이가 많고, 그들은 서로 γL_0 의 거리만큼 떨어진 것으로 관측된다. 이러한 현상은 가속도가 전혀 없이 단순히 정지해 있는 관측자가 자신의 계에 대해서 등속운동하고 있는 한 계에 속한 두 사람의 어느 한 순간의 좌표를 로렌츠 변환식에 의하여 단순 비교하는 것만으로도 두 사람의 나이차가 발생한다는 것을 보여줄 수 있다. 다시 말해 가속도가 쌍둥이들에게서 나이차가 생기는 직접적인 원인이 아님을 보여주고 있다.

셋째, 동일한 가속도를 경험한 쌍둥이들 경우에 관한 선행 연구와 본 연구에

서 어떠한 가속도도 없이 단순히 로렌즈 변환에 의한 좌표를 비교하는 것만으로도 나이차가 발생한다는 사실에 근거하여 볼 때, 가속도가 쌍둥이들로 하여금 나이차가 생기도록 하는 한 원인은 될 수 있을 것이다. 그러나 가속도만이 나이차를 발생시키는 유일한 원인은 아니라는 것을 알 수 있다.

그러므로 어디에서 나이차가 발생하고, 무엇이 두사람으로 하여금 나이차가 생기도록 만드는 것일까? 라는 질문은 아무런 의미가 없다. 단지 나이차는 여행하는 전과정에서 발생하고 가속도가 없어도 나이차는 생길 수 있다라는 것이다.

따라서 쌍둥이 역설을 학습함에 있어서 쌍둥이의 나이차가 생기는 것은 가속도가 직접적인 원인이라고 생각하기 전에 쌍둥이 역설은 시간팽창과 길이수축의 한 현상이라고 이해하는 것이 상대론 개념 학습에 도움이 될 것이다.



참고문헌

1. 동아원색세계대백과사전 17권, 동아출판사, pp.312~313 (1987)
2. 박종원 ; 상대론 기초 개념 변화에 있어서 초인지의 역할, 서울대학교 대학원, pp.20 (1991)
3. 박종원 ; 상대론 기초 개념 변화에 있어서 초인지의 역할, 서울대학교 대학원, pp.22~23 (1991)
4. S. P. Boughn ; The case of the identically accelerated twins, Am. J. Phys. 57(9), pp.791~792 (1989. 9)
5. S. P. Boughn ; The case of the identically accelerated twins, Am. J. Phys. 57(9), p.792 (1989. 9)
6. Wolfgang Rindler ; Introductions Special Relativity, Clarendon Press · Oxford, pp.12~35 (1981)
7. 정운혁 ; 현대물리학입문, 탐구당, pp.14~22 (1982)
8. 최상돈 ; 생명과학을 위한 현대물리학, 대왕사, pp.22~28 (1991)
9. Arthur Beiser 원저 ; 현대물리학 제4판, 회중당, pp.5~31 (1996)
10. 김종오 외 2인 역 ; Robert Eisberg, Robert Resnick 원저 ; 현대물리학, (주)교학사, pp.A-7~A-12 (1993)
11. 권재술, 김영삼 ; 동시성의 상대성을 이용한 길이 수축과 시간팽창 관계식의 유도, 한국물리학회지“물리교육”제16권 제1호, pp.1~4 (1998. 4.)
12. A. Einstein 저, 김종오 역 ; 상대성이론, 미래사, pp.35~51 (1992)
13. J. G. Tayler ; Special Relativity, Clarendon Press · Oxford, pp.12~35 (1975)

