碩士學位請求論文

Riemann-Stieltjes 積分에 關한 研究

指導教授 李 世 烈

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

金 龍 澤

1988年度

Riemann-Stieltjes 積分에 關한 硏究

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

濟州大學校敎育大學院數學敎育專攻

提 出 者 金 龍 澤

指導敎授 李 世 烈

1988年 月 日

金龍澤의 碩士學位 論文을 認准함

1988年　　月　　日

主 審 ________________ ㊞

副 審 ________________ ㊞

副 審 ________________ ㊞

濟州大學校 教育大學院

목 차

I. 서　　론

수학이 하나의 학문으로 체계를 갖추게 된 것은 기원전 300년 경 유클리드가 원론 13권을 저술함으로써 비롯되었다. 고대의 수학은 수학을 다루는 방법이 정적이었기 때문에 그 이상 발전하기에는 여러 가지 어려운 점이 있었다.

그러나 17세기에 수학을 연구하는 방법에 있어서 일대 변혁이 이루어졌는데 데카르트(R. Descartes: 1596-1650)의 해석기하의 발견과 뉴우톤(S. I. Newton: 1642-1727), 라이프니쯔(G. W. Leibnitz: 1646-1716)의 미적분의 발견이 그것이다.

17세기 초에 페르마(Pierre De Fermat: 1601-1665)는 방정식 $y=f(x)$로 표현된 곡선 위의 임의의 점에서의 접선을 긋는 문제를 연구하고 또 그것을 이용하여 극대 극소 문제를 해결하는 방법을 발견하여 미적분학의 선구자가 되었으며, 뉴우톤의 스승인 바로우(Barrow: 1630-1677)도 접선의 문제를 연구하였다.

미적분학의 체계는 뉴우톤과 라이프니쯔에 의하여 수립되었다. 뉴우톤은 운동에 관한 문제를 생각하여 유율(流率: fluxion)이라는 개념을 도입하고, 가속도를 수식화하여 유명한 천체의 운동에 관한 이론을 만들었다.

라이프니쯔는 곡선에 접선을 긋는 문제와 직선군이 주어졌을 때 이들을 접선으로 갖는 곡선을 구하는 문제와의 관계를 조사하여 후자는 전자의 역이라는 관계를 생각해냈다.

그 후 미적분학은 오일러(L. Euler: 1707-1783), 라플라스(P. S. Laplace: 1749-1827), 코오시(A. L. Cauchy: 1789-1857) 등에 의하여 많은 응용과 더불어 정리된 체계로 성장하여 오늘에 이르렀다.

미적분은 곡선에 대한 접선을 찾는 일과 곡선 아래의 영역의 면적을 구하는 두 가지의 기하학적인 문제를 취급한다. 첫번째 것은 미분법으로 알려진 극한과정에

의하여 연구되고, 두번째 것은 적분법이라는 또 다른 극한 과정에 의하여 연구된다.

그런데 리이만(G. F. B. Riemann: 1826-1866)은 최초로 기하학적인 방법에서 탈피하여 해석적인 기초위에 새롭고 매우 상이한 방법을 채택하여 리이만적분의 개념을 확립시켰다.

리이만은 코오시와 같이 구간 〔a,b〕를 분점 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$에 의하여 n개의 부분 구간으로 분할하고, 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서의 함수 $f(x)$의 최대값을 M_k, 최소값을 m_k라 하고 상한을 U, 하한을 L라 하여

$$U=(x_1-x_0)M_1+(x_2-x_1)M_2+\cdots+(x_n-x_{n-1})M_n$$

$$L=(x_1-x_0)m_1+(x_2-x_1)m_2+\cdots+(x_n-x_{n-1})m_n$$

를 만들고 각 부분 구간의 길이가 한없이 작아지도록 분점의 갯수를 증가시킬 때 이 두 극한값이 일치하면 $f(x)$는 구간 〔a,b〕에서 적분가능이라고 정의하고 그 공통인 극한값을 "구간 〔a,b〕에서 취한 $f(x)$의 적분"이라고 했던 것이다.

그리하여 이에 두 극한값이 일치하기 위한 필요충분조건을 제시하였는데, 이에 의하면 구간 중에서 함수가 불연속점이 무한히 많을 때에도 적분가능할 때가 있으므로 리이만적분은 불연속점이 유한개라고 했던 코오시적분과 비교할 때 훨씬 발전된 것이라고 말할 수 있다. 리이만은 이 적분의 과정이 정의될 수 있는 구간위의 모든 함수를 고찰함으로써 그 범위를 넓혔다. 미적분의 기본 정리는 적분가능 함수의 제한된 집합에 대해서만 성립하는 결과이다.

이 리이만의 방법은 다른 사람들로 하여금 또 다른 적분법을 발명하게 했는데, 그 중에 중요한 것이 Stieltjes 적분과 Lebesque 적분이다.

본 논문에서는 문헌 연구를 통하여 Riemann－Stieltjes 적분 이론을 엄밀하게 전개하려는 것이 목적인 바, 그 정의를 명백히 하고, 여러 가지 성질을 재 구성하여 이를 증명하였다.

처음에 Riemann－Stieltjes 적분의 개념을 상적분과 하적분을 사용하여 정의하였으며 다음으로 Riemann－Stieltjes 합의 극한을 써서 정의한 후 이 두 경우가 같음을 보였다.

또 Riemann－Stieltjes 적분 $\int_a^b f d\alpha$에서 적분변수(integrator) α가 증가함수인 경우에 대하여 살펴 본 다음에 α가 유계함수인 경우에도 고찰하여 적분개념을 확장하여 전개하였다.

Ⅱ. 기본정의 및 성질

Riemann－Stieltjes 적분을 논의하기 위하여 몇가지 기본적인 정의 및 성질을 알아보기로 한다.

〔정의 2-1〕

폐구간 〔a,b〕의 한 분할(partition) p는

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

를 만족하는 유한개의 점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$들의 순서 집합 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots x_n\}$를 말한다.

이 때 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$라 한다.

또 〔a,b〕의 분할 전체의 집합을 P〔a,b〕로 나타내고, $p=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$가 〔a,b〕의 분할인 것을 $p \in P$〔a,b〕라고 쓴다.

〔정의 2-2〕

임의의 분할 $p_1, p_2 \in P$〔a,b〕에 대하여 $p_1 \subset p_2$일 때 즉 p_1의 모든 점이 p_2에 포함될 때 p_2를 p_1의 세분(refinement)이라 하고, $p=p_1 \cup p_2$로 정의되는 〔a,b〕의 분할 p를 p_1, p_2의 공통세분이라 한다.

