국문초록

Lakatos의 방법론을 초등수학에 적용한 자료 개발

김 현 주

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교사 최 근 배

제7차 초등수학 교육과정에서는 학습자의 수학 학습 능력에 맞춘 능동적인 학습 활동으로 수학 학습에 대한 흥미와 자신감을 증대시키며 수학적 사고를 확장시키고 수학적 힘을 키우게 하는데 그 목적이 있다. 수학적 힘을 기르기 위해서는 학생들이 수학적 탐구과정을 통해 수학화하는 과정을 경험해야 한다. 문제를 통해 추측하고 검증하며 수학에 대한 의사소통을 통해서 수학적 힘을 기를 수 있다.

Lakatos는 수학적 지식은 추측이며 그것은 수학적 발견의 논리에 따라 탐구되고 학습되어야 한다는 발견적(준경험적) 방법론을 주장하였다. 다시 말해서, 수학적 지식은 반박 가능한 잠정적으로 참인 추측이다. Lakatos는 반례에 대한 반박의 방법으로 괴물배제법, 예외배제법, 괴물조정법, 보조정리 합체법을 제시하였다.

학생들은 수학적인 힘을 기르기 위해 문제를 인식하고 문제로부터 추측을 하며 추측에 대한 반례를 조사해야 한다. 반례를 통해 자신의 추측을 개선

해가는 수학화하는 과정을 경험해야 하는 것이다. 또한, 학생들의 능동적이고 자율적인 참여를 높이기 위해 사회적 구성주의에서 주장하는 소집단 활동을 해야 한다. 수학적인 생각을 말로써 표현함으로써 수학적 사고를 언어로 표현하는 경험을 통해 수학적 힘이 길러질 것이다.

따라서 본 연구에서는 Lakatos의 방법론과 사회적 구성주의를 접목시켜 초등수학에 적용할 수 있는 자료를 개발해보았다.

먼저, 제7차 교육과정의 목표 및 내용을 살펴본 후 Lakatos의 방법론을 적용시킬 수 있는 방안을 모색하고, Lakatos의 방법론을 분석하여 초등학생의 수준에 맞게 이론을 변형시켰다. 마지막으로 사회적 구성주의를 접목하여 초등수학에 맞는 지도 방법을 적용시켜 초등수학에 적용 가능한 자료를 개발하였다.

자료를 통해 추측을 하고 추측을 반박할 수 있는 반례를 찾아내어 추측을 개선해가는 과정을 통하여 학생들은 수학적 힘을 기를 수 있을 것이다. 이를 위해서 교사는 반례를 찾을 수 있는 문제 상황을 찾아 제시하고 학생들은 소집단을 구성하여 보다 허용적인 분위기에서 자율적이고 능동적인 대화와 토론을 할 수 있도록 해야 한다. 그 결과 학생들은 수학적 지식을 언어로 표현하는 능력을 기를 수 있고 스스로 문제를 해결하는 능력이 향상되어 자율적이고 능동적으로 수학하는 방법, 즉 수학적 힘을 얻게 될 것이다.

목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

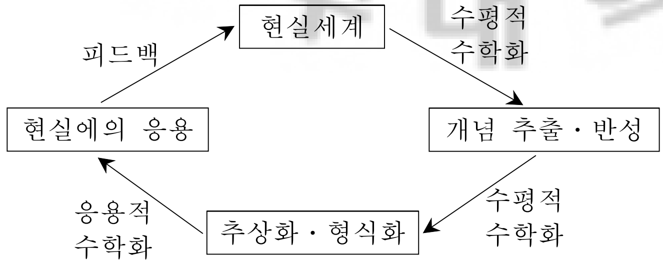
1. 연구의 필요성 및 목적

제7차 초등수학 교육과정은 구체적 조작기의 학생들이 실생활에서 나타나는 문제 상황을 해결해가는 활동을 통해 개념을 형성하고 있다. 또한, 학습자의 수학 학습 능력에 맞춘 능동적인 활동으로 수학 학습에 대한 흥미와 자신감을 증대시키며 수학적 사고를 확장시킨다. 이러한 학습은 학생들이 수학적 힘[1]을 키우게 하는데 그 목적이 있다.

하지만 구체적 조작기의 학생 능력에 맞춰 교구를 많이 사용하고 경험에 의한 활동으로 문제를 해결하나 사고 과정에 대해서는 많은 관심을 갖지 않기 때문에 학생들의 수학적 사고능력이 제한되고 있다. 교사는 '왜 그렇게 생각합니까?'라는 발문을 통해 수학적 힘을 길러주고자 하나 아직까지는 그 효과가 매우 미비하다. 또한, 학생들은 활동을 통해 수학화하는 과정[2]을 배우는 것보다 약속된 정의 및 정리, 성질에 더 주의를 기울이고 있다. 따라서, 그에 대한 대안으로 학생들이 수학화하는 과정 및 방법을 직접 느낄 수 있도록 Lakatos의 발견적(준경험적) 방법론을 초등수학에 접목시킬 필요성

1) 수학적 힘 : 기존의 문제해결력보다 넓은 개념으로 "탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보 교환 능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제해결이나 어떤 결정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로 인지적인 측면과 정의적인 측면을 모두 포괄하는 것"이다. (Arthur J. Baroody, Ronald T. Coslick, 2005)

2) 수학화하는 과정 (우정호, 2004)



이 있다.

강문봉(1993)에 따르면, 전통적인 수리 철학과는 달리 Lakatos는 수학적 지식은 추측이며 그것은 수학적 발견의 논리에 따라 탐구되고 학습되어야 한다고 주장하고 있다. 다시 말해서, 수학적 지식은 반박 가능한 잠정적으로 참인 추측이다.

Lakatos는 문제를 이해하여 추측을 하고 그 추측을 검사하여 반박하는 '증명과 반박의 방법'을 제시하였는데 그 방법으로는 항복법, 괴물배제법, 예외배제법, 괴물조정법, 보조정리 합체법이 있다.

이러한 방법을 활용하여 초등수학 교육에 접목시킨다면 새로운 추측을 발견하고 그 추측을 증명하는 과정에서 학생들의 수학적 힘이 신장될 것이다. 아직까지 초등수학에서는 증명이라는 단어가 낯설게 느껴지나 추측을 검사하는 과정에서 반례를 찾아보고 반례를 통해 추측을 개선하는 활동이 증명이라 할 수 있으므로 얼마든지 초등수학에 적용할 수 있다. 이러한 활동을 통해 학생들은 수학화하는 방법을 배우고 흥미를 느낄 수 있으며 무엇보다도 수학에 대한 자신감을 얻을 수 있다.

또한, 학생들의 능동적이고 자율적인 참여를 높이기 위해 초등학생의 인지적 사고수준에 따라 사회적 구성주의에서 주장하는 소집단 활동을 하도록 하였다. 수학적인 생각을 말로써 표현하는 경험이 거의 없는 초등학생이기 때문에 스스로 수학적 사고를 언어로 서술하는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 소집단을 구성하여 자신의 생각을 말하고 다른 사람의 생각과 비교함으로써 수학을 언어로 표현하는 많은 경험을 할 수 있다. 학생 스스로 말로써 표현하지 못한다고 해도 소집단 친구들이 표현하는 것을 보면서 자연스럽게 배워나갈 것이다.

본 연구에서는 학생들의 수학적 힘을 기르기 위해 수학적으로 사고할 수 있는 Lakatos의 방법론을 초등수학에 쉽게 적용하고자 사회적 구성주의에 따라 소집단 활동을 접목시켜 초등수학에서 이용할 수 있는 자료를 개발하고자 한다.

2. 연구 내용

본 연구는 Lakatos의 이론을 중심으로 초등학생의 능력에 맞게 변형시켰으며, 사회적 구성주의에 따라 소집단 활동을 통하여 수학적인 힘을 기를 수 있도록 하는데 초점을 두어 자료를 개발하는데 목적이 있다. 따라서 다음과 같은 연구 내용에 초점을 맞추었다.

가. 제7차 교육과정의 목표 및 내용을 살펴보고 Lakatos의 방법론을 적용시킬 수 있는 방안을 모색한다.

나. Lakatos의 이론 및 문헌을 분석하여 초등학생의 수준에 맞게 이론을 변형시킨다.

다. 사회적 구성주의에 대해 살펴보고 초등수학에 맞는 지도 방법을 분석한다.

라. 위의 분석 결과를 토대로 초등수학에 적용 가능한 자료를 개발한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 제7차 교육과정

가. 제7차 교육과정의 목표

제7차 초등학교 수학과 교육과정에서 제시한 초등수학 교육의 목표는 다음과 같다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다. (교육부, 1997, p.29)

1) 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.
2) 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.
3) 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

7차 교육과정에서는 수학적 개념, 원리, 법칙을 실생활에서 이루어질 수 있는 경험을 통해 쉽게 이해할 수 있도록 하고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결하고자 한다. 하지만 교육 현장에서는 실생활을 통해 얻어진 수학적 개념, 원리, 법칙에 대해 조금도 의심하지 않고 맹목적으로 받아들여 문제를 푸는 것에만 급급하다. 문제를 이해하여 수학적인 사고를 거쳐 문제를 풀어나가는 것이 아니라 알고 있는 지식만을 문제에 적용시켜서 풀고 있기 때문에 수학적 사고가 필요한 문제에서는 손을 쓸 수 없게 되는 것이다. 그래서 수학자들이 수학화하는 과정을 경험하듯 학생들도 수학화하는 과정을 통해 수학적 사고를 길러

야 할 필요가 있다.

인지적 사고가 완전히 발달하지 않은 초등학생에게 수학화하는 과정을 경험하게 하는 것이 불가능하다고 볼 수도 있으나 아주 기본적인 과정만 경험한다고 해도 학생들에게는 많은 도움이 되리라 본다. 또한 중등수학을 접했을 때 스스로 문제를 해결할 수 있는 자신감을 얻을 수 있을 것이다.

나. 수학적 힘

수학적 힘이란, 기존의 문제해결력보다 넓은 개념으로 "탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보 교환 능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제해결이나 어떤 결정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로 인지적인 측면과 정의적인 측면을 모두 포괄하는 것"이다(Arthur J. Baroody & Ronald T. Coslick, 2005).

제7차 교육과정에서는 초등수학에서 강조하는 수학적 힘을 기르기 위해 문제해결의 여러 가지 방법을 기술하고 있다. 수학적 힘을 기르기 위해서는 주어진 문제를 해결하기만 하는 것보다 수학적인 개념의 이해와 수학화하는 과정에 대한 경험이 더욱 중요할 것이다. 이를 위해 가장 중요한 것이 수학화하는 과정을 언어로 표현하는 것이다. 이를 통해 자신의 생각이 더욱 분명해지고 수학에 대한 이해도 자연스럽게 될 것이며 다른 사람과 이야기하면서 자신의 생각을 일목요연하게 정리할 수 있다.

2. Lakatos의 방법론

가. Lakatos의 준경험적 이론

Polya(1973)는 "증명하는 것을 배워야 하지만 추측하는 것도 배워야 한다"는 입장에서 연역주의를 통해 비롯된 수학 교육의 문제를 해결하고자 문제해결 교육을 주장하였다. 단순히 계산하여 해결하는 문제가 아니라 문제 해결을 위해서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 통해 결과에 초점을 맞추는 것이 아니라 문제를 해결하는 과정에 초점을 맞춘 것이다. 그러나 귀납과 유추를 통해 추측하는 문제 해결 방법은 제시하였지만 문제 상황에서 추측을 하고 증명하는 과정을 통해 잘못된 추측을 개선하는 과정에 대해서는 논의하지 않았다. Lakatos는 Polya의 뒤를 이어 추측을 증명하고 개선해나가는 발견의 논리를 제시하여 수학 교육의 문제점을 해결하고자 하였다.