14. 고려대학교 · 서강대학교 물리학과 공역 ; Halliday · Resnick · Walker 일반 물리학2 개정4판, 범한서적주식회사, pp.1184~1193 (1996)
15. 서울대학교 물리교재편찬위원회 ; 새대학물리 I, 교문사, pp.338~339 (1998)
16. Ronald P. Gruber, Richard H. Price ; Zero time dilation in an accelerating rocket, Am. J. Phys. 65(10), p.979 (1997.10)
17. Wolfgang Rindler ; Introductions Special Relativity, Clarendon Press · Oxford, pp.34~35 (1981)
18. Arthur Beiser 원저 ; 현대물리학 제4판, 희중당, pp.15~17 (1996)
19. 조경철 ; 현대물리학, 이우출판사, pp.88~89 (1984)
20. 유종인 외 8인 공역 ; Tipler 현대물리학, 삼아사, pp.37~40 (1986)
21. 김태만 외 6인 편저 ; 일반물리학, 형설출판사, pp.170~171 (1984)
22. P. Langevin ; L'Evolution de l'Espace et du Temps, Scientia 10, pp.31~54 (1911)
23. Talal A. Debs and Michael L. G. Redhead ; The twin "paradox" and the conventionality of simultaneity, Am. J. Phys. 64(4), pp.384 (1996)
24. Talal A. Debs and Michael L. G. Redhead ; The twin "paradox" and the conventionality of simultaneity, Am. J. Phys. 64(4), p.385 (1996)
25. Talal A. Debs and Michael L. G. Redhead ; The twin "paradox" and the conventionality of simultaneity, Am. J. Phys. 64(4), pp.384~385 (1996)
26. Michael Weiss ; The twin paradox, http://www1.iastate.edu/~physics/scis/fag/twin_paradox.html
27. 이돈우 ; 시공간 도형을 이용한 특수상대론 교재, 서울대학교 대학원 (1989)
28. 이돈우 ; 시공간 도형을 이용한 특수상대론 교재, 서울대학교 대학원, pp.7~8, pp.13~14 (1989)

29. Ronald P. Gruber, Richard H. Price ; Zero time dilation in an accelerating rocket, Am. J. Phys. 65(10), pp.979~980 (1997.10)
30. Richard H. Price, Ronald P. Gruber ; Paradoxical twins and special relatives, Am. J. Phys. 64(8), pp.1006~1008 (1996. 8)
31. S. P. Boughn ; The case of the identically accelerated twins, Am. J. Phys. 57(9), pp.791~793 (1989. 9)



<Abstract>

A Study on the Twin Paradox Without the Acceleration

Kang, Chang-Wan

Physics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by Professor **Kang, Jeong-Woo**



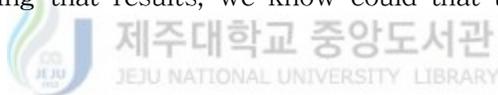
The students, who study the twin paradox in the special theory of relativity, usually think that a direct cause of twin's age difference is the acceleration.

Not considering the acceleration, but a case of using three person who are born simultaneously in one place, we could lead the three kind of notion of special theory of relativity, i.e., time dilation, length contraction and simultaneity and could explain a cause of twin's age difference.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of education in August, 1999.

In S' system, when Ul and Byung, who are born simultaneously and in the distance far away L_0 , travel for the same time in the state of unexperienced any acceleration, the age of Ul and Byung observed by an observer in S system that does uniform motion relative to S' system is that Ul is $\gamma v L_0 / c^2$ older than that in S' system and they are far from as γL_0 as each other.

Using the Lorentz transformation the coordinates of two people belonging to one system that does uniform motion relative to an observer' system and simply comparing that results, we know could that the age difference of two people occurs.



From these results, we could conclude that the acceleration is not unique cause of the age difference. Also without applying general theory of relativity, the twin paradox could be easily understand.

감사의 글

본 논문이 만들어지기까지 열성적으로 세심하게 지도를 해주신 저의 지도교수인 강정우 교수님께 깊은 감사를 드립니다.

그리고 그동안 많은 조언을 해주신 김규용 교수님, 김두철 교수님, 강영봉 교수님 그리고 강동식 선생님께 깊은 감사를 드립니다.

오늘이 있기까지 돌보아주신 부모님과 가족들, 그리고 옆에서 정성으로 도와준 아내와 사랑스런 나의 딸 지인에게 이 작은 결실을 전합니다.



1999년 6월