분할 p_1의 세분 p_2는 p_1에 유한개의 점을 더해줌으로써 얻을 수 있다. 이를테면 구간 〔0,1〕의 두 분할 $p_1=\{0,\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ 1\}$, $p_2=\{0,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{4},\ 1\}$에서 p_2는 p_1의 세분이다.

〔정의 2-3〕

집합 X가 R의 부분집합일 때 (R는 실수의 집합) 함수 $f: X \to R$가 명제 "모든 $x \in X$에 대하여 $|f(x)| < M$을 만족하는 실수 M이 존재한다"를 만족할 때, f는 X

위에서 유계라하고, 이 때 f는 X위에서 정의된 유계함수(bounded function) 라고 한다.

〔정의 2-4〕

함수 f:〔a,b〕→R에서 임의의 $x,y\in$〔a,b〕에 대하여

$x<y$ 이면 $f(x)\leq f(y)$, $(f(x)\geq f(y))$일 때

f는 〔a,b〕 위에서 증가(감소) 한다고 말하고,

이 때 f는 〔a, b〕 위에서 정의된 증가함수(감소함수) 라고 한다.

그리고 〔a,b〕 위에서 정의된 증가함수와 감소함수를 통틀어서 단조함수라고 한다.

〔정의 2-5〕

임의로 주어진 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재하여 $0<|x-\alpha|<\delta$ 일 때 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 이 성립한다면 "x가 α에 한없이 가까이 갈 때 $f(x)$의 극한은 L이다"라고 말하고 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $f(x)\to L$ $(x\to\alpha)$로 나타낸다.

위의 조건을 다시 말하면, 개구간$(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$이 주어지면 개구간 $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$가 존재하여 $x\in(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$, $x\neq\alpha$일 때 $f(x)\in(L-\varepsilon,\ L+\varepsilon)$ 됨을 의미한다.

〔정의 2-6〕

X를 R의 부분집합이라 하고, α를 $\alpha\in$X라고 하자. 함수 f:X→R에 있어서 명제 "임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta>0$가 존재하여 $|x-\alpha|<\delta$이고 $x\in$X이면 $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ 이다"를 만족하면, f는 점 $x=\alpha$에서 연속이라고 한다. 특히 f가 모든 점 $x\in$X에서 연속이면 f는 X위에서 연속이라고 하고, 이 때 f는 X위에서 정의된 연속함수이다. 또 f가 점 α에서 연속이 아닐 때, f는 점 $x=\alpha$에서 불연속이라 한다.

〔정의 2-7〕

X가 R의 부분집합이고, 함수 $f:X\to R$가 명제 "임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재하여 $|x-y|<\delta$, $x,y\in X$이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 이다"를 만족하년 f는 X위에서 평등연속(Uniformly Continuous)이라고 한다.

여기서 δ는 ε과 함수 f에만 의존하고 x와 y에는 관계없이 결정되는 양수이다. 함수 f가 평등연속이면 f는 연속이지만 이의 역은 성립하지 않는다.

〔정의 2-8〕

함수 $f:[a,b]\to R$에 있어서, 점 $c\in[a,b]$에 대하여 적당한 $L\in R$이 존재하여 명제 "임의의 $\varepsilon>0$에 대하여, 이에 대응하는 적당한 $\delta>0$가 존재하여 $0<|x-c|<\delta$, $x\in[a,b]$이면 $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\right|<\varepsilon$ 이다"를 만족하면 즉 극한 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 가 존재하면, f는 점 $x=c$에서 미분가능하다고 하고, 이 때 극한값 L을 점 $x=c$에서의 미분계수라고 하며 이를 기호 $f'(c)$로 나타낸다. 특히 f가 모든 점 $x\in[a,b]$에서 미분가능하면 f는 구간 $[a,b]$ 위에서 미분가능하다고 하고, 이 때 f는 $[a,b]$ 위에서 정의된 미분가능함수(differentiable function)이다.

또 f가 점 c에서 미분가능하지 않을 때 f는 점 c에서 미분불가능하다고 한다.

〔정리 2-9〕 (평균값정리)

f는 $[a,b]$에서 연속인 실함수이고, (a,b)에서 미분가능하다고 할 때

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x)$$

를 만족하는 점 $x\in(a,b)$가 존재한다.

〔정의 2-10〕

실수 전체의 집합 R의 부분집합을 $X(\neq\phi)$라 하자 임의의 $x\in X$에 대하여 $x\le\alpha$이면 X는 위로 유계라 하고, 이 때 α를 X의 상계(upper bound)라 한다. 상계 중에서 최소인 것 즉, b가 X의 임의의 상계이면 $\alpha\le b$로 되는 X의 상계 α를 X의 최소상계(least upper bound) 또는 상한(supremum)이라 한다.

또 임의의 $x \in X$에 대하여 $c \le x$이면 X는 아래로 유계라 하고, 이 때 c를 X의 하계(lower bound)라 한다.

하계 중에서 최대인 것, 즉 d가 X의 임의의 하계이면 $d \le c$로 되는 X의 하계 c를 X의 최대하계(greatest lower bound) 또는 하한(infimum)이라 한다.

a, c가 각각 X의 상한, 하한인 것을 $lub\ X=a$, $glb\ X=c$

또는 $sup\ X=a$, $inf\ X=c$와 같이 나타낸다.

이를테면 $A=(1,5]$에서 $inf\ A=1$, $sup\ A=5$

Ⅲ. Riemann 적분

다음에는 폐구간 〔a,b〕 위에서 유계함수에 대한 Riemann 적분을 정의하기로 한다.

〔정의 3-1〕

함수 f:〔a, b〕→R가 유계함수 (반드시 연속함수일 필요는 없음)라 하자.

〔a, b〕의 임의의 분할 $p=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$에 대하여

$M_k=sup\{f(x):x\in[x_{k-1}, x_k]\}$

$m_k=inf\{f(x):x\in[x_{k-1}, x_k]\}$

라고 할 때, 다음과 같이 정의된 두 실수

$$U(p,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

$$L(p,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$(\triangle x_k = x_k - x_{k-1} \quad k=1,2,\cdots,n)$$

를 각각 분할 p에 대한 f의 Riemann 상합(Upper Riemann Sum), Riemann 하합(lower Riemann Sum)이라 한다.