Lakatos는 연역 체계를 유클리드(Euclid)적인 이론과 준경험적(quasi-empirical)인 이론으로 분류하였다. 유클리드적인 이론은 참인 공리에 의해 좌우되는 참인 지식 체계이며, 준경험적 이론은 잠정적으로 참인 가설로부터 연역되는 지식 체계인 것이다. 그러므로 준경험적 이론은 참임을 보장받지 못하는 잠정적인 추측이며, 거짓인 기초 명제[3]가 나타나지 않는 한 참인 것으로 인정되게 된다. 거짓인 기초 명제가 나타나면 이때의 가설은 거짓이 되고 따라서 이론 체계는 수정을 피할 수 없다. 이와 같이 수정되며 이론이 발전하면서 준경험적 이론은 점차 유클리드적 이론을 지향하게 된다(강문봉, 2004).

유클리드적인 이론에서는 수학의 논리화, 형식화를 지향하기 때문에 수학적 언어로 간결하게 표현하면서 많은 것을 함축할 수 있는 장점이 있다. 그

3) 기초명제 : Lakatos가 말하는 '기초 명제'는 연역 체계에서 어떤 진리값이 처음에 도입되는 명제를 말한다(강문봉, 2004).

러나 언제나 참인 명제로 인해 비판적 사고를 잃게 하는데 큰 문제가 있다. 문제 해결에 있어 아무 의심 없이 받아들인 참인 명제를 암기하고 반복적으로 연습하여 해결하므로 수학적 사고를 기르기가 쉽지 않다. 수학을 발견·발명할 때에는 분명 추측을 하고 많은 구체적인 예들을 살펴봄으로써 자신의 추측을 검사하고 오류를 수정해가는 과정이 주를 이룰 것이다. 하지만 오랜 기간 동안 이루어진 수학을 발견하는 과정을 무시한 채 결과만 가지고 학습을 한 결과, 발견 및 비판 능력을 잃게 되는 문제점이 생겼다. 그리고 수학 학습에서는 협동하여 문제를 해결하는 일이 거의 없고, 대부분 혼자서 문제를 해결해야 한다. 결국 수학교육에서는 개인적인 성향이 많이 나타나 개인차 역시 더욱 심해졌다는 것을 알 수 있다.

나. 반례에 의한 반박의 방법

Lakatos에 의하면 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식에는 여러 가지가 있다.

첫째, 반례를 받아들이고 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법으로 항복법이라고 한다. 이것은 자신이 세운 추측을 버리고 다시 새로운 추측을 세우는 방법이다.

둘째, 괴물 배제법(monster-barring method)이다. 원래의 추측은 이미 증명되었으므로 증명된 추측은 옳은 것이고, 반례가 잘못된 것이라고 보는 것이다. 그래서 반례를 배제하고 원래의 추측을 유지할 수 있도록 용어를 재정의하여 원래의 추측에 대한 어떠한 반례도 생기지 않도록 하는 것이다. 이 방법은 학생이 용어를 확실하게 정의하게 함으로써 초등수학에서 유용한 방법으로 쓰일 수 있다.

셋째, 반례가 나타나면 반례를 예외로 두어 예외를 제외한 영역에서만 추측이 참이 되도록 추측에 예외에 대한 조건 절을 첨가하여 참인 명제로 바

꾸는 것이다. 이러한 방법을 예외 배제법(exception-barring method)이라고 한다. 이것은 원래의 추측을 존속시킬 수 있으나 모든 예외를 다 발견하여 추측에 조건절을 열거할 수 있는 보장이 없다. 그러나 초등수학에서는 간단한 추측을 통하여 반례를 찾고 반례를 제외할 수 있도록 조건절을 첨가하여 추측을 개선하는 활동으로 활용할 수 있다. 이러한 활동을 통해서도 수학하는 과정을 충분히 경험할 수 있을 것이다.

넷째, 반례라고 본 관점 자체가 왜곡된 관점에 의한 것이라고 보는 것이다. 관점을 시정하여 반례가 실제로는 반례가 아닌 예라고 설명을 하여 반례를 예로 전환시키는 것이다. 이것을 괴물 조정법(monster-adjustment method)이라고 한다.

다섯째, 추측을 부분들로 나누어 참이 됨을 증명하는데 어떤 부분 추측에 대한 반례가 나타나면, 그에 대한 조건을 원래의 추측에 합체시키고 증명을 고치며 반박된 추측을 개선시키는 방법이 있다. 이를 보조 정리 합체법(lemma-in-corporation method)이라고 부른다. 예외 배제법이나 보조 정리 합체법 모두 원래의 추측에 새로운 조건이 첨가되는 것이나 보조 정리 합체법에서는 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어지기 때문에 Lakatos는 증명에 의해 추측이 개선되는 보조 정리 합체법을 선호하였다. 또한, 보조 정리 합체법을 증명과 반박의 방법(proof and refutations)이라고 부를 것을 제안하였다.

다. Lakatos의 증명과 반박의 방법

Lakatos에 의하면, 수학적 지식은 언제나 참인 공리로 이루어진 것이 아니라 잠정적으로 참으로 인정되어 언제라도 반박 가능한 추측을 말한다. Lakatos는 준경험적 방법론으로서, 문제를 이해하여 추측을 하고 그 추측을 검사하여 반박하는 '증명과 반박의 방법'을 제안하였다. '증명과 반박의 방법은 다음과 같은 규칙으로 구성된다(I. Lakatos, 1976).

1) 규칙 1 : 추측을 하면 그것을 증명하고, 반박하려고 시도하여라. 증명을 주의 깊게 조사하여 자명하지 않은 보조 정리의 목록을 만들어라(증명-분석). 추측에 대한 반례(전면적 반례)와 의심스러운 보조 정리에 대한 반례(국소적 반례)를 모두 찾아보아라.
2) 규칙 2 : 전면적 반례가 있으면 추측을 버리고, 반례에 의해 반박될 적절한 보조 정리를 증명-분석에 추가하고 그 보조 정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측을 기각한 추측과 대체시켜라. 반박을 괴물로 취급하여 버리지 말고 모든 '감추어진 보조 정리'를 명백하게 하려고 시도하여라.
3) 규칙 3 : 국소적 반례가 있으면 그것이 전면적 반례인지 아닌지를 검사하여라. 만약 전면적 반례이면 규칙 2를 쉽게 적용할 수 있다.
4) 규칙 4 : 국소적 반례이지만 전면적 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않은 보조 정리로 반박된 보조 정리를 대체하여 증명-분석을 개선하도록 시도하여라.
5) 규칙 5 : 만약 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적 추정에 의해 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하여라(I. Lakatos, 1976, p.50, 58, 76).

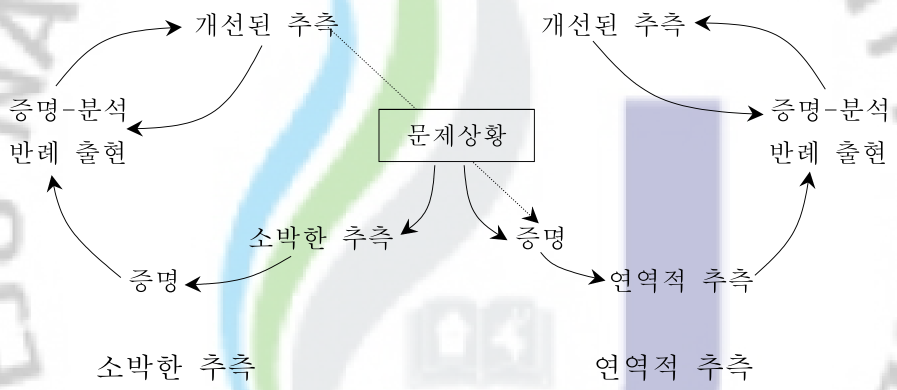
라. 강문봉(2004)의 교수 절차 및 수업 모형

Lakatos는 "어떤 분명하게 서술된 주장이 참이거나 거짓이라는 것을 결정적으로 보이는 것이 증명의 목적이 아니라 원래의 소박한 추측을 진정한 정리로 개선하는 것이 증명의 실제적인 목적"(Lakatos 1976, 41)이라고 말하고 있다. 증명의 이러한 목적에 주목한다면 증명 없이 추측을 개선하는 활동 역시 의미 있다고 할 수 있을 것이다(강문봉, 2004). 강문봉(2004)은 다음과 같은 교수 절차를 제안하였다.

1) 문제 상황이 설정된다.
2) 원시적 추측이 제안된다.

3) 추측을 검사한다.
4) 반례가 나타나거나, 원시적 개념의 한계가 밝혀진다.
5) 반례를 분석한 후, 개념의 정의를 명확히 함으로써 반례를 제외시키거나, 조건을 추가하여 그러한 반례를 제외시켜 추측을 개선한다.

강문봉(1993)은 Lakatos의 오류주의에 바탕을 둔 교육은 추측하고 비판하는 과정을 통해 교과 지식의 의미 있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 목적을 중시하게 된다고 하면서, 다음과 같은 수업 모형을 고안하여 제시하였다.



[그림 1] 오류주의 수업 모형(강문봉, 1993, p.164)

3. 사회적 구성주의

가. 구성주의

구성주의에는 Piaget가 제시한 조작적 구성주의(operational constructivism), von Glasersfeld(1984, 1987, 1989) 등이 주장하는 급진적 구성주의(radical constructivism), sal Restivo(1985, 1988), Paul Ernest(1991) 등이 주장하는 사회적 구성주의(social constructivism) 등이 있다.

조작적 구성주의란 조작, 즉 가역성이 있는 일반화된 행동 패턴을 바탕으로 하여 새로운 사실을 비교 또는 대조함으로써 새로운 조작을 구성하도록 학습지도를 하는 것이다. 급진적 구성주의란 지식은 학습자가 스스로 구성하는 것으로서 그 학습자의 주관적인 것으로 보는 것이다. 사회적 구성주의란 개인이 주관적으로 학습한 지식을 다른 사람들에게 발표하고 토론함으로써 주변 사람들과 공통된 개념을 갖게 되어 그 지식은 객관화된다고 보는 것이다(강옥기, 2003).

나. 사회적 구성주의

사회적 구성주의는 수학을 하나의 사회적 구성으로 보고 있다. 그 이유는 인간이 사회적 활동을 통해 사용하고 있는 언어, 규칙, 합의는 참인 수학을 확립하고 그것을 입증하는 데 중요한 역할을 하기 때문이다. 사회적 구성주의는 준경험주의로부터 오류주의 인식론을 받아들이며, 수학적 지식과 개념은 발달하며 변화한다는 견해를 받아들인다. 사회적 구성주의는 또한 Lakatos의 철학관인 수학적 지식은 수학적 발견의 논리를 사용하여 예측과 반박을 통하여 성장한다는 주장을 받아들인다(강옥기, 2003).

수학적 지식을 사회적 구성으로 묘사하며 사회적 구성이라는 용어를 택한 배경은 다음과 같다(강옥기, 2003).

1) 수학적 지식의 바탕은 언어적 지식, 관습, 규칙이며 이들은 사회적 합의에 의하여 의미를 갖는다.
2) 개인의 주관적 지식을 발표를 통하여 객관적 지식으로 바꾸는데 사람들 사이의 사회적 교류가 필요하다.
3) 객관성 그 자체는 사회적인 것으로 이해된다.

사회적 구성주의는 객관성의 의미를 수정하여 수학적 지식이 종래와는 다른 의미에서 객관적인 것이 되게 한다. 사회적 구성주의는 객관성을 '한 개

인을 넘어선 사회 공동체가 옳다고 인정하는' 또는 '역사와 문화를 통해 인정된'과 같은 의미로 사용한다. 사회적 구성주의에서 말하는 '객관성'은 '사회적 합의 가능성'의 다른 표현이다. 그러면 이러한 객관성, 곧 합의 가능성의 근거는 어디에 있는가? 사회적 구성주의는 합의 가능성의 근거로 자연언어의 공유성을 든다(Ernest, 1991).

사회적 구성주의는 지식의 형성에 관여하는 사회의 역할을 강조한다. 사회적 구성주의자들은 개인의 지식 구성에 있어 언어의 역할을 강조하며, 언어가 사고에 중요한 영향을 미친다는 비고츠키(Vygotsky)의 이론을 의미있는 것으로 받아들인다(Ernest, 1994). 비고츠키는 사고가 사회의 역사 문화적 과정에 의해 결정된다는 견해를, 아동의 논리 발달은 사회화된 언어의 직접적 결과이며 아동의 지적 성장은 사고의 사회적 수단, 즉 언어를 숙달하는 것에 따른다고 주장한 바 있다(Ernest, 1991; 유연주, 1999).

다. 사회적 구성주의의 학습 지도 방법

사회적 구성주의에 의한 학습지도의 방법은 미국의 수학 교육 개혁을 선도하고 있는 CPMP(Core-Plus Mathematics Project; Hirsch, 1997)가 개발한 교육과정과 교과서에 잘 나타나 있다. 이 교과서의 학습 단위인 각 단원은 다음과 같은 순서로 구성되어 있다.

첫째, 새로운 개념을 도입하기 위한 문제 상황을 제시하고 그것이 우리의 생활에 미치는 영향을 토론해 봄으로써 학습의 동기를 부여한다. 이때는 학급 전체가 함께 문제 상황을 토론한다.

둘째, 소집단으로 구성된 학생들이 탐구학습을 통하여 새로운 수학적 개념을 탐색하고 구성하여 주관적 지식을 형성한다.

셋째, 각 소집단이 탐구하여 발견한 개념들을 전체 학급에 발표하고 토론함으로써 주관적 지식을 객관적 지식으로 전환한다.

넷째, 소집단 활동을 통하여 획득한 지식을 개별적으로 반성하고 적용하

는 학습을 한다.

다섯째, 다양한 수준의 연습문제를 개인의 능력에 맞게 학습하게 한다.

이러한 학습지도 방법을 통해 개인의 주관적인 지식이 소집단을 이룬 사회에서 발표와 토론을 통한 지식의 비판 및 개선 과정을 통해 객관적 지식으로 발전하게 되는 것이다. 이러한 학습에서는 학생들 사이의 발표와 토론을 통한 사회적 상호작용이 가장 중요하다. 이러한 과정을 통해 수학적 지식이 개인의 것에서 사회적인 객관적 지식으로 변화한다.

라. 수학교육학적 구성주의의 교수·학습 원리(박영배, 1996)

1) 학생 중심적 개별화의 원리

이 원리는 수학 학습 활동의 주체가 학생 개개인이라는 것, 학생 개개인의 지적 자율성에 바탕을 둔다는 것을 의미한다. 학생 개개인이 실패 또는 인지적 갈등 상황에 처했을 때, 개개인의 내부로부터 사회적 상호 작용의 욕구가 발동되고, 주변과 조절함으로써 이러한 문제점을 해결하는 것이다. 그런데 이 해결 양상에는 학생 개개인의 능력에 따른 개인차가 존재하므로, 학생 중심적 교수 학습은 개별화를 고려하지 않을 수 없다. 곧 개개인의 수학적 능력에 맞는 개별적 교수 학습을 통해, 각 개인의 수학적 능력의 극대화를 지향해야 한다. 구성주의적 입장에서 지향하는 학생 중심적 개별화 교수 학습은 수학 교수·학습에서 개인의 능력 및 개성의 차이를 고려하는 교수 학습을 의미한다. 교사가 학생 개개인의 능력 및 개성의 차를 인지하고, 학생 개개인이 가장 효율적으로 학습하며, 자신의 능력을 최대한으로 발휘하게 하는 교수 학습을 지향해야 한다. 학생의 개인차를 고려하여 학습 결손을 보이는 학생 한 명 한 명에게 적절히 지도해야 한다. 그리고 한 문제를 해결할 때도 여러 가지 생각이 있을 수 있으므로 각각의 방법의 가치를 인정해 주고 보다 훌륭한 방법으로 다듬어 나가도록 지도해야 한다.

2) 발문 중심적 상호 작용의 원리

이 원리는 학생이 학습의 주체가 되어 스스로 지식을 구성하도록 교사가 발문을 중심으로 학생을 안내하거나 조력해야 한다는 원리이다. 학생들은 발문에 답하는 과정을 통해 자신들의 생각을 비교해 보고 차이점을 파악하여 자기 생각을 수정하고, 이미 알고 있는 것과 새로 배우는 지식 사이의 관계를 구성해 나갈 수 있다. 교사의 발문을 계기로 학생 상호간에 토의하고, 확인하고, 생각을 수정하고, 새로운 방향을 찾아내는 교실 문화를 만들어 나가는 것이 중요하다.

발문에는 학생들이 수학적 사고 활동을 할 수 있도록 동기를 유발하고 스스로 수학 지식을 구성해 나갈 수 있도록 자극을 주는 교사의 조언이 포함된다. 학생이 지식을 자주적으로 구성하도록 돕기 위해서는 학습 내용과 학습자의 심적 상태를 고려하여 긴장감을 불러일으키는 질문과 조언 및 학습자의 적극적인 관심을 유발시키는 질문과 조언을 해야 한다.

정보나 사실을 확인하는 유형의 발문은 학생들로 하여금 생각할 필요를 느끼게 하지 못하며 이미 학습한 지식을 단순히 회상하는 기회만 제공하기 쉽다. 그러므로 학생들로 하여금 논리적으로 조직된 정보로부터 새로운 어떤 것을 구성할 것을 요구하는 발문, 다양한 대답을 하도록 요구하는 발문, 주어진 자료로부터 알게 된 것을 설명하도록 요구하는 발문, 관찰한 것을 자신의 생각대로 묘사할 수 있는 기회를 제공하는 발문 등 사실 확인 이상의 더 많은 것을 요구하며 적극적으로 생각해 보게 하는 다양한 발문을 해야 한다.

또한 교사는 학생과의 상호 작용에 입각하여 발문을 해야 한다. 교재 내용을 충분히 분석하고 사고 실험을 거쳐 예상 가능한 학생의 반응에 충분히 대처할 수 있는 발문을 계획적으로 준비할 필요가 있다. 학생 개개인에게 적절한 발문을 해주기 위해서는 학생들이 무엇을 알고 있고 무엇을 생각하고 있는지를 주의 깊게 살펴보아야 한다. 이와 같은 실천적인 경험을 통해서 구체적인 상황에 맞추어 다양하고 효율적인 발문을 할 수 있게 된다.

3) 의미 지향적 활동의 원리

이 원리는 학생들이 활동 속에 구성된 의미에 충실한 지식의 구성이 이루어져야 한다는 원리이다. 지식의 구성에 앞서 의미의 구성이 이루어져야 하며, 구성된 의미에 부합하는 지식의 구성이 이루어져야 한다. 많은 경우 수학적 지식은 학생들에게 본래 그러한 것으로 주어지고, 학생들은 그러한 지식이 왜 주어졌는지에 대한 깨달음 없이 주어진 수학 지식을 수용한다. 구성주의적 수학교육은 이러한 수학교육의 모습으로부터 탈피하고자 하며, 학교수학이 학생들에게 의미 있는 것이기를 요구하고 있다. 교사는 학교수학이 의미 있는 것임을 학생이 체감할 수 있도록 노력해야 한다.

학생들의 활동에 내재된 의미를 수학적으로 표현하게 하여 활동에 내재된 의미를 지식으로 구성하게 하는 것이 의미 지향적 활동의 원리에 부합한다.

4) 반영적 추상화의 원리

이 원리는 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 반성적 활동을 중시해야 한다는 원리이다. 반영적 추상화는 수학적 지식의 자주적인 구성을 가능하게 해 주는 심리적 메커니즘으로, 동화와 조절에 의한 내면화된 자주적 활동을 의미한다. 반영적 추상화의 원리를 구현하기 위해서는 활동과 더불어 반성을 매우 중요하게 고려하지 않으면 안 된다.

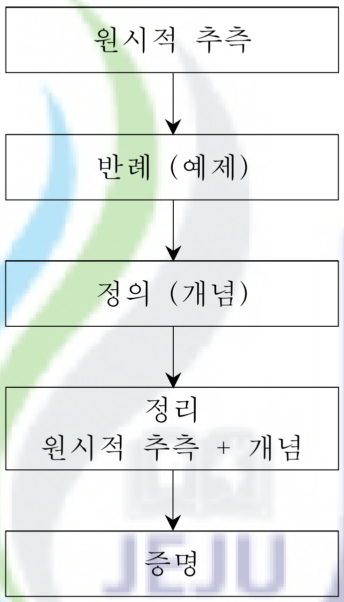
학생들의 조작 활동을 중요시하는 것은 반영적 추상화의 원리에 부합하는 것이다. 그러나 손으로 하는 조작 활동이 항상 의미의 구성을 증진시키는 것은 아니므로, 의미의 구성을 증진시키는 조작 활동으로 이끄는 것이 중요하다. 또한 학생에 의한 반영적 추상화가 이루어지게 하기 위해서는 학생들이 자신들의 행동 그 자체를 사고의 대상으로 삼도록 고무하고 격려하는 환경을 조성해야 한다. 이러한 환경 속에서 학생들이 행한 조작 활동이 수학 지식을 구성하는데 있어서 가치 있는 기초가 될 수 있다. 조작 활동이 반성과 결부되지 못하고 조작 활동 자체로 끝난다면, 그것은 지식을 구성한 것이 아니라 단지 신체를 움직이는 활동을 한 것뿐이라고 할 수 있을 만큼 반성의 과정은 중요하다.

Ⅲ. 연구의 내용

1. 초등수학에 접목시킨 Lakatos의 방법론

가. 연역주의자 및 Lakatos의 전개 양식

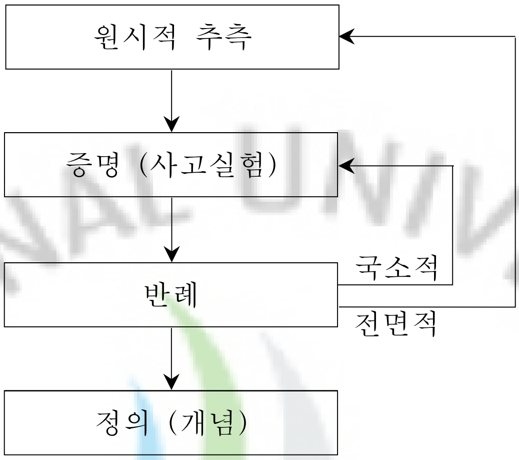
1) 연역주의자의 전개 양식



[그림 2] 연역주의자의 전개 양식

연역주의자의 전개 양식에서는 수학적 이론을 만든 사람의 사고실험이 전혀 드러나지 않은 상태에서 느닷없이 정의가 나타나는 경우가 대부분이다. 이러한 이유로 배우는 사람의 입장에서는 정의에 논의된 개념이 나타난 원인 및 동기를 알기 힘들다. 다시 말해서 연역주의자의 전개 양식을 따른다면 수학적 이론을 만든 사람만 정의가 나타나게 된 이유를 알 수 있는 경우가 흔하다.

2) Lakatos의 전개양식



[그림 3] Lakatos의 전개 양식

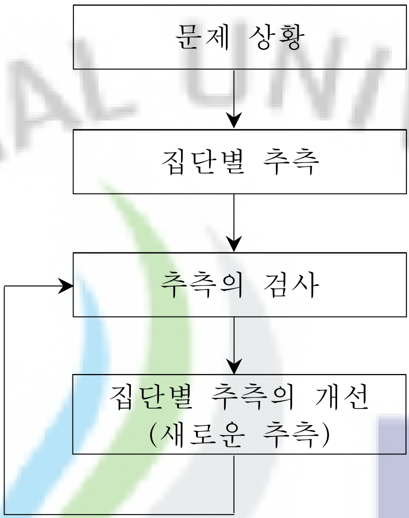
Lakatos는 원시적 추측을 하고 증명을 통한 사고실험에서 반례가 나타날 경우, 원시적 추측에 대한 반례인 전면적 반례가 나타나면 원시적 추측을 새롭게 개선하고, 부분 추측의 증명에 의한 반례인 국소적 반례가 나타나면 증명을 개선하는 반복적인 과정의 결과로 정의가 나타남을 말하고 있다.