이 때 $\overline{\int_a^b} fdx = inf\ \{U(p,f) : p\in P[a,b]\}$ ··· ①

$\underline{\int_a^b} fdx = sup\ \{L(p,f) : p\in P[a,b]\}$ ··· ②

로 나타내며, ①, ②의 좌변을 각각 〔a, b〕 위에서의 f의 Riemann 상적분(Upper Riemann integral), Riemann 하적분(lower Riemann integral)이라고 한다. 상적분과 하적분이 같을 때 즉 $\overline{\int_a^b} fdx= \underline{\int_a^b} fdx$일 때 f는 〔a, b〕 위에서 Riemann 적분가능(Riemann integrable) 또는 간단히 R-적분 가능이라 하고, 그 공통인 값을 $\int_a^b fdx$ 또는 $\int_a^b f(x)dx$로 나타내며, 이것을 〔a, b〕 위에서 f

의 Riemann 적분이라고 한다.

f가 $[a, b]$ 위에서 Riemann 적분 가능함을 $f \in R[a, b]$라고 쓴다.

즉 $R[a, b]$는 $[a, b]$ 위에서 Riemann 적분 가능한 함수 전체의 집합이다.

Ⅳ. Riemann－Stieltjes 적분

〔a, b〕 위에서 α에 관한 Riemann－Stieltjes 적분 $\int_a^b f d\alpha$에 대하여 적분변수(integrator) α가 증가함수(increasing function)인 경우와 유계함수(bounded function)인 경우에 대하여 고찰해 보기로 한다.

우리는 앞 절에서 f의 Riemann 적분을 정의할 때

$p=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}\in P$〔a, b〕에 대한

f의 상합: $\sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$

f의 하합: $\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$

를 생각하였다.

여기서 p의 각 소구간의 길이 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$을 어떤 증가함수 α:〔a, b〕→R를 이용하여 $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$로 변환시킨 다음 Δx_k를 $\Delta\alpha_k$로 바꾸어서 Riemann 적분에서와 같은 방법으로 적분을 정의하면 더 일반화된 적분 개념을 얻을 수 있다.

〔정의 4-1〕

함수 f:〔a, b〕→R가 유계이고, 함수 α:〔a, b〕→R가 증가한다고 하자.

이 때 임의의 분할 $p=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}\in P$〔a, b〕에 대하여 α에 관한 f의 Riemann－Stieltjes 상합 $U(p, f, \alpha)$와 Riemann－Stieltjes 하합 $L(p, f, \alpha)$를 다음과 같이 정의한다.

$$U(p,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle \alpha_k$$

$$L(p,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle \alpha_k$$

여기서 $M_k = sup\ \{f(x) : x \in [x_{k-1},\ x_k]\}$

$m_k = inf\ \{f(x) : x \in [x_{k-1},\ x_k]\}$

$\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}),\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$이다.

〔정의 4-2〕

f가 〔a, b〕 위에서 유계함수이고, α를 〔a, b〕 위에서 증가함수라고 하자.

이 때 α에 관한 Riemann－Stieltjes 상적분을

$\bar{\int}_a^b f d\alpha = inf\ \{U(p,\ f,\ \alpha) : p \in P[a,\ b]\}$라 하고,

α에 관한 Riemann－Stieltjes 하적분을

$\underline{\int}_a^b f d\alpha = sup\{\ L\ (p, f, \alpha)\ :\ p \in P[a, b]\}$

라고 정의한다. 이 때 $\bar{\int}_a^b f d\alpha = \underline{\int}_a^b f d\alpha$이면 f는 〔a, b〕 위에서 α에 관하여 Riemann－Stieltjes 적분가능 또는 간단히 RS－적분가능이라 하며 그 공통인 값을 $\int_a^b f d\alpha$, $\int_a^b f(x) d\alpha$ 또는 $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$로 나타내고, 이것을 f의 α에 관한 Riemann－Stieltjes 적분이라 한다.

f가 〔a, b〕 위에서 α에 관하여 Riemann－Stieltjes 적분 가능함을 $f \in R\alpha[a,\ b]$라고 쓴다. 즉, $R\alpha[a,\ b]$는 〔a, b〕 위에서 α에 관하여 Riemann－Stieltjes 적분 가능한 함수 전체의 집합이다.

(참고)

위의 정의에서 증가함수 $\alpha : [a,\ b] \to R$가 특히 $\alpha(x) = x$이면 $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ 이므로 Riemann－Stieltjes 적분은 Riemann 적분과 일치하게 된다.

따라서 Riemann－Stieltjes 적분은 Riemann 적분의 일반화된 적분이다.

(예제 1)

① $f : [a,\ b] \to R$가 유계함수이고, $\alpha : [a,\ b] \to R,\ \alpha(x) = k$ (k는 상수) 이면 $\int_a^b f d\alpha = 0$이다.

② $f:[a, b]\to R$, $f(x)=k$ (k는 상수)이고 $\alpha:[a, b]\to R$가 증가함수이면 $\int_a^b f d\alpha = k[\alpha(b)-\alpha(a)]$이다.

③ $f:[0, 1]\to R$, $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\in Q) \\ 0 & (x\in Q^c) \end{cases}$, Q는 유리수의 집합

$\alpha:[0, 1]\to R$, $\alpha(x)=x$이면 $f\notin R_\alpha[0, 1]$이다.

풀이:

① $[a, b]$의 임의의 분할을 $p=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라 하면

$$U(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} M_k(k-k)=0$$

$$L(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

$$=\sum_{k=1}^{n} m_k(k-k)=0$$

따라서 $\overline{\int_a^b} f d\alpha = sup\{U(p,f,\alpha) : p\in \boldsymbol{P}[a,b]\}=0$

$\underline{\int_a^b} f d\alpha = inf\{L(p,f,\alpha) : p\in \boldsymbol{P}[a,b]\}=0$

그러므로 $f\in R_\alpha[a,b]$이고 $\int_a^b f d\alpha = 0$

② $[a, b]$의 임의의 분할을 $p=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라 하면

$$U(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\}$$

$$=k\sum_{k=1}^{n}[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\}$$

$$=k[(\alpha(x_1)-\alpha(x_0))+(\alpha(x_2)-\alpha(x_1))+\cdots+(\alpha(x_n)-\alpha(x_{n-1})]$$

$$=k[(\alpha(x_n)-\alpha(x_0)]$$

$$=k[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

같은 방법으로

$$L(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

$$=k[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

따라서 $\overline{\int_a^b} fd\alpha = k[\alpha(b)-\alpha(a)]$ $\underline{\int_a^b} fd\alpha = k[\alpha(b)-\alpha(a)]$

그러므로 $f\in R_\alpha[a, b]$이고 $\int_a^b fd\alpha=k[\alpha(b)-\alpha(a)]$

③ [0, 1]의 임의의 분할을 $p=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$이라 하면

$$U(p, f, \alpha)=\sum_{k=1}^{n} M_k\triangle\alpha_k=\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\triangle\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\triangle\alpha_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

$$=\alpha(x_n)-\alpha(x_0)=\alpha(1)-\alpha(0)=1-0=1$$

$$L(p, f, \alpha)=\sum_{k=1}^{n} m_k\triangle\alpha_k=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\triangle\alpha_k=0$$