2. 새로운 수학 교수·학습

가. 새로운 수학 교수·학습 흐름도

Lakatos는 반례에 의한 반박의 방법을 주장하였다. Lakatos의 방법론을 초등 수학에 적용시켜 문제 상황을 통해 추측을 하고 그 추측을 검사하여 반례를 찾아보는 활동을 함으로써 증명하는 과정을 초등수학에 적용할 수 있다. 그리고 자신의 추측에 대한 반례가 나타났을 때 반례를 통해 정의를 재정의하여 용어의 뜻을 명확히 하거나 추측에 대한 반례를 제외할 수 있도록 추측에 조건절을 넣어 추측을 개선할 수 있도록 수학 교수·학습 흐름도를 구성하였다.

또한 수학화하는 과정을 언어로 표현하는 활동이 초등학생들에게 어려울 수 있으므로 사회적 구성주의에 따라 소집단 활동을 통하여 발표 및 토론을 함으로써 문제를 해결할 수 있도록 교수·학습 방법을 고안하였다. 새로운 교수·학습 흐름도는 다음과 같다.



[그림 4] 새로운 수학 교수·학습 흐름도

1) 문제 상황 제시 : 반례가 나올 수 있는 문제 상황을 구성하여 전체 학생들에게 제시한다. 문제의 뜻을 이해하고 문제를 통해 학생들 스스로 추측할 수 있는 시간을 준다.
2) 집단별 추측 : 소집단으로 구성하여 자신이 추측한 내용을 발표한다. 수학적 언어로 표현하기 힘든 경우에는 그림을 그려서 표현할 수 있도록 한다. 발표한 후 추측을 검사하기 위해서 반례를 찾아본다. 반례를 통해 추측을 개선하여 소집단의 추측을 만든다. 주관적으로 형성된 지식을 객관적인 지식으로 만들어 가기 위한 단계로 소집단 내에서의 상호 작용을 통해 이루어진다.
3) 추측의 검사 : 소집단에서 발견하고 정리한 추측을 전체 학생에게 발표한다. 발표한 내용을 듣고 학생들은 추측의 정당성을 검사한다. 제시되지 않은 자료에 대해서도 생각하면서 추측이 정당하지 않은 반례가 있는지

확인한다. 반례가 있을 경우, 반례를 제시하여 추측이 개선되어야 함을 보인다.

4) 집단별 추측의 개선 : 소집단별로 반례가 나타나지 않도록 용어의 정의를 명확히 하여 반례를 배제하거나, 반례를 제외할 수 있는 조건을 원래의 추측에 조건절로 첨가하여 추측을 개선시킨다.

5) 추측의 검사 : 전체 학생에게 소집단에서 개선한 추측을 발표하여 추측의 정당성을 검사한다. 다른 자료에 대해서 반례가 있는지 알아본다.

6) 집단별 추측의 개선 : 소집단별로 추측을 개선한다. 이러한 추측의 검사와 개선이 반복되면서 막연한 추측에서 벗어나 참인 명제가 될 것이다.

나. 새로운 수학 교수·학습 방법

1) 추측과 반례의 방법을 사용하기 위해서는 교사가 교과서에 제시되는 내용 중 반례가 나타날 수 있는 내용에 대해서 문제 상황을 미리 꾸며주는 노력이 필요하다. 어떠한 반례가 나올 것인지 짐작하여 어떻게 대응할 것인지 생각해보고, 학생들이 반례를 찾을 수 없을 경우 반례를 제시할 수 있도록 자료를 준비해두어야 한다.

2) 소집단은 4~5명이 적당하고 처음에는 수학을 언어로 표현하는 능력이 있는 학생이 소집단에 포함되도록 하여 활동의 흐름을 이끌어가거나 어려움을 느끼는 학생을 도와줄 수 있도록 한다. 그러한 노력에도 불구하고 수학적 토론이 잘 이루어지지 않는다면 교사가 직접 참여하여 어떻게 하는 것인지 보여주어야 한다. 몇 번의 경험을 통해 이러한 활동이 익숙해지면 다른 사람의 도움이 필요하지 않게 될 것이다.

3) 모든 영역에서 이러한 수업이 가능하나 특히 도형 영역에서 학생들이 도형의 정의에 대한 오류 및 오개념을 가지고 있을 때 더욱 효과적이다. 추측에 대한 반례를 통해 스스로 용어를 재정의 함으로써 반례를 없애거나, 반례를 제외시킬 수 있도록 조건절을 추측에 첨가하는 활동을 할 수 있다.

Ⅳ. 자료 개발의 실제

1. 개발된 자료 목록

가. 수와 연산 영역

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
1-1	자리 수	십일은 어떻게 쓸까?	1-가-7.50까지의 수
1-2	수의 성질	연속된 세 자연수의 성질 알아보기	2-가-4.두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 (2)
1-3	곱셈과 나눗셈의 관계	수학적 기호를 이용한 곱셈과 나눗셈	3-나-4.나눗셈
1-4	최소 비용	종합체육관의 장소 정하기	4-가-6.혼합계산
1-5	분수의 덧셈	분수의 덧셈 알아보기	4-나-1.분수
1-6	소수점 읽기	24.12는 어떻게 읽을까?	4-나-2.소수
1-7	분수와 소수	분수를 소수로 고치기	4-나-2.소수
1-8	최대공약수	최대공약수의 특징 알아보기	5-가-1.배수와 약수
1-9	분수의 크기 비교	전체의 양이 다른 분수의 크기 비교하기	5-가-3.약분과 통분
1-10	곱셈의 성질	어떤 수의 몇 배는 항상 어떤 수보다 클까?	5-나-1. 소수의 곱셈

나. 도형 영역

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
2-1	오목 사각형	오목 사각형 알아보기	2-가-3.도형과 도형 움직이기 3-가-3.평면도형
2-2	사각형의 성질	사각형의 성질 알아보기	2-가-3.도형과 도형 움직이기 3-가-3.평면도형
2-3	원의 개념	원 찾아보기	3-나-3.도형 2-가-3.도형과 도형 움직이기
2-4	대각선의 수	다각형의 대각선의 수 알아보기	4-나-5.사각형과 도형 만들기
2-5	마름모와 정사각형	한 각이 직각인 마름모와 정사각형	4-나-5.사각형과 도형 만들기
2-6	각기둥과 원기둥	각기둥과 원기둥에 대해 알아보기	6-가-2.각기둥과 각뿔 6-나-4.원과 원기둥
2-7	각기둥의 특징	각기둥의 특징 알아보기	6-가-2.각기둥과 각뿔

다. 측정 영역

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
3-1	들이	그릇을 이용하여 물 채우기	3-나-5.들이재기
3-2	어림하기	올림, 버림, 반올림 알아보기	4-나-6.어림하기
3-3	둘레와 넓이	둘레가 같은 사각형의 넓이	4-나-5.사각형과 도형 만들기
3-4	삼각형의 넓이	두 변의 길이가 일정할 때 가장 넓은 삼각형 찾기	5-가-6.평면도형의 둘레와 넓이

라. 확률과 통계 영역

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
4-1	경우의 수	숫자카드로 세 자리 수의 개수 알아보기	6-나-6.경우의 수 6-가-9.문제 푸는 방법 찾기

마. 문자와 식 영역

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
5-1	비둘기집의 원리	반에서 생달이 같은 사람이 3명 이상 있기 위한 조건 찾기	문제 해결
5-2	한붓 그리기	한붓 그리기를 할 수 있는 조건 찾기	문제 해결

바. 규칙성과 함수

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	관련 교육과정
6-1	비의 성질 1	비의 성질 알아보기	6-가-7.비례식
6-2	비의 성질 2	4:0과 8:0은 같을까?	6-가-7.비례식

2. 개발된 자료

가. 수와 연산 영역

자료 번호	1-1	활동 내용	십일은 어떻게 쓸까?
탐구 주제	자리 수	관련 교육과정	1-가-7.50까지의 수

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆곶감을 제시하여 몇 개인지 세어보게 한다. -곶감 한 줄에는 9개보다 1개 더 많이 꿰어져 있다. -9보다 1 큰 수를 어떻게 나타내면 좋을까 생각해본다.	※10을 알고 있는 경우에도 다르게 표현해 보도록 한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -①다른 수를 만들어낸다. 예를 들어, ※,☆,◇와 같은 숫자를 만든다. -②9보다 1 큰 수이므로 91이라고 한다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다.	
	추측한 내용을 검사한다.	◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①의 경우, 계속해서 다른 숫자를 만들어낸다면 너무 많은 숫자가 생겨나서 사용하기 불편할 것이다. -②의 경우, 3보다 1 큰 수는 4인데 31이라고 쓸 수 있기 때문에 혼란이 생긴다. -②의 경우, 구일이라고 읽으면 9와 1인지 9보다 1 큰 수인지 구별하기 힘들다. -0부터 9까지의 숫자만으로 9보다 1 큰 수를 정의해야 한다.	※발표를 듣고 추측한 내용이 맞는지 확인한다.
추측의 개선	추측을 개선한다.	◆추측을 개선한다. ☞9보다 1 큰 수를 10으로 나타내고 십 또는 열이라고 읽는다.	※10을 약속한다.

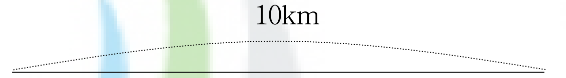
자료 번호	1-2	활동 내용	연속된 세 자연수의 성질 알아보기
탐구 주제	수의 성질	관련 교육과정	2-가-4.두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 (2)

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆연속된 세 자연수를 제시한다. 1) 3, 4, 5 2) 15, 16, 17 3) 6, 7, 8 4) 54, 55, 56	※홀수와 짝수로 시작하는 경우 모두 제시한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -홀수가 2개, 짝수가 1개이거나 홀수가 1개, 짝수가 2개이다. -홀수부터 시작하는 연속된 세 수의 합은 짝수이다. -짝수부터 시작하는 연속된 세 수의 합은 홀수이다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다. 새로운 문제를 제기한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인한다. ◆새로운 문제를 제기한다. -연속된 세 자연수의 합은 어떤 특징이 있을까?	※여러 가지 예를 들어 추측한 내용이 맞는지 확인한다.
새로운 추측	새로운 문제에 대한 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. 1) 3 + 4 + 5 = 12 2) 15 + 16 + 17 = 48 3) 6 + 7 + 8 = 21 4) 54 + 55 + 56 = 165 ☞연속된 세 자연수의 합은 가운데 수의 3배이다. (12=4×3, 48=16×3, 21=7×3, 165=55×3)	※덧셈뿐만 아니라 다른 연산에 대해서도 특징을 찾아볼 수 있다.
추측의 검사	추측을 검사한다.	◆소집단별로 추측한 내용을 발표하고, 추측한 내용이 맞는지 검사한다.	