따라서 $\overline{\int_0^1} fd\alpha = inf\{U(p,f,\alpha) : p\in P[0,1]\}=1$

$\underline{\int_0^1} fd\alpha = sup\{L(p,f,\alpha) : p\in P[0,1]\}=0$

그러므로 $\overline{\int_0^1} fd\alpha \neq \underline{\int_0^1} fd\alpha$ 즉 $f\notin R_\alpha[0,1]$

〔보조정리 4-3〕 ([2])

P와 S가 [a, b]의 분할이고, S가 P의 세분이면($P\subset S$)

$U(s, f, \alpha)\leq U(p, f, \alpha)$, $L(p, f, \alpha)\leq L(s, f, \alpha)$

〔따름정리 4-4〕 ([2])

① P와 S가 [a, b]의 분할이면 $L(s, f, \alpha)\leq U(p, f, \alpha)$

② $\underline{\int_a^b} fd\alpha \leq \overline{\int_a^b} fd\alpha$

〔정리 4-5〕(적분 가능성에 대한 리이만 조건)

함수 f가 〔a, b〕 위에서 유계이고, α를 〔a, b〕 위의 증가함수라고 하자. 그러면 $f\in R\alpha$〔a, b〕이기 위한 필요충분 조건은 모든 $\varepsilon>0$에 대하여 〔a, b〕의 한 분할 P가 존재하여

$U(p, f, \alpha)-L(p, f, \alpha)<\varepsilon$ 이다.

증명:

$f\in R\alpha$〔a, b〕라고 가정하고, $\varepsilon>0$이 주어졌다고 하자.

그러면 〔a, b〕의 분할 S와 T가 존재하여

$$U(s, f, \alpha)-\overline{\int_a^b} f d\alpha<\frac{\varepsilon}{2},\quad \underline{\int_a^b} f d\alpha-L(T, f, \alpha)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(s, f, \alpha)<\overline{\int_a} f d\alpha+\frac{\varepsilon}{2},\quad \underline{\int_a^b} f d\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<L(T, f, \alpha)$$

지금 $P=S\cup T$라고 하면 P는 S, T의 세분이므로 〔보조정리 4-3〕에 의하여

$L(T, f, \alpha)\leq L(P, f, \alpha)\leq U(P\ f, \alpha)\leq U(s, f, \alpha)$

따라서 $U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)\leq U(S, f, \alpha)-L(T, f, \alpha)$

$$<\left(\overline{\int_a^b} f d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\underline{\int_a^b} f d\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

우변의 등식은 $\overline{\int_a^b} f d\alpha=\underline{\int_a^b} f d\alpha$로부터 얻는다. 역으로 $\varepsilon>0$, 〔a, b〕의 분할 p가 존재하여 $U(p, f, \alpha)-L(p, f, \alpha)<\varepsilon$ 라고 하면

$\overline{\int_a^b} f d\alpha=\inf\{U(p, f, \alpha): p\in \mathcal{P}[a, b]\}\leq U(p, f, \alpha)$

$\underline{\int_a^b} f d\alpha=\sup\{L(p, f, \alpha): p\in \mathcal{P}[a, b]\}\geq L(p, f, \alpha)$

이므로 $\overline{\int_a^b} f d\alpha-\overline{\int_a^b} f d\alpha\leq U(p, f, \alpha)-L(p, f, \alpha)<\varepsilon$

그러므로 위 〔따름정리 4-4〕의 ②에 의하여

모든 $\varepsilon>0$에 대하여 $0\leq\overline{\int_a^b} f d\alpha-\underline{\int_a^b} f d\alpha<\varepsilon$

따라서 $\overline{\int_a^b} f d\alpha=\underline{\int_a^b} f d\alpha$가 되어 $f\in R\alpha$〔a, b〕

(예제2) 함수 f:〔0, 1〕→R, $f(x)=\begin{cases}1 & (x\in Q)\\ 0 & (x\in Q^c)\end{cases}$

$\alpha:[0,\ 1]\to R,\ \alpha(x)=x$이면

임의의 분할 $p\in P[0,\ 1]$에 대하여

$U(p,\ f,\ \alpha)-L(p,\ f,\ \alpha)=1$이므로

〔정리 4-5〕에 의하여 $f\notin R\alpha[0.\ 1]$

〔정리 4-6〕

f가 $[a,\ b]$ 위에서 연속이고, α가 $[a,\ b]$ 위에서 증가함수이면 $f\in R\alpha[a,\ b]$이다.

증명:

만약 α가 $[a,\ b]$ 위에서 상수이면 결과는 자명하므로 $\alpha(a)<\alpha(b)$라 가정한다. $\varepsilon>0$라고 하자, f는 $[a,\ b]$ 위에서 연속이므로 f는 $[a,\ b]$ 위에서 평등 연속이다.

따라서 $\delta>0$가 존재하여

$$|s-t|<\delta \text{이면 } |f(s)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}$$

$p=\{x_0,\ x_1,\ \cdots x_n\}$를 $x_k-x_{k-1}<\delta\ (k=1,2,\cdots,n)$

인 한 분할이라고 하자.

그러면 $M_k-m_k=sup\{f(x)\ :\ x\in[x_{k-1},\ x_k]\}-inf\{f(x)\ :\ x\in[x_{k-1},\ x_k]\}$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

따라서
$$\begin{aligned} U(p,\ f,\ \alpha)-L(p,\ f,\ \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} M_k\triangle\alpha_k-\sum_{k=1}^{n} m_k\triangle\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle\alpha_k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}\sum_{k=1}^{n}\triangle\alpha_k \\ &= \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}[\alpha(b)-\alpha(a)] \\ &= \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \end{aligned}$$

이므로 〔정리 4-5〕에 의하여 $f\in R\alpha[a,\ b]$

(예제3)

함수 $f:[0,\ 1]\to R$와 증가함수 $\alpha:[0,\ 1]\to R$가 각각

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x\leq \frac{1}{2})\\ 1 & (\frac{1}{2}< x\leq 1)\end{cases},\quad \alpha(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x< \frac{1}{2})\\ 1 & (\frac{1}{2}\leq x\leq 1)\end{cases}$$

와 같이 정의되었을 때,

f는 $[0,\ 1]$ 위에서 α에 관하여 RS−적분가능한가를 조사하여라.

풀이:

임의의 분할 $p=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}\in P[0,\ 1]$에 대하여

$$U(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} M_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=1\cdot[\alpha(1)-\alpha(0)]=1\cdot(1-0)=1$$

$$L(p,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]=0\cdot[\alpha(1)-\alpha(0)]=0\cdot(1-0)=0$$

여기서 $M_k=sup\ \{f(x):x\in[0,\ 1]\}$

$m_k=inf\ \{f(x):x\in[0,\ 1]\}$

$$\overline{\int_0^1} fd\alpha=1 \quad \underline{\int_0^1} fd\alpha=0$$

따라서 f는 $[0,\ 1]$ 위에서 α에 관하여 RS−적분 가능하지 않다.

즉, $f\notin R\alpha[0,\ 1]$

(참고)

Riemann 적분에 대한 대부분의 성질이 Riemann−Stieltjes 적분에 대해서도 성립한다. 그러나 모든 성질이 다 성립하는 것은 아니다. 이를테면 위 (예제3) 에서의 f는 분명히 $[0,\ \frac{1}{2}]$ 위에서는 α에 관하여 RS−적분가능하고, $\int_0^{\frac{1}{2}} fd\alpha=0$ 이다. 또한 $[\frac{1}{2},\ 1]$ 위에서도 α에 관하여 RS−적분가능하고 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} fd\alpha=0$이지만 f는 $[0,\ 1]$ 위에서 적분 가능하지 않으므로 Riemann 적분에 대한 정리 $\int_a^b fdx=\int_a^c fdx+\int_c^b fdx$와 서로 어긋남을 알 수 있다.

다음에는 α가 $[a, b]$ 위에서 증가함수일 때 집합 $R\alpha[a, b]$의 성질을 고찰해 보기로 한다.

〔정리 4-7〕

α가 $[a, b]$ 위에서 증가함수라고 하자.

$f \in R\alpha[a, b]$이면 $[a, b]$ 위의 모든 폐부분 구간 $[c, d]$에 대하여 $f \in R\alpha[c, d]$이고, 모든 $c \in (a, b)$에 대하여

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$$

증명:

$c \in (a, b)$, p를 $[a, b]$의 한 분할이라고 하자.

$p^* = P \cup \{c\}$라고 놓으면

$p_1 = p^* \cap [a, c]$와 $p_2 = p^* \cap [c, b]$는 각각 $[a, c]$와 $[c, b]$의 분할이다.

그러면
$$\begin{aligned} U(p, f, \alpha) &\geq U(p^*, f, \alpha) \\ &= U(p_1, f, \alpha) + U(p_2, f, \alpha) \\ &\geq \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha \end{aligned}$$

이므로 $\int_a^b f\,d\alpha \geq \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha$

같은 방법으로 $\int_a^b f\,d\alpha \leq \underline{\int_a^c} f\,d\alpha + \underline{\int_c^b} f\,d\alpha$

그러므로
$$\begin{aligned} \int_a^b f\,d\alpha &\geq \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \overline{\int_c^b} f\,d\alpha \\ &\geq \overline{\int_a^c} f\,d\alpha + \underline{\int_c^b} f\,d\alpha \\ &\geq \underline{\int_a^c} f\,d\alpha + \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \geq \int_a^b f\,d\alpha \end{aligned}$$

따라서 $\overline{\int_a^c} f\,d\alpha = \underline{\int_a^c} f\,d\alpha$ 그리고 $\overline{\int_c^b} f\,d\alpha = \underline{\int_c^b} f\,d\alpha$

이므로 $f \in R\alpha[a, c] \cap R\alpha[c, b]$

또한 $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$ 이다.

〔c, d〕를 〔a, b〕의 폐부분구간이라고 하면

위의 결과에 의하여 $f \in R\alpha$〔a, d〕이고, 위의 결과를 한번 더 적용하면 $f \in R\alpha$〔c, d〕를 얻는다.

〔정리 4-8〕(〔1〕)

f를 〔a, b〕 위에서 유계인 함수라 하고, α를 〔a, b〕 위의 증가함수라고 하자.

〔a, b〕의 모든 x에 대하여 $m \leq f(x) \leq M$라고 가정한다.

만일, $f \in R\alpha$〔a, b〕이고, g가 〔m, M〕 위에서 연속이면 $g \circ f \in R\alpha$〔a, b〕

〔정리 4-9〕 (〔1〕)

α를 〔a, b〕위의 증가함수라고 하자.

f와 g가 $R\alpha$〔a, b〕에 속하고 $c \in R$ (실수) 이면

① $cf \in R\alpha$〔a, b〕이고 $\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$

② $f+g \in R\alpha$〔a, b〕이고 $\int_a^b (f+g)\, d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$

③ $f.g \in R\alpha$〔a, b〕

④ 모든 $x \in$〔a. b〕에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 이면 $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$

⑤ $|f| \in R\alpha$〔a. b〕이고 $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$

〔정리 4-10〕(적분의 평균값 정리) (〔1〕)

f가 〔a, b〕 위에서 연속이고, α가 〔a, b〕 위에서 증가함수이면

$c \in$〔a, b〕가 존재하여 $\int_a^b f d\alpha = f(c)\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$

다음 정리는 어떤 경우에는 Riemann−Stieltjes 적분이 Riemann 적분의 경우로 환원됨을 보여주고 있다.

〔정리 4-11〕

f가 〔a, b〕 위에서 유계함수이고, α가 〔a, b〕 위에서 증가함수이며 미분가능한 함수라 하자. $\alpha' \in R[a, b]$일 때 $f \in R\alpha[a, b]$되기 위한 필요충분조건은 $f\alpha' \in R[a, b]$이고, $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$이다.

증명:

$\varepsilon > 0$가 주어졌을 때 〔정리 4-5〕를 α'에 적용하면 $\alpha' \in R[a, b]$이므로

$U(p, \alpha') - L(p, \alpha') < \varepsilon$ ····①

을 만족하는 〔a, b〕의 분할 $p = \{x_0, x_1 \cdots\cdots, x_n\}$이 존재한다.

평균값 정리에 의하여 $\triangle\alpha_k = \alpha'(t_k)\triangle x_k$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$를 만족하는 점 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$가 존재한다.

만일 $S_k \in [x_{k-1}, x_k]$라고 하면 ①에 의하여

$\sum_{k=1}^{n} |\alpha'(S_k) - \alpha'(t_k)| \triangle x_k \le U(p, \alpha') - L(p, \alpha') < \varepsilon$ ····②

$M = \sup |f(x)|$라고 놓으면 $\sum_{k=1}^{n} f(S_k)\triangle\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} f(S_k)\alpha'(t_k)\triangle x_k$이므로

②에 의하여 다음 식이 성립한다.