자료 번호	1-3	활동 내용	수학적 기호를 이용한 곱셈과 나눗셈
탐구 주제	곱셈과 나눗셈의 관계	관련 교육과정	3-나-4.나눗셈

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆아래의 식을 보고 언제나 등식이 성립하도록 여러 가지 모양을 이용하여 식을 만들어보아라. 1) $3 \times 8 = 24 \Rightarrow 24 \div 3 = 8$ $24 \div 8 = 3$ 2) $7 \times 11 = 77 \Rightarrow 77 \div 7 = 11$ $77 \div 11 = 7$ 3) $50 \times 2 = 100 \Rightarrow 100 \div 50 = 2$ $100 \div 2 = 50$	※학생의 수준에 따라 여러 가지 모양을 제시하거나 간단한 식을 예로 들어 설명한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆여기서 무엇을 알 수 있는지 소집단별로 추측을 한다. - $\triangle \times \bigcirc = \square \Rightarrow \square \div \triangle = \bigcirc$ $\square \div \bigcirc = \triangle$	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사하고 반례를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -0으로 나눌 수 없으므로 아래의 경우는 불가능하다. $8 \times 0 = 0 \Rightarrow 0 \div 8 = 0$ $0 \div 0 = 8$ (×)	※다른 예를 살펴보면서 반례가 있는지 확인한다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. - $\triangle \times \bigcirc = \square \Rightarrow \square \div \triangle = \bigcirc$ $\square \div \bigcirc = \triangle$ (단, $\triangle, \bigcirc \neq 0$)	

자료 번호	1-4	활동 내용	종합 체육관의 장소 정하기
탐구 주제	최소 비용	관련 교육과정	4-가-6.혼합계산

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆제주시는 새로 지을 종합 체육관의 장소를 확정할 예정이나 A동과 B동 주민들이 서로 자신의 동에 체육관을 지어야 한다고 주장하여 장소를 정하지 못했다. 두 곳은 10km 정도 떨어져 있고 1km를 가는데 100원의 비용이 든다. 어디에 체육관을 지어야 좋을까?  	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆어떤 방법이 좋은지 소집단별로 추측을 한다. -①A동과 B동 중간 지점에 체육관을 짓는다. -②A동과 B동 중 많은 사람이 살고 있는 곳에 체육관을 짓는다.	※타당한 이유를 들면서 추측한다.
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다.	◆집단별로 추측한 내용을 발표한다.	
	추측한 내용을 검사하고 반례를 제시한다.	◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①의 경우, A동 사람이 B동 사람보다 훨씬 많다면 A동 사람들의 불만이 많을 것이다. -②의 경우, A동 사람이 B동 사람의 수보다 얼마 많지 않다면 B동 사람들의 불만이 많을 것이다. -모든 사람들이 드는 비용의 합을 총비용이라고 한다. -A동과 B동의 사람 수가 같다면 어디에 지어야 총비용이 최소가 될까? -A동과 B동의 사람 수가 다르다면 어디에 지어야 총비용이 최소가 될까?	※여러 가지 경우를 생각해본다.

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆집단별로 자신들의 추측을 개선한다. -A동과 B동의 사람 수가 같다면 어디에 짓든 총비용은 똑같다. 하지만 체육관까지 가는 비용이 모든 사람이 똑같기 위해서는 중간 지점에 지어야 한다. -A동과 B동의 사람 수가 다르다면 총 비용은 한명이라도 많은 사람이 있는 곳에 짓는게 가장 적게 든다.	
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다. 개선된 추측을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 개선한 추측을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인한다. -A동 사람이 B동 사람보다 많을 경우 A동에 짓는다면 형평성에 어긋날 것이다.	
추측의 개선	추측을 개선한다.	◆추측을 개선한다. ☞A동과 B동의 사람 수가 같다면 어디에 짓든 총비용은 똑같다. 하지만 체육관까지 가는 비용이 모든 사람이 똑같기 위해서는 중간 지점에 지어야 한다. ☞A동과 B동의 사람 수가 다르다면 총 비용은 한명이라도 많은 사람이 있는 곳에 짓는게 가장 적게 든다. 하지만 형평성에 맞게 모든 사람이 똑같은 비용이 들게 하려면 중간 지점에 지어야 한다.	※추측을 검사하여 알게된 내용을 종합하여 추측을 개선한다.

자료번호	1-5	활동 내용	분수의 덧셈 알아보기
탐구주제	분수의 덧셈	관련 교육과정	4-나-1.분수

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆분자가 같은 분수의 덧셈을 제시한다. - $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ 을 어떻게 계산하면 좋을지 생각해본다.	※실물 또는 그림 자료를 통해 생각해본다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. - 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 더한다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -분모끼리, 분자끼리 더할 경우, $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ 은 $\frac{5}{12}$ 가 된다. 그러나 그림으로 그려보면 $\frac{5}{12}$ 는 $\frac{3}{6}$ 보다도 작다는 것을 알 수 있다. -그림으로 그려서 알아본다.	※ 다 함 께 반례를 찾아본다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -그림으로 그려본 결과, $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ 은 $\frac{5}{6}$ 인 것을 알 수 있다. ☞분자가 같은 분수의 덧셈에서는 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 더한다.	
새로운 문제 제기	새로운 문제를 제기한다.	-분모가 다른 분자일 경우에는 어떻게 해야 하는지 알아본다.	※ 그 림 을 그려서 비교해본다.

자료 번호	1-6	활동 내용	24.12 는 어떻게 읽을까?
탐구 주제	소수점 읽기	관련 교육과정	4-나-2.소수

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆소수를 제시한다. -24.12 는 어떻게 읽어야할까?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -①이십사십이 라고 읽는다. -②이십사점십이 라고 읽는다. -③이십사일이 라고 읽는다.	※읽는 방법을 알고 있는 학생은 다른 방법으로 읽었을 때 어떤 문제점이 생길 수 있는지 생각해보도록 한다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①의 경우, 24, 12 와 구분하기 어렵다. -②의 경우, 12.111 을 십이점백십일이라고 읽을 경우 12.12 보다 큰 수로 오해하기 쉽다.	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. ☞24.12 는 이십사점일이로 읽는다.	

자료 번호	1-7	활동 내용	분수를 소수로 고치기
탐구 주제	분수와 소수	관련 교육과정	4-나-2.소수

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆다음의 분수 중에서 소수로 나타낼 수 있는 분수를 찾는다. $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{12}{51}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ - $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ 는 소수로 나타낼 수 있다. - $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{12}{51}$ 는 소수로 나타낼 수 없다. ◆분수를 소수로 나타낼 수 있는 조건을 찾는다.	※분수를 직접 소수로 나타내어 본다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -①분모의 일의 자리 수가 짝수이거나 5이면 소수로 나타낼 수 있다. -②분자가 홀수이면 소수로 나타낼 수 있다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①의 경우, $\frac{3}{22}$는 소수로 나타낼 수 없다. -②의 경우, $\frac{5}{6}$는 소수로 나타낼 수 없다.	※위에서 제시되지 않은 분수 중에서 반례를 찾는다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 소집단별로 추측을 개선한다. -분수를 소수로 나타내기 위해서는 분모가 10, 100, 1000, 10000 등으로 나타낼 수 있어야 한다. ☞분모가 10, 100, 1000, 10000 등의 약수일 경우 분수를 소수로 나타낼 수 있다.	※분모가 2와 5의 거듭제곱으로 나타낼 수 있어야 한다.

자료 번호	1-8	활동 내용	최대공약수의 특징 알아보기
탐구 주제	최대공약수	관련 교육과정	5-가-1.배수와 약수

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆공약수와 최대공약수를 제시한다. -12와 8의 공약수 : 1, 2, 4 (최대공약수 : 4) -9와 81의 공약수 : 1, 3, 9 (최대공약수 : 9) -24와 60의 공약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 (최대공약수 : 12) ◆공약수와 최대공약수의 관계를 살펴본다.	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -최대공약수는 공약수 중 가장 큰 수이다. -최대공약수의 약수는 두 수의 공약수가 된다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -다른 수들의 공약수와 최대공약수를 살펴본 후 추측한 내용이 참임을 알 수 있다. ☞최대공약수는 공약수 중 가장 큰 수이다. ☞최대공약수의 약수는 두 수의 공약수가 된다.	※소집단별로 추측한 내용이 참임을 확인하면 추측을 개선하지 않는다.

자료 번호	1-9	활동 내용	전체의 양이 다른 분수의 크기 비교하기
탐구 주제	분수의 크기 비교	관련 교육과정	5-가-3.약분과 통분

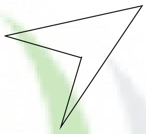
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆전체의 양이 다른 분수를 제시한다. 1) 피자의 $\frac{1}{3}$ 2) 호떡의 $\frac{1}{2}$ ◆1)과 2) 중 무엇이 더 클까 생각한다.	※ 피자와 호떡의 크기를 제시하지 않는다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -2)가 더 크다. $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$ 중 $\frac{1}{2}$이 더 크기 때문이다. 왜냐하면 $\frac{1}{3}$은 전체를 3등분 한 것 중 1개이고, $\frac{1}{2}$은 전체를 2등분 한 것 중 1개이다. -1)이 더 크다. 원래 피자가 호떡보다 더 크기 때문이다.	※그림을 그려서 설명할 수 있다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -2)의 경우 피자와 호떡의 크기가 다르기 때문에 단지 분수만 비교하면 안된다. -1)의 경우 전체의 크기가 큰 것이 꼭 큰 것은 아니다.	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. ☞피자와 호떡은 전체의 크기가 다르기 때문에 피자와 호떡의 크기를 알아야만 비교할 수 있다. ☞만약 피자와 호떡의 크기가 같다면 1)이 더 크다.	

자료 번호	1-10	활동 내용	어떤 수의 몇 배는 항상 어떤 수보다 클까?
탐구 주제	곱셈의 성질	관련 교육과정	5-나-1.소수의 곱셈

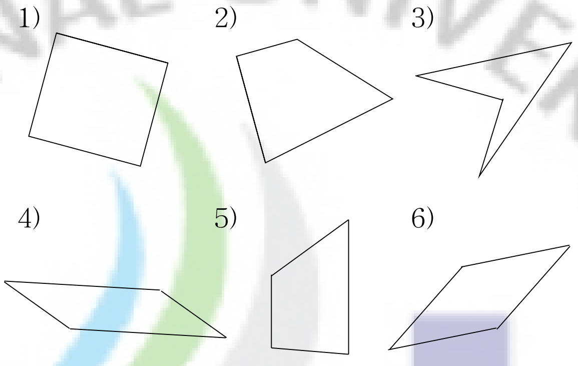
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -어떤 수의 몇 배는 항상 어떤 수보다 클까?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -예를 들어, 2에 3배, 4배, 10배를 하면 항상 2보다 크다. 그러므로 어떤 수의 몇 배는 항상 어떤 수보다 크다.	※많은 예를 들어본다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -2에 1배하면 2가 되므로 어떤 수의 몇 배는 항상 어떤 수보다 크지 않다.	※다른 소집단에서 생각하지 못한 반례를 찾아낸다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -어떤 수의 몇 배는 어떤 수 이상이 된다.	
추측의 검사	개선된 추측을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -2의 0.2배는 0.4이다. -2의 0배는 0이다.	※추측을 개선하였지만 또 반례가 나올 수 있다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. ☞어떤 수의 몇 배는 어떤 수보다 클 수도 작을 수도 있다.	

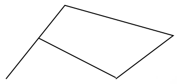
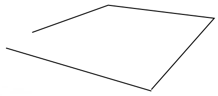
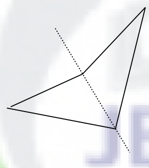
나. 도형 영역

자료 번호	2-1	활동 내용	오목 사각형 알아보기
탐구 주제	오목 사각형	관련 교육과정	2-가-3.도형과 도형 움직이기 3-가-3.평면도형

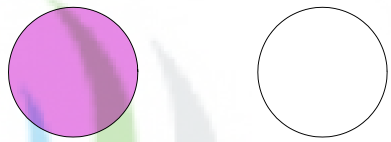
단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆아래의 도형은 사각형일까? 	※현 교육과정에서는 오목사각형을 다루지 않는다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -사각형이 아니다. 안으로 뾰족하게 들어갔기 때문이다. -사각형이 아니다. 교과서에 이러한 도형이 나오지 않았기 때문이다. -사각형이 아니다. 사각형이라면 4개의 각이 있어야 하는데 뾰족 들어간 부분의 각이 이상하다. (3학년) -사각형이다. 4개의 선분이 있기 때문이다.	※소집단별로 자신의 생각을 자연스럽게 이야기 할 수 있도록 유도한다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 검사한다. -사각형은 4개의 선분으로 둘러싸인 도형으로, 변이 4개이며, 꼭지점이 4개이다.	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. ☞위의 도형은 사각형이다. 4개의 선분으로 둘러싸였고, 변이 4개, 꼭지점이 4개이기 때문이다.	

자료 번호	2-2	활동 내용	사각형의 성질 알아보기
탐구 주제	사각형의 성질	관련 교육과정	2-가-3.도형과 도형 움직이기 3-가-3.평면도형

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆여러 가지 사각형을 제시한다.  ◆사각형은 어떤 특징을 가지고 있는지 살펴본다.	※사각형의 정의를 배운 후 적용한다. ※3번의 오목삼각형은 현 교육과정에 제시되지 않았으나 개념형성을 위하여 <자료 2-2>를 투입한 후 제시한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆여기서 무엇을 알 수 있는지 소집단별로 추측을 한다. -①사각형은 4개의 선분으로 이루어져 있다. -②사각형은 4개의 각이 있다. -③사각형은 4개의 변이 있다.	※다양한 추측이 나올 수 있도록 허용적인 분위기를 만든다.
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다. 추측을 검사하고 반례를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①의 경우, 아래의 도형도 사각형이라고 할 수 있는가?	※집단별 추측에 따라 다양한 반례를 찾아 제시하여 추측을 개선할 수 있도록 한다.

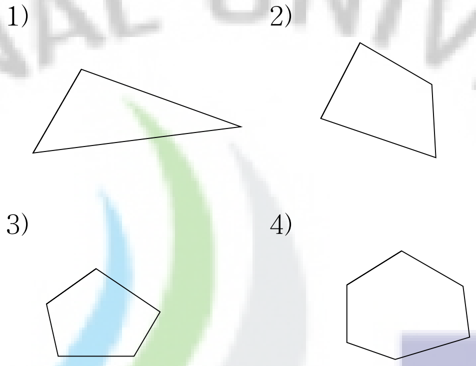
단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
		7)  8) 	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. -④사각형은 4개의 선분으로 둘러싸인 도형이다. -⑤사각형은 4개의 각이 있다.	
추측의 검사	개선된 추측을 발표한다. 개선된 추측을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 개선한 추측을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인한다. -④의 경우, 접혀있는 삼각형을 그리면 아래와 같은 모양처럼 4개의 선분으로 둘러싸인 도형이 된다. 이와 같은 경우도 사각형이라고 할 수 있는가? 9) 	※학생이 반례를 찾지 못할 경우 교사가 반례를 제시한다.
추측의 개선	추측을 개선한다.	◆추측을 개선한다. ☞사각형은 4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형이며, 4개의 변과 4개의 각이 있다.	

자료 번호	2-3	활동 내용	원 찾아보기
탐구 주제	원의 개념	관련 교육과정	3-나-3.도형 2-가-3.도형과 도형 움직이기

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆아래에 원이 2개가 있다. 1번은 원 내부가 포함되어 있고 2번은 안이 비어있는 원이다. 1) 2)  ◆어떤 원이 진짜 원일까?	※원의 정의를 배운 학생을 대상으로 한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆어떤 원이 진짜 원인지 소집단별로 추측을 한다. -1번이 원이다. 다른 도형들도 내부가 있는 것을 도형이라고 한다. -2번이 원이다. 약속하기에서 보면 원의 중심과 원 위의 한 점을 이은 선분을 원의 반지름이라고 하는데, 만약 내부도 원이라면 원의 반지름을 다르게 약속해야 할 것이다. -1번이 원이다. 원의 넓이를 구할 때 원 내부의 넓이를 구하기 때문이다. (6학년) -1번이 원이다. 원기둥을 예를 들어보면, 두 밑면이 원으로 이루어져 있는데 2번이 원이라면 원기둥은 내부가 뚫린 것이 되어버리기 때문이다. (6학년) ◆소집단에서 이야기된 내용을 바탕으로 소집단의 입장을 정리한다.	※다양한 추측이 나올 수 있도록 허용적인 분위기를 만든다.

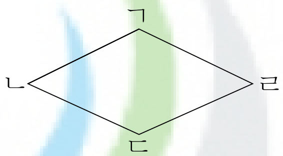
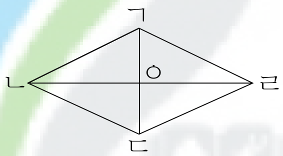
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
추측의 검사	집단의 의견을 발표한다. 이유에 대한 근거를 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단에서 생각하는 원에 대해 발표한다. ◆집단별로 원이라고 하는 이유에 대해서 근거가 있는지 확인한다. -원의 반지름을 정의할 때, 원의 중심에서 원 위의 점을 이은 것이라고 하는데 만약 1번이 원이라면 반지름의 길이는 무수히 많을 것이다. -교과서에는 원 내부가 포함되지 않은 것을 원으로 정의하지만 원 내부가 포함된 것 또한 원으로 사용하고 있다. 원 내부가 포함된 것은 엄밀히 말하면 원이 아니다. 그러므로 원 내부가 포함된 것의 용어가 필요하다.	※집단별 추측에 따라 다양한 반례를 찾아 제시하여 추측을 개선할 수 있도록 한다.
집단별 추측의 개선	추측을 개선한다.	◆자신들의 추측을 개선한다. -2번이 원이다. 원을 약속할 때 본을 떠서 그린 동그란 모양의 도형이라고 했는데 반지름의 정의에서 보면 원의 내부가 포함되지 않아야 한다는 것을 알 수 있다.	※원의 넓이에서는 원의 내부가 포함된 도형을 사용하므로 원판이라는 용어를 도입하는 것이 좋다.

자료 번호	2-4	활동 내용	다각형의 대각선의 수 알아보기
탐구 주제	대각선의 수	관련 교육과정	4-나-5.사각형과 도형 만들기

단계	핵심 활동	교수 · 학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆여러 종류의 다각형을 제시한다.  ◆대각선의 개수를 살펴본다.	※정다각형을 제시할 필요가 없기 때문에 다양한 모양으로 제시한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -삼각형은 대각선이 없다. -사각형의 대각선의 개수는 2개이다. -오각형의 대각선의 개수는 5개이다. -육각형의 대각선의 개수는 9개이다.	※직접 대각선을 그려서 개수를 세어본다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다. 새로운 문제를 제기한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -다른 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형의 대각선의 개수를 알아본 후 추측한 내용이 참임을 알 수 있다. ◆10각형, 25각형의 대각선의 개수는 어떻게 구할 수 있는지 생각해본다.	※추측한 내용이 참임을 확인한 후 새로운 문제를 제기할 수 있다.
집단별 추측	추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -대각선은 두 점을 이은 선인데 시작점과 이웃한 점은 끝점이 될 수 없다.	

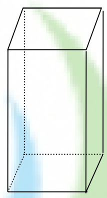
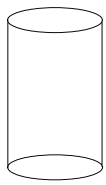
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
		-n각형의 대각선의 개수는 n×(n-3) 이다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆추측한 내용을 발표한다. ◆추측한 내용을 검사한다. -위의 공식으로는 사각형의 대각선의 개수가 4개, 오각형의 대각선의 개수가 10개, 육각형의 대각선의 개수가 18개가 나오므로 위의 공식은 참이 아니다. -선분ㄱㄷ 과 선분ㄷㄱ은 같은 선분이다.	
집단별 추측의 개선	추측을 개선한다.	◆집단별로 추측을 개선한다. ☞n각형의 대각선의 개수는 $\frac{n\times(n-3)}{2}$ 이다. ☞10각형의 대각선의 개수는 35개이다. ☞25각형의 대각선의 개수는 275개이다.	

자료 번호	2-5	활동 내용	한 각이 직각인 마름모와 정사각형
탐구 주제	마름모와 정사각형	관련 교육과정	4-나-5.사각형과 도형 만들기

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆한 각이 직각인 마름모를 정사각형이라고 할 수 있는지 생각해본다.	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -아래와 같이 마름모를 그린다.  -대각선을 그린다.  -각ㄱㄴㄷ이 90°라면 대각선은 각을 이등분하므로 각ㄱㄴㅇ은 45°이다. -마름모의 대각선은 서로 수직이므로 각ㄱㅇㄴ은 90°이다. -그러므로 각ㄴㄱㅇ은 45°이며 각ㄹㄱㅇ도 45°이다. -각ㄴ이 90°이면 각ㄱ, 각ㄷ, 각ㄹ 모두 90°이다. -삼각형ㄱㄴㅇ에서 각ㄱㄴㅇ과 ㄴㄱㅇ이 45°로 같으므로 변ㄴㅇ과 변ㄱㅇ은 길이가 같다. -삼각형ㄱㄴㅇ, 삼각형ㄴㄷㅇ, 삼각형ㄷㄹㅇ, 삼각형ㄹㄱㅇ은 모두 합동이므로 마름모의 네 변의 길이가 같다. -대각선의 길이가 같고 네 각의 크기가 같으므로 정사각형이다.	※마름모를 그려서 생각한다. ※정사각형은 네 각의 크기, 네 변의 길이가 같기 때문에 각과 변에 대해서 조사한다.

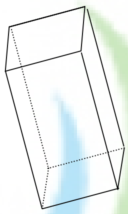
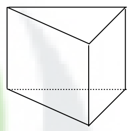
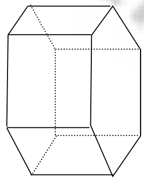
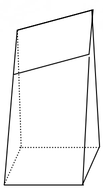
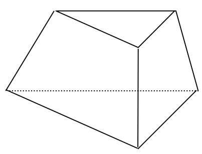
단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
추측의 검사	추측한 내용을 발표하고 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표하고 검사한다. ☞마름모의 한 각의 크기가 90°이면 나머지 세 각의 크기도 90°이고 네 변의 길이도 같으므로 정사각형이라고 할 수 있다.	

자료 번호	2-6	활동 내용	각기둥과 원기둥에 대해 알아보기
탐구 주제	각기둥과 원기둥	관련 교육과정	6-가-2.각기둥과 각뿔 6-나-4.원과 원기둥

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆1번은 각기둥이다. 2번은 각기둥이라고 할 수 있나? 1)  2) 	※ 1) 에 는 다양한 종류의 각기둥을 제시할 수 있다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -각기둥이다. 기둥모양이기 때문이다. -각기둥이다. 위와 아래에 있는 면이 서로 평행하고 합동이기 때문이다. -각기둥이 아니다. 각기둥은 밑면이 다각형인데 원은 다각형이 아니다. -각기둥이다. 원은 다각형이기 때문이다.	※ 자 신 의 생각을 자연 스 럽 게 이야기한다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 검사한다. -각기둥은 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형을 말한다. -다각형이란, 3개 이상의 변으로만 둘러싸인 도형이다. -원은 선분으로 둘러싸인 도형이 아니다.	

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. ☞2번은 각기둥이 아니다. 각기둥은 위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 이루어진 입체도형을 말하는데 2번의 밑면은 원으로 다각형이 아니기 때문이다.	

자료 번호	2-7	활동 내용	각기둥의 특징 알아보기
탐구 주제	각기둥의 특징	관련 교육과정	6-가-2.각기둥과 각뿔

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆여러 가지 각기둥을 제시한다. ◆각기둥은 어떤 특징을 가지고 있는지 살펴본다. 1)  2)  3) 	※입체도형의 밑면이 아래에 오지 않는 경우도 제시한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆여기서 무엇을 알 수 있는지 소집단별로 추측을 한다. -①각기둥의 두 밑면은 합동이다. -②각기둥의 옆면은 사각형이다. -각기둥의 옆면의 수는 밑면의 변의 수와 같다. -각기둥의 면의 개수는 (한 밑면의 변의 수 + 2)이다.	※다양하게 추측을 한다.
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사하고 반례를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①, ②의 반례  	

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. ☞각기둥의 두 밑면은 평행이면서 합동이다. ☞각기둥의 옆면은 직사각형이다. ☞각기둥의 옆면의 수는 밑면의 변의 수와 같다. ☞면의 개수는 (한 밑면의 변의 수 + 2)이다.	