$|\sum_{k=1}^{n} f(S_k)\triangle\alpha_k - \sum_{k=1}^{n} f(S_k)\alpha'(S_k)\triangle x_k| \le M\varepsilon$ ····③

특히 $S_k \in [x_{k-1}, x_k]$인 모든 점에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} f(S_k)\triangle\alpha_k \le U(p, f\alpha') + M\varepsilon$ 이므로 $U(p, f, \alpha) \le U(p, f\alpha') + M\varepsilon$

같은 방법으로 ③에 의하여

$U(p, f\alpha') \le U(p, f, \alpha) + M\varepsilon$

따라서 $|U(p, f, \alpha) - U(p, f\alpha')| \le M\varepsilon$ ····④

지금 p를 임의의 세분으로 대치하더라도 ①은 성립함을 알 수 있다.

그러므로 ④도 성립한다.

따라서 $|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx| \le M\varepsilon$ 이다. 그런데 ε은 임의이므로 임의의 유계함수 f에 대하여 $\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$

같은 방법으로 $\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$를 ③으로부터 얻을 수 있다.

그러므로 $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$

〔따름 정리 4-12〕 (미적분의 기본정리)

f가 〔a, b〕 위에서 연속이고, 미분가능이라 하자.

$f' \in R$ 〔a, b〕이면 $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

증명:

〔정리 4-11〕에서

α를 f로, f를 상수 1로 바꾸면 $f(b) - f(a) = \int_a^b 1 df = \int_a^b f'(x)\,dx$

여기서 $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$로 표시하기로 하면

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

(예제 4)

$$\begin{aligned}\int_1^3 [x]dx^2 &= \int_1^3 [x]2x\ dx \\ &= \int_1^2 [x]2x dx + \int_2^3 [x]2x\ dx \\ &= \int_1^2 1.\ 2x\ dx + \int_2^3 2.2x\ dx \\ &= 13\end{aligned}$$

단, $[x]$는 x보다 작거나 x와 같은 최대정수를 나타낸다.

V. Rimann-Stieltjes 합

위에서 우리는 Riemann－Stieltjes 적분을 Riemann－Stieltjes 상적분과 Riemann－Stieltjes 하적분을 이용하여 정의하였는데 이것은 다음과 같이 "Riemann－Stieltjes 합"의 극한을 써서 정의한 것과 실제로 일치함을 보이기로 한다.

〔정의 5-1〕

f와 α를 〔a, b〕 위의 유계함수라 하자.

$P=\{x_0, x_1, \cdots\cdots x_n\}$를 〔a, b〕의 한 분할이라고 하면

$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \cdots\cdot n$이 되는 점들의 집합 $T=\{t_1, t_2, \cdots\cdot t_n\}$에 대하여 합 $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\triangle\alpha_k$를 분할 p와 점들 T에 대한 f의 α에 대한 Riemann－Stieltjes 합이라고 한다.

이것을 $S(p, f, T)$로 나타낸다.

즉 $S(p, f, T)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\triangle\alpha_k =\sum_{k=1}^{n} f(t_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$

f, α, p를 〔정의 5-1〕과 같다고 하고 α를 〔a, b〕 위의 증가함수라고 하면 분명히 임의의 점들 T에 대하여 $L(p,f, \alpha)\le S(p, f, T)\le U(p, f, \alpha)$이다.

따라서 상합과 하합이 적분값에 접근하면 Riemann－Stieltjes 합도 적분값에 접근한다.

다음 경우는 그 경우를 보인 것이다.

〔정리 5-2〕

f를 〔a, b〕 위의 유계함수, α를 〔a, b〕 위의 증가함수라고 하자.

이 때 $f\in R\alpha$〔a, b〕가 될 필요충분조건은 "수 I가 존재하여 모든 $\varepsilon>0$에 대하여

분할 p가 존재하여 p^*가 p의 세분이면 ($p^* \supset p$), 임의의 점들 T에 대하여

$| S(p^*, f, T) - I| < \varepsilon$ 이다"

만일 $f \in R\alpha[a, b]$이면 $I = \int_a^b f d\alpha$이다.

증명:

$f \in R\alpha[a, b]$라 가정하고, $\varepsilon > 0$라 하자. [정리 4-5]에 의하여 한 분할 p가 존재하여 $U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon$ 이다.

p^*가 p의 세분이므로 $L(p, f, \alpha) \leq L(p^*, f, \alpha) \leq U(p^*, f, \alpha) \leq U(p, f, \alpha)$

$U(p^*, f, \alpha) - L(p^*, f, \alpha) \leq U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon$

그런데 $L(p^*, f, \alpha) \leq S(p^*, f, T) \leq U(p^*, f, \alpha)$ ····①

이고 또한 $L(p^*, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq U(p^*, f, \alpha)$ ····②

①-②하면 임의의 점들 T에 대하여

$$L(p^*, f, \alpha) - U(p^*, f, \alpha) \leq S(p^*, f, T) - \int_a^b f d\alpha$$
$$\leq U(p^*, f, \alpha) - L(p^*, f, \alpha)$$

따라서 $|S(P^*, f, T) - \int_a^b f d\alpha| \leq U(p^*, f, \alpha) - L(p^*, f, \alpha) < \varepsilon$ 이 된다.

또한 $I = \int_a^b f d\alpha$

역으로 정리의 조건들이 성립한다고 가정하고 $\alpha(b) > \alpha(a)$라 가정하자.

[a, b]의 분할 $p = \{x_0, x_1, \cdots x_n\}$이 존재하여 모든 점들 T에 대하여

$|S(p, f, T) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ 이 된다.

각 k, $1 \leq k \leq n$에 대하여 $t_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$가 존재하여 $M_k - \frac{\varepsilon}{4[\alpha(b) - \alpha(a)]} < f(t_k^*)$이다.

따라서 $U(p, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{4} = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k - \frac{\varepsilon}{4[\alpha(b) - \alpha(a)]}\right) \triangle\alpha_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*) \triangle\alpha_k$

$T^* = [t_1^*, t_2^*, \cdots, t_n^*]$라고 하면 $U(p, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{4} \leq S(p, f, T^*)$ ····①이며

같은 방법으로 점들 T^{**}가 존재하여 $S(p, f, T^{**}) \leq L(p, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{4}$ ····②

①, ②에 의하여

$$U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) \leq [S(p, f, T^*) + \frac{\varepsilon}{4}] + [-S(p, f, T^*) + \frac{\varepsilon}{4}]$$
$$= S(p, f, T^*) - S(p, f, T^{**}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\leq |S(p, f, T^*) - S(p, f, T^{**})| + \frac{\varepsilon}{2}$
$= |[S(p, f, T^*) - I] + [I - S(p, f, T^{**})]| + \frac{\varepsilon}{2}$
$\leq |S(p, f, T^*) - I| + |I - S(p, f, T^{**})| + \frac{\varepsilon}{2}$
$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

즉 $U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon$

따라서 〔정리 4-5〕에 의하여 $f \in R\alpha[a, b]$

위 정리는 한 분할을 세분으로 바꾸는 것이 Riemann-Stieltjes 합을 수렴하게 하는 방법임을 보여주고 있다.

다음 정의는 Riemann-Stieltjes 합의 수렴을 기술하는 또 다른 방법이다.

〔정의 5-3〕

① $p = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$을 〔a, b〕의 한 분할이라고 하자.

이 때 $\max\{|x_k - x_{k-1}| : k = 1, 2, \cdots, n\}$를 분할 p의 norm이라 하고 $||p||$로 나타낸다.

즉, $||p|| = \{|x_k - x_{k-1}| : k = 1, 2, \cdots, n\}$

② f와 α가 〔a, b〕 위에서 유계함수라고 하자.

모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$가 존재하여 〔a, b〕의 norm $||p|| < \delta$가 되는 모든 분할 p와 임의의 점들 T에 대하여

$|S(p, f, T) - I| < \varepsilon$이면 I를 $||p|| \to 0$일 때 리만합의 극한이라 하고,

$\lim_{||p|| \to 0} S(p, f, T) = \lim_{||p|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \triangle \alpha_k = I$ 와 같이 나타낸다.

(참고)

위의 Roemann-Stieltjes 합의 수렴은 Roemann-Stieltjes 적분의 존재와 동치가 아니다. 즉 $\int_a^b f d\alpha$ 존재 $\overset{\not\rightarrow}{\leftarrow} \lim_{||p|| \to 0} S(p, f, T)$ 존재

이를테면 $f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$, $\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$

라 하고, $p=\{-1, 0, 1\}$라 하면 $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$이고

$$U(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{2} M_k \triangle\alpha_k$$
$$=M_1 \triangle\alpha_1 + M_2 \triangle\alpha_2$$
$$=M_1[\alpha(x_1)-\alpha(x_0)]+M_2[\alpha(x_2)-\alpha(x_1)]$$
$$=M_1[\alpha(0)-\alpha(-1)]+M_2[\alpha(1)-\alpha(0)]$$
$$=0(0-0)+1(1-0)=1$$

같은 방법으로 $L(p, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{2} m_k \triangle\alpha_k = 1$

따라서 $\int_{-1}^{1} f d\alpha = 1$이고 $f \in R_\alpha[-1, 1]$

그러나 $\lim_{\|p\|\to 0} S(p, f, T)$는 존재하지 않는다.

왜냐하면 만일 $p^* \supset p=\{-1, 0, 1\}$라 하면

$1=L(p, f, \alpha) \le L(p^*, f, \alpha) \le S(p^*, f, T) \le U(p^*, f, \alpha) \le U(p, f, \alpha)=1$ 이므로 $S(p^*, f, T)=1$이다.

따라서 임의로 작은 norm을 가지면서 $S(p^*, f, T)=1$ 되는 $[a, b]$의 분할 p^*들이 존재한다.

다른 한편 만일 $p^*=\{-\frac{n}{n}, -\frac{n-1}{n}, \cdots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\}$ 이고 구간 $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ 내의 점 $t=-\frac{1}{n}$을 택하면 $S(p^*, f, T)=0$이고, $\|p^*\|=\frac{2}{n}$ 이다.

따라서 임의로 작은 norm을 가지면서 $S(p^*, f, T)=0$이 되는 $[a, b]$의 분할 p^*들이 존재한다. 그러므로 $\lim_{\|p\|\to 0} S(p, f, T)$는 존재하지 않는다.

〔정리 5-4〕

f가 $[a, b]$ 위의 유계함수이고, α가 $[a, b]$ 위의 증가함수라고 하자.
$\lim_{\|p\|\to 0} S(p, f, T)$가 존재하면 $f \in R\alpha[a, b]$이고, $\lim_{\|p\|\to 0} S(p, f, T) = \int_a^b f d\alpha$

증명 :

$\varepsilon>0$라고 하자. $\delta>0$가 존재하여 $\|p\|<\delta$이면 $|S(p, f, T)-I|<\varepsilon$

p를 $\|p\|<\delta$인 $[a, b]$의 한 분할이라고 하자.

$p^* \supset p$이면 $\|p\|<\delta$이므로 $|S(p^*, f, T)-I|<\varepsilon$

따라서 〔정리 5-2〕에 의하여 $f \in R\alpha[a, b]$이고 $I=\int_a^b f d\alpha$

〔정리 5-5〕 (〔1〕)

α를 $[a, b]$ 위의 증가함수라고 하고, $f \in R\alpha[a, b]$라 가정하자.

f 또는 α가 $[a, b]$ 위에서 연속이면 $\int_a^b f d\alpha = \lim_{\|p\| \to 0} S(p, f, T)$

〔따름정리 5-6〕 (〔1〕)

$f \in R[a, b]$이면 $\lim_{\|p\| \to 0} S(p, f, T) = \int_a^b f dx$

다음에는 RS-적분 $\int_a^b f d\alpha$를 α가 임의의 함수 (반드시 증가함수는 아님)의 경우에 대하여 확장해보기로 한다.

〔정의 5-7〕

f와 α가 $[a, b]$ 위에서 유계함수라 하자.

명제 "수 I 가 존재하여 모든 $\varepsilon>0$에 대하여 $[a, b]$의 분할 p가 존재하여 p^*가 p의 세분($p^* \supset P$)이면, 모든 점들 T에 대하여 $|S(p^*, f, T)-I|<\varepsilon$이 된다"가 만족되면 f는 $[a, b]$ 위에서 α에 관하여 RS-적분가능이라고 하고, $f \in R\alpha[a, b]$로 나타낸다. 이 수 I 를 $\int_a^b f d\alpha$로 나타낸다.

〔정리 5-8〕

f, g, α를 $[a, b]$ 위의 유계함수라 하고, $c \in R$라 하면 f, $g \in R\alpha[a, b]$일 때

① $cf \in R\alpha[a, b]$이고, $\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$

② $f+g \in R\alpha[a, b]$이고, $\int_a^b (f+g) d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$

증명: ② $\varepsilon>0$라 하자.

[a, b]의 분할 p_1가 존재하여 $p^*\supset p_1$이면 $|S(p^*, f, T)-\int_a^b f d\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

또 [a, b]의 분할 p_2가 존재하여 $p^*\supset p_2$이면 $|S(p^*, g, T)-\int_a^b g d\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$

$p=p_1\cup p_2$라 하고 $p^*\supset p$ 이면 $|S(p^*, f+g, T)-(\int_a^b f d\alpha+\int_a^b g d\alpha)|$

$=|\sum_{k=1}^{n}(f+g)(t_k)\triangle\alpha_k-(\int_a^b f d\alpha+\int_a^b g d\alpha)|$

$=|[\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\triangle\alpha_k-\int_a^b f d\alpha]+[\sum_{k=1}^{n}g(t_k)\triangle\alpha_k-\int_a^b g d\alpha]|$

$\leq|\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\triangle\alpha_k-\int_a^b f d\alpha|+|\sum_{k=1}^{n}g(t_k)\triangle\alpha_k-\int_a^b g d\alpha|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

그러므로 $f+g\in R\alpha[a, b]$이고, $\int_a^b (f+g)d\alpha=\int_a^b f d\alpha+\int_a^b g d\alpha$

[정리 5-9] (부분 적분)

f와 α를 [a, b] 위의 유계함수라 하자.