다. 측정 영역

자료번호	3-1	활동 내용	그릇을 이용하여 물 채우기
탐구주제	들이	관련 교육과정	3-나-5.들이재기

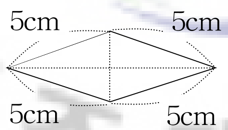
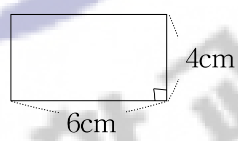
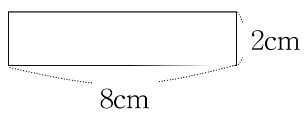
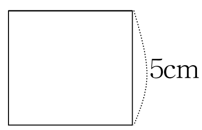
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -200mL들이 그릇과 500mL들이 그릇만을 이용하여 물을 담으려고 한다. 100mL, 200mL, 300mL, 400mL, 500mL, 600mL, 700mL, 800mL, 900mL, 1000mL의 물을 담을 수 있을까?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -200mL, 400mL, 600mL, 800mL, 1000mL의 물을 담을 수 있다. (200mL는 200mL들이 그릇으로 한 번 넣고, 400mL는 200mL들이 그릇으로 두 번, 600mL는 세 번, 800mL는 네 번, 1000mL는 다섯 번 넣는다.) -500mL, 1000mL의 물을 담을 수 있다. (500mL는 500mL들이 그릇으로 한 번, 1000mL는 두 번 넣는다.) -100mL, 300mL, 700mL, 900mL의 물은 넣을 수 없다.	※다양하게 추측을 한다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -300mL는 500mL들이 그릇으로 한 번 넣은 후, 200mL들이 그릇으로 한 번 빼면 된다.	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -100mL는 500mL들이 그릇으로 한 번 넣은 후, 200mL들이 그릇으로 두 번 뺀다. -700mL는 500mL들이 그릇으로 한 번, 200mL들이 그릇으로 한 번 넣는다.	

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	-900mL는 500mL들이 그릇으로 한 번, 200mL 들이 그릇으로 두 번 넣는다. ☞200mL들이 그릇과 500mL들이 그릇만을 이용하여 100mL, 200mL, 300mL, 400mL, 500mL, 600mL, 700mL, 800mL, 900mL, 1000mL의 물을 담을 수 있다.	

자료 번호	3-2	활동 내용	올림, 버림, 반올림 알아보기
탐구 주제	어림하기	관련 교육과정	4-나-6.어림하기

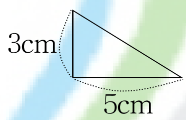
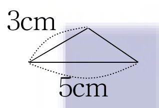
단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -선물을 포장하기 위해 리본끈을 사려고 한다. 필요한 리본끈은 3.7m 이다. 그러나 리본끈은 1m 단위로 판다고 한다. 사야될 리본끈의 길이는 어떻게 구할 수 있을까?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -반올림을 이용한다. 소수 첫째자리에서 반올림하면 4m이므로 4m의 리본끈을 산다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -만약 3.2m의 리본끈이 필요하다면, 반올림을 사용했을 때 소수 첫째자리에서 반올림을 해야하므로 3m가 된다. 3m의 리본끈을 사면 포장할 수가 없으므로 반올림을 이용하면 안된다.	※필요한 길이가 달라도 반올림을 이용할 수 있는지 확인한다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -어림에는 올림, 버림, 반올림이 있다. -필요한 리본끈 이상을 사야하므로 올림을 이용한다. 3.2m의 리본끈이 필요하더라도 올림을 이용하면 4m가 되므로 부족하지 않게 된다.	※이런 경우에 어림 중 무엇을 이용해야 좋은지 생각해본다.
추측의 검사	개선된 추측을 발표하고 검사한다.	◆개선된 추측을 발표하고 검사한다. ☞어림 중 올림을 이용한다. 3.7m를 소수 첫째자리에서 올림하면 4m가 되므로 4m의 리본끈을 산다.	

자료 번호	3-3	활동 내용	둘레가 같은 사각형의 넓이
탐구 주제	둘레와 넓이	관련 교육과정	4-나-5.사각형과 도형 만들기

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -둘레의 길이가 같은 사각형의 넓이는 모두 같을까?	
집단별 추측	추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -둘레의 길이가 같으므로 넓이 역시 같다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -둘레의 길이가 같으면서 모양이 다른 사각형들의 넓이를 구해보면 넓이가 다르다는 것을 알 수 있다.	※직접 여러 가지 사각형을 그려서 넓이를 구해본다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -둘레의 길이가 같아도 사각형의 넓이는 모두 다르다.	
새로운 문제 제기	새로운 문제를 제기한다.	◆새로운 문제를 제기한다. -둘레가 같고 모양이 다른 사각형 중 넓이가 가장 큰 사각형은 무엇인가?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. 1) 마름모  대각선 길이 : 6, 8cm 2) 직사각형  3) 직사각형  4) 정사각형 	※여러 가지 사각형을 그려서 넓이를 구해본다.

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
		-위와 같이 둘레의 길이가 20cm인 사각형을 그려서 넓이를 구한다. -1)의 넓의 : 24cm -2)의 넓이 : 24cm -3)의 넓이 : 16cm -4)의 넓이 : 25cm ☞둘레가 같고 모양이 다른 사각형 중 넓이가 가장 큰 사각형은 정사각형이다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다.	※ 추측에 대한 반례가 없으면 참인 추측이 된다.

자료 번호	3-4	활동 내용	두 변의 길이가 일정할 때 넓이가 가장 큰 삼각형 찾기
탐구 주제	삼각형의 넓이	관련 교육과정	5-가-6.평면도형의 둘레와 넓이

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -두 변의 길이가 일정한 삼각형 중 넓이가 가장 큰 삼각형은 어떤 삼각형인가?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -예를 들어 두 변의 길이를 3cm, 5cm 라고 하면 여러 가지 삼각형을 그릴 수 있다. 1)  2)  -위와 같이 삼각형을 그려보면 두 변이 90°로 만날 경우 높이가 가장 높다. -두 변의 길이가 일정한 삼각형 중 직각삼각형의 넓이가 가장 넓다.	※ 주어진 한 변을 고정하고 나머지 한 변을 각도를 다르게 이동시키며 삼각형의 모양을 다르게 한다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -추측한 내용이 참임을 확인한다. ☞두 변의 길이가 일정한 삼각형 중 직각삼각형의 넓이가 가장 넓다.	

라. 확률과 통계 영역

자료 번호	4-1	활동 내용	숫자카드로 세 자리 수의 개수 알아보기
탐구 주제	경우의 수	관련 교육과정	6-가-9.문제 푸는 방법 찾기 6-나-6.경우의 수

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제기한다.	◆세 개의 숫자카드가 있다. 이 카드를 한 번씩만 사용해서 세 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수를 구하여라. 1) 1, 2, 3 2) 5, 7, 8 3) 6, 9, 4	※숫자가 다른 카드 3개씩 제시한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆여기서 무엇을 알 수 있는지 소집단별로 추측을 한다. - 1)의 경우, 123, 132, 213, 231, 312, 321로 6가지이다. - 2)의 경우, 578, 587, 758, 785, 857, 875로 6가지이다. - 3)의 경우, 694, 649, 964, 946, 469, 496으로 6가지이다. - 1), 2), 3)의 경우 모두 6가지로 같다. - 카드가 3개 있을 경우, 세 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수는 6가지이다.	※언어로 표현하기 힘든 경우 교사가 도움을 준다.
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다.	
	추측을 검사하고 반례를 제시한다.	◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. - 카드 중 0이 있는 경우는 어떠한가? → 0이 제시될 경우, 0은 백의 자리에 올 수 없으므로 경우의 수는 4가지이다.	※1), 2), 3)에 하나의 숫자카드를 0 으로 바꾼 후 경우의 수를 찾아본다.

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. - 0이 아닌 카드 3개가 있을 경우, 세 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수는 6가지이다.	
추측의 검사	개선된 추측을 발표한다. 추측을 검사하고 개선한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 개선한 추측을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인한다. -2, 2, 5 가 주어질 경우에도 가능한가? → 카드를 한 번씩 사용해서 만들 수 있는 세 자리 수는 225, 252, 522로 3가지이다.	※같은 숫자가 있을 경우 만들 수 있는 수가 중복되므로 경우의 수가 줄어든다.
추측의 개선	추측을 개선한다.	◆추측을 개선한다. ☞0이 아닌 다른 숫자 카드 3개가 있을 경우, 세 자리 수를 만들 수 있는 경우의 수는 6가지이다. (단, 카드는 한 번씩만 사용한다.)	

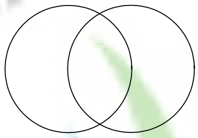
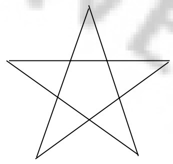
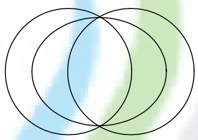
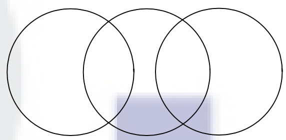
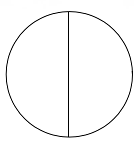
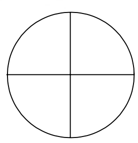
마. 문자와 식 영역

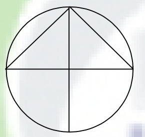
자료 번호	5-1	활동 내용	반에서 생달이 같은 사람이 3명 이상 있기 위한 조건 찾기
탐구 주제	비둘기집의 원리	관련 교육과정	문제 해결

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆우리 반에서 생달이 같은 사람이 3명 이상 있는 경우가 한 개라도 있으려면 적어도 몇 명이 있어야 하는가?	※ 생달은 태어난 달을 말한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -① 3명 이상 있으면 가능하다. 3명이 전부 같은 달이면 된다. -② 36명 이상 있으면 가능하다. 모든 달에 3명이 있기 때문이다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -①에서 3명이 꼭 같은 달에 있을 것이라는 보장이 없다. -②에서 36명 보다 적은 30명이 있다고 해도 한 달에 생달이 같은 사람이 3명 이상 있을 수 있다. ☞만약 12명이 있다면 어떻게 될까? -모두 생달이 같다면 위 조건을 만족한다. -모두 생달이 다르도록 하면 적어도 한 개의 달에 한 명씩은 포함된다. ☞만약 13명이 있다면 어떻게 될까? -모두 생달이 다르다고 해도 언제나 생달이 같은 사람이 두 명 생긴다. ☞만약 24명이 있다면 어떻게 될까? -모두 생달이 다르도록 하면 적어도 한 개의 달에 두 명씩은 꼭 포함된다.	

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
		☞만약 25명이 있다면 어떻게 될까? -모두 생달이 다르도록 하면 11개의 달은 두 명씩 포함되고 1개의 달에는 세 명이 포함된다.	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. ☞생달이 같은 사람이 3명 이상 있는 경우가 한 번이라도 있으려면 적어도 25명은 있어야 한다.	

자료 번호	5-2	활동 내용	한붓그리기를 할 수 있는 조건 찾기
탐구 주제	한붓그리기	관련 교육과정	문제해결

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆다음 그림을 연필을 떼지 않고 선을 한 번씩만 지나게 그릴 수 있는지 알아본다. 1)  2)  3)  4) 	※연필을 떼지 않고 선을 한 번씩만 지나게 그리는 것을 '한붓그리기'라고 한다.
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆여기서 무엇을 알 수 있는지 소집단별로 추측을 한다. -한 점에서 출발하면 반드시 그 점에서 끝난다. -모든 점에서 한붓그리기가 가능하다. -점을 지나는 선분의 개수는 항상 짝수개이다. ☞점을 지나는 선분이 짝수개이면 짝수점, 홀수개이면 홀수점이라고 한다.	※점을 지나는 선분의 개수를 세어보게 한다.
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사하고 반례를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -점을 지나는 선분이 홀수개인 모양을 만들 수 있다. 5)  6) 	

단계	핵심 활동	교수·학습 활동	비고
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. -짝수점만 있으면 한붓그리기가 가능하다. -홀수점이 두 개인 경우 한붓그리기가 가능하다. -홀수점이 두 개인 경우는 시작한 점과 다른 점에서 끝난다. -홀수점이 두 개가 아닌 경우는 한붓그리기를 할 수 없다.	
추측의 검사	개선된 추측을 발표한다. 개선된 추측을 검사한다. 새로운 문제를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 개선한 추측을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인한다. ◆새로운 문제를 제기하여 추측을 개선한다. -한붓그리기가 가능할 때, 어떤 점에서 시작하는지에 상관없이 한붓그리기를 할 수 있을까? 7) 	※반례를 통해 추측을 개선하고 새로운 문제를 제시한다. ※학생이 새로운 문제를 제기할 수도 있고 교사가 제기할 수도 있다.
추측의 개선	추측을 개선한다.	◆추측을 개선한다. -짝수점만 있으면 한붓그리기가 가능하다. -홀수점이 두 개인 경우 한붓그리기가 가능하다. -홀수점이 두 개인 경우는 시작한 점과 다른 점에서 끝난다. -홀수점이 두 개가 아닌 경우는 한붓그리기를 할 수 없다. -짝수점과 홀수점(2개)이 있을 경우 반드시 홀수점에서 시작해야 된다.	

바. 규칙성과 함수 영역

자료번호	6-1	활동 내용	비의 성질 알아보기
탐구주제	비의 성질 1	관련 교육과정	6-가-7.비례식

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆2 : 3, 4 : 6, 6 : 9의 비의 값을 구한다. - 2 : 3 의 비의 값 : $\frac{2}{3}$ - 4 : 6 의 비의 값 : $\frac{2}{3}$ - 6 : 9 의 비의 값 : $\frac{2}{3}$ ◆이것으로 알 수있는 비의 성질을 알아보아라.	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측을 한다. -비의 양쪽 항에 똑같은 수를 곱하여도 비의 값은 같다.	
추측의 검사	집단별로 추측한 내용을 발표한다. 추측을 검사반례를 제시한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -양쪽 항에 0을 곱하면 어떻게 될까? -3 : 0 에 0을 곱하면 어떻게 될까?	
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆소집단별로 자신들의 추측을 개선한다. -2 : 3 의 양쪽 항에 0을 곱하면 0 : 0 이 되고, 3 : 2의 양쪽 항에 0을 곱해도 0 : 0이 된다. - 3 : 0의 비의 값은 구할 수 없으므로 0을 곱할 수 없다. ☞비의 양쪽 항에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 비의 값은 같다. ☞비에 0이 있으면 어떤 수를 곱하여도 0이 되므로 구할 수 없다.	※반례를 통해 추측한 내용에 조건을 넣어 추측을 개선한다.

자료 번호	6-2	활동 내용	4:0 과 8:0 은 같을까?
탐구 주제	비의 성질 2	관련 교육과정	6-가-7.비례식

단계	핵심 활동	교수・학습 활동	비고
문제 상황 제시	자료를 통해 문제를 제시한다.	◆문제를 제시한다. -A팀과 B팀이 축구 경기를 했는데 A팀이 4:0 으로 이겼다. 그러면 4:0 과 8:0 은 같은 것일까?	
집단별 추측	자료를 통해 추측을 한다.	◆소집단별로 추측하여 토론한다. -비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하여도 비의 값은 같으므로 4:0 과 8:0 은 같다.	
추측의 검사	추측한 내용을 발표한다. 추측한 내용을 검사한다.	◆전체 학생들에게 소집단별로 추측한 내용을 발표한다. ◆다른 집단에서 추측한 내용이 맞는지 확인하고 그렇지 않을 경우, 반례를 제시한다. -4:0 은 A팀이 4골을 넣는 동안 B팀이 한 골도 넣지 않은 것인데 8:0 은 A팀이 8골을 넣는 동안 B팀이 한 골도 못 넣은 것과 같으므로 같지 않다.	※4:0 과 8:0 의 의미를 잘 생각해본다.
집단별 추측의 개선	반례를 통해 추측을 개선한다.	◆반례를 통해 추측을 개선한다. -비의 전항과 후항에 0이 아닌 수를 곱하여도 비의 값은 같다. 그러나 위의 축구 경기는 골의 수를 비교한 것이므로 4:0 과 8:0 은 다르다.	

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 결론

제7차 교육과정에서는 수학 교육의 새로운 방향으로 학생들에게 수학적인 경험을 하게 하고, 탐구하는 활동을 하게 하며, 문제를 조사하고 분석하여 해결하는 경험을 바탕으로 생각함으로써 지식을 구성해야 한다(교육과학기술부, 2008a)고 말하고 있다. 그러나 구체적인 조작 활동을 통하여 약속을 하고 실생활의 문제를 해결하는 것만으로는 이러한 수학적 사고를 기르기가 쉽지 않다. 이에 수학적 사고를 기를 수 있는 방법을 찾고자 Lakatos의 방법론을 바탕으로 새로운 교수·학습 방법을 개발하였다.

Lakatos의 방법론은 증명과 반박을 통해 수학하는 방법을 배우는 것이나 초등학생의 인지적 사고 수준이 낮으므로 Lakatos의 방법론을 그대로 적용시키기에는 어려운 문제점이 있다. 이에 자료를 통해 추측을 하고 추측을 반박할 수 있는 반례를 찾아내어 추측을 개선해가는 과정을 통하여 초등수학에 Lakatos의 방법론을 적용시키고자 하였다. 하지만 학생 스스로가 능동적으로 추측과 반례를 찾기에는 현 교육과정이 적합한 예를 직접 제시하는 경우가 많지 않기 때문에 교사가 반례를 찾을 수 있는 문제 상황을 찾고 학생들에게 제시해 주어야 한다. 또한 수학적인 사고를 언어로 표현하는 활동은 초등학생에게 다소 어려우므로 소집단을 구성하여 보다 허용적인 분위기에서 자율적이고 능동적인 대화와 토론을 할 수 있도록 하였다. 이러한 과정을 통해 흥미와 관심을 갖도록 하고, 합리적이고 비판적인 사고가 신장되게 할 수 있다. 수학이라고 하면 어떠한 것이든 무조건 당연하다고 받아들이던 학생들이 이러한 교육방법을 통해 비판적인 사고를 할 수 있게 될 것이고, 반례를 들어 추측을 개선하는 활동으로 얻게 되는 사실이나 개념은 오래 기억될 것이다. 그 결과 학생들끼리 수학적 지식을 언어로 표현하는 능력을 기를 수 있고 스스로 문제를 해결하는 능력이 향상되어 자율적이고 능동적으로 수학하는 방법, 즉 수학적 힘을 얻게 될 것이다.

2. 제언

본 연구에서 개발된 자료를 활용함에 있어 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 학생들에게 적용할 수 있는 자료를 개발하였으나 적용하지는 못했으므로 추후 많은 교사가 개발된 자료를 바탕으로 학생들에게 알맞게 수정하여 적용하기를 바란다. 또한, 개발된 자료 이외의 다양한 소재를 바탕으로 기존에 개발되지 않은 자료의 개발이 필요하다.

둘째, 이러한 자료를 활용하기에 앞서 교사들은 학생들이 어떤 개념에 대하여 오류 및 오개념을 가지고 있는지 확인하여 알맞은 자료를 활용해야 한다. 단지 학년에 맞는 자료만을 활용할 것이 아니라 이미 배운 개념에 대한 오개념이 생겼을 때 알맞은 자료를 찾아 학생들에게 적용해야 한다.

참 고 문 헌

강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

강문봉(2004). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

강미선(2006a). 개념 잡는 초등수학사전. 김영사.

강미선(2006b). 행복한 수학 초등학교 1-수의세계. 휴먼어린이.

강미선(2006c). 행복한 수학 초등학교 2-연산의 세계. 휴먼어린이.

강옥기(2003). 수학과 학습지도와 평가론. 경문사.

교육부(1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

교육과학기술부(2008a). 초등학교 수학 1-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육과학기술부(2008b). 초등학교 수학 2-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육과학기술부(2008c). 초등학교 수학 3-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육과학기술부(2008d). 초등학교 수학 4-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육과학기술부(2008e). 초등학교 수학 5-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육과학기술부(2008f). 초등학교 수학 6-나 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008a) 초등학교 수학 1-가 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008b). 초등학교 수학 2-가 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008c). 초등학교 수학 3-가 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008d). 초등학교 수학 4-가 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008e). 초등학교 수학 5-가 교사용 지도서. (주)두산.

교육인적자원부(2008f). 초등학교 수학 6-가 교사용 지도서. (주)두산.

권현직(2008). 신문이 보이고 뉴스가 들리는 재미있는 수학 이야기. (주)가나출판사.

박영배(1996). 수학 교수 학습의 구성주의적 전개에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

신종섭(2000). 라카토스의 연구 프로그램. 범한철학회 논문집.

안선영(2005). 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구. 제주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호(2004). 수학교육학의 지평. 경문사.

정재은(2007). 수학이 궁금할 때 피타고라스에게 물어봐. 아이세움.

황혜정 외 5명(2008). 수학교육학신론. 문음사.

Arthur J. Baroody, & Ronald T. Coslick(2005). 수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?(권성룡 외 11명 역). 경문사.

G. Polya(1973). Induction and Analogy in Mathematics. Princeton: Princeton University Press.

Imre Lakatos(1976). Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, Edited by J. Worrall and E. Zahar, London: Cambridge University Press.

Imre Lakatos(2003). 수학적 발견의 논리(우정호 역). 아르케.

ABSTRACT

Materials Development on the Application of Lakatos's Methodology to Teaching Elementary Mathematics

Kim, Hyun Ju

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Cheju National University

Supervised by Professor Choi, Keun Bae

The aim of 7th elementary mathematics education is increasing confidence and improving mathematical eye and insight trough heuristic and critical thinking. Learnig and experincing by mathematicalization through mathematical research is the one of the best way to improve mathematical ability for stduents. And also Students can improve mathematical eye and insight by speculation and verification of mathematical problem.

Considering Lakatos's positions, the mathematical knowledge is just a conjecture and it grows through the cycles of proofs and refutations to hypotheses with much more explanatory and heuristic power. In other

words, mathematical knowledge is provisionally right-conjecture refutable. Lakatos suggests monster-barring method, exception-barring method, monster-adjustment method, lemma-in-corporation method to refute a counterexample.

research of the counterexamples needed for the students to improve mathematical eye and insight. Students have to experience the process of mathematicalization by improving conjecture through counterexamples. Group learning of social constructivism also needed for the active and heuristic participation of students. They can improve mathematical eye and insight by expressing mathematical thought.

Hence, this study suggests developed materials intergrate Lakatos's methodology with social constructivism can be used for the elementary mathematics education.

First, Analyse the laktos's methodolys and 7th elementary mathematics education, then synthesize and change them for students study. Second, deveolop materials for elemenatry mathematics education by intergrate social constructivism.

Students can improve mathematical eye and insight through the process of conjecture with materials and improving conjecture by finding counterexamples. Teachers have to make students to do the heuristic and active study by giving the chance to find counterexample and making small-group students can be in. As a result students can improve the ability to express mathematical knowledge into a language, solve the problem by themselves. This means heuristic and critical thinking, mathematical eye and insight.