$f\in R\alpha[a, b]$이면 $\alpha\in R_f[a, b]$이고, $\int_a^b f d\alpha=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b \alpha df$

증명: $\varepsilon>0$라고 하자.

[a, b]의 분할 p가 존재하여 $p^*\supset p$이면 $|S(p^*, f, T)-\int_a^b f d\alpha|<\varepsilon$ 이 된다.

$S(p^*, \alpha, T^{**})=\sum_{k=1}^{n}\alpha(t_k)f[(x_k)-f(x_{k-1})]\cdots$①

을 $p^*\supset p$일 때 Riemann-Stieltjes 합이라고 하자. 그러면

$f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)=[f(x_1)\ \alpha(x_1)-f(x_0)\ \alpha(x_0)]$

$+\cdots\cdots\cdots+[f(x_n)\alpha(x_n)-f(x_{n-1})\alpha(x_{n-1})]$

$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\alpha(x_k)-\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1})\cdots$②

②-①에 하면

$f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(p^*, \alpha, T^{**})$

$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)[\alpha(x_k)-\alpha(t_k)]+\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})[\alpha(t_k)-\alpha(x_{k-1})]$

$=S(p^{**}, f, T^{***})\cdots\cdots$③

여기서 $p^{**}=p^*\cup\{t_1, t_2, \cdots t_n\}$이다. $p^{**}\supset p$이므로 ③에 의하여

$|S(p^*, \alpha, T^{**}) - [f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f d\alpha]|$

$= |S(p^*, \alpha, T^{**}) - f(b)\alpha(b) + f(a)\alpha(a) + \int_a^b f d\alpha]|$

$= |-S(p^{**}, f, T^{***}) + \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon$

그러므로 $|S(p^*, \alpha, T^{**}) - I| < \varepsilon$ 이고 $\alpha \in R_f[a, b]$이다.

이 때 $I = \int_a^b \alpha df$

즉 $f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f d\alpha = \int_a^b \alpha df$

따라서 $\int_a^b f d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha df$

(예제 5) 위 결과에 의하여

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\sin x)$

$= \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0.\ \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ d(\sin x)$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ d(\sin x) = 1$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ d(\sin x) = \frac{1}{2}$

〔따름정리 5-10〕 (〔 I 〕)

f, α_1, α_2를 [a, b] 위의 유계함수라 하고 c를 실수라고 하자.

$f \in R\alpha_1[a, b] \cap R\alpha_2[a, b]$이면

① $f \in R\alpha_1 + \alpha_2[a, b]$이고 $\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$

② $f \in Rc\alpha_1[a, b]$이고 $\int_a^b f d(c\alpha_1) = \int_a^b cf d\alpha_1$

VI. 결　론

Riemann-Stieltjes 적분은 확률론과 물리학 등에 많이 이용되고 있으며, 그것은 길이(length) 이외에 무게(weight) 를 허용함으로써 Riemann 적분을 일반화하여 그 개념을 얻을 수 있다.

본 논문에서는 Riemann-Stieltjes 적분의 정의, 적분가능성 및 계산 방법에 대하여 고찰하였고 그 외 여러가지 성질에 대해서도 조사하였다. 특히 본 논문에서 고찰한 결과를 요약하여 정리하면 다음과 같다.

첫째, Riemann-Stieltjes 적분의 개념을 상적분과 하적분을 사용하여 Riemann 적분을 확장하면 Riemann 적분에 관한 대부분의 성질이 Riemann-Stieltjes 적분에 관해서도 성립하지만, 모든 성질이 성립하는 것은 아니다. 예를 들면 $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$는 성립하지만, $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$는 성립하지 않는다.

따라서 이와 같은 성질을 만족하기 위해서는 조건을 강화하면, 이 성질이 보존됨을 밝혔다.

둘째, 어떤 경우에는 Riemann-Stieltjes 적분이 Riemann 적분의 경우로 환원됨을 〔정리 4-11〕에 의하여 알 수 있고, 미적분학의 기본정리가 성립함을 확인했다.

세째, Riemann-Stieltjes 합을 사용해서 Riemann-Stieltjes 적분을 정의하면 Riemann-Stieltjes 합의 수렴은 Riemann-Stieltjes 적분의 존재와 동치가 아님을 예를 들어 설명했다. 그러나 Riemann-Stieltjes 합이 존재하면, Riemann-Stieltjes 적분이 존재해서, Riemann-Stieltjes 합을 사용하여 정의한 것은 Riemann-Stieltjes 상적분과 하적분을 사용하여 정의한 것과 실제로 일치함을 〔정리 5-4〕에서 밝혔다.

네째, 적분변수 α가 증가함수가 아닌 경우에도 Riemann-Stieltjes 합의 개념을 근거로 하여 적분이론을 전개하면 부분적분의 개념을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

〔1〕 W.E. Phaffenberger,

Foundations of Mathematical Analysis. 1981.

〔2〕 Walter Rudin,

Principles of Mathematical Analysis. 1976.

〔3〕 Robert G. Bartle,

The elements of Real Analysis. 1976.

〔4〕 Tom.M.Apostol,

Mathematical Analysis. 1974.

〔5〕 程東明. 趙升濟,

實解析學概論. 1983.

Abstract

A Study on the Riemann-Stietljes Integral

Kim Yong-Taik

Majored in Mathematics Education

Graduate School of Education

Cheju National University, Cheju Korea

Supervised by Professor, Lee Sei-Yeol

The purpose of this paper is to clearly examine the Riemann-Stieltjes Integral by studying its literature.

First, this paper defines Riemann-Stieltijes integral by introducing such terms as the upper Riemann-Stieltjes integral and the lower Riemann-Stieltjes integral.

Second, this thesis defines the Riemann-Stieltjes integral by using Riemann-Stieltijes sums.

Third, this study verifies that the two cases are equal.

Finally, we have not only studied the Riemann-Stieltjes integral $\int_a^b f d\alpha$ with respect to an increasing integrator but also extended the definition of the Riemann-Stieltjes integral to arbitrary (not necessarily increasing) functions